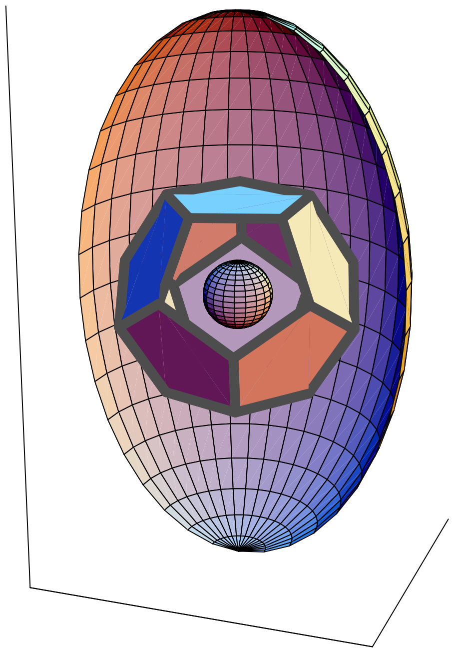
Aufgaben ◇ Modulprüfungen ◇ Vordiplome ◇ Elektro + Maschinenbau ◇

◇ Algebra ◇



von

Rolf Wirz

Alt-Ingenieurschule Biel — HTA-Biel — BFH/Dep. TI/ AHB

Ausgabe vom 9. Juli 2012, Version 1.3.0 / d

Mit klickbaren Links zu Lösungen

WIR1 /2008/2009/2010/2012/ LaTex/BuchUebAlgBachelor.TEX

Übungen und Tests aus den Jahren 2005 – 2012 mit Vordiplomaufgaben und Modulprüfungsaufgaben aus den Jahren 1999 – 2010, letztere aus diversen Abteilungen (Fachbereichen)
Produziert mit PCTeX unter Win XP.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

Bei der Erarbeitung von Lernstoff geht es kaum ohne Übung. Das gilt nicht nur beim Erlernen der Handhabung eines Musikinstrumentes. Unser Instrument, das wir für die Meisterung von Mathematikstoff zu beherrschen lernen müssen, ist das eingene Denken. Es geht also hier um Hirntraining, um Übung. Beim Üben, das gilt speziell auch bei einer Prüfüungsvorbereitung, ist Ausgeglichenheit ist angesagt. Wer nicht ausgeglichen ist, neigt stark auf eine Seite. Er kann daher kippen und schliesslich stürzen. Dann ist das Lernen gefährtet, oder die Prüfung ist schon vor der Prüfung vorbei. Der Aufwand hat sich nicht gelohnt. Das kannst du vermeiden, indem du dir dein Zentrum bewusst machst, um das du die Schranken deiner Ausgeglichenheit definieren sollst...

PhW

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Dieses Arbeitsbuch ist als Begleitung zu den Vorlesungen und Übungen in linearer Algebra und Geometrie I und II (1. Studienjahr) des Bachelor-Lehrgangs für Elektro– und Maschineningenieure in den Jahren 2005 – 2010 entstanden. Ein Kapitel entsprach dabei einer Arbeitswoche. Zuerst ist jeweils eine kurze Stoffübersicht stichwortartig wiedergegeben. Die Stoffabfolge bezieht sich dabei auf die verwendeten Skripte „Algebra"und „Einführung in Octave/ Matlab". In jeder Arbeitsphase folgen auf die Stoffübersicht dann Übungen, manchmal auch ehemalige Tests und Links zu den Lösungen. Diese Lösungen sind vor allem des Umfangs des Maschinen–Outputs wegen ausgelagert. Zu einer Übungsserie kann der Umfang der zugehörigen Lösungen bis zu 200 Seiten betragen, wobei darin die Graphiken meistens einen großen Raum einnehmen.

Klickbare Links zu diesen Skripten:

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html` (Skript–Download)
`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGdf.pdf` (Analysis deutsch – französisch)
`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGd.pdf` (Analysis deutsch)
`http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf`

Die Lösungen zu den Übungen sind aus Praktikabilitätsgründen mit *Mathematica* produziert worden. In den bald 20 Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter

`http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html`.

Vorteil dieses Verfahrens: Die Files mit dem reinen *Mathematica*–Source-Code in lassen sich damit sehr klein halten. Daher sind sie sehr einfach über Internet transportierbar. Es entstehen keine grossen Download–Zeiten und die Kosten des Speicherplatzes bei einem Provider übersteigen die gesetzten Grenzen nicht, denn die entstehenden File–Sammlungen haben beschränkte Grösse. Die abgearbeiteten Files mit dem Output mit Postscript-Graphiken sind allgemein sehr „schwer", können aber jederzeit mit dem *Mathematica*–Programm aus dem

Source-Code wieder erstellt werden. Dafür sind die mittels „Output beladenen Files“ erzeugten PDF-Files wieder klein, was sie transportabel macht.
Weiterer Gründe für die Verwendung von *Mathematica* im Vergleich zu Konkurrenzprodukten liegen in den Lizenzbedingungen und dem Leistungsumfang, also im Kosten–Nutzen–Verhältnis im Vergleich zur momentanen Situation bei Konkurrenzprodukten, wodurch eine längere Evaluationen von selbst überflüssig geworden ist.
Für den auf den folgenden Seiten wiedergegebene Output sind daher die Seiten unabhängig nummeriert.

Nachstehend sind einige verschiedene Formatierungsmöglichkeiten der *Mathematica*–Files dargestellt. Infolge der in PDF-Files und im der Internet verwendbaren Farbformate, sind dabei die Farben zum Teil in den PDF-Files gegenüber der Bildschirmdarstellung rigoros reduziert. Das Format ersieht man aus dem Dateinamen. Die dabei zur Anwendung gelangte Mathematik braucht man zu Beginn nicht zu verstehen. Man kann trotzdem beurteilen, welche Darstellungsart im gegenwärtigen Rahmen gefällt und welche nicht:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_ArticleModern.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_ArticleClassic.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Classic.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Classroom.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Default.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Demo.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_DemoText.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_NaturalColor.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_PastelColor.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_PrimaryColor.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Report.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Textbook.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Tutorialbook.pdf

Hier sind die Quellencode-Files:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Default.nb
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Work.nb

Kapitel 2

Phase 1 (I/1)

2.1 Stoffprogramm Phase 1 ◇ E+M ◇

Algebra 1. Semester

- ⊘ Einführung
  - Vorstellung
  - Learningmanagement
  - Koordinaten
  - Lerntechnik: Vergessenskurve, Lernplateau,
  - Lernen = erarbeiten * verstehen * behalten * anwenden. Faktor = 0 $\Rightarrow$ Produkt = 0.
- ⊘ Wozu Mathematik?
- ⊘ Zahlen, geometrische Gebilde, u.s.w.: keine materiellen Realitäten.
- ⊘ Modell (in der Sprache der Mathematik) - Realität $\Rightarrow$ Naturwissenschaft — Mathematik
- ⊘ Übungen: Skalare, Vektor und andere Begriffen nach Übungsblatt
- ⊘ Praktische Einführung in MATLAB

Arbeiten

- ⊘ Download Skripte auf http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html
  - Lineare Algebra, Geometrie, deutsch http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGd.pdf ausführlich (vorerst Teil Vektorrechnung !!!!) Achtung: Die Seitenzahlen können ändern.)

- Varianten siehe
  http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M1E1p_LAG_07.htm#Ue
- Einführung: http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursEinf.pdf
  (Einführungsskript mit Tips zur Lerntechnik)
- Matlab–Einführung: http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/FileList.html
  (Übersicht über die Files) oder
  http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf
- MATLAB, externes Material:
  http://rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage3.html#EinfMatlab
  (Skript von der ETH empfehlenswert!)

⊘ Download Octave http://rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage1.html#Freeware

⊘ Studium, Literatur: Studiere das Learningmanagement–System
http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html

⊘ Beschaffe Literatur
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/LiteraturAktuell.html

- Material:
  - Formelnbuch oder Mathematiklexikon
  - Lehrbuch (Umfang)
  - Für Computer: Rechenprogramm und Literatur aus dem Internet

⊘ **Übungen**

- Mache dir einen privaten Repetitionsplan für die ***Grundlagen***, falls du dich unsicher fühlst (Literatur: Vorkurs Mathematik, Einstieg in die Mathematik für Fachhochschulen)
- **Sammle deine Übungsaktivitäten in einem Porte-Feuille zum Fach!**
- *Weiter ist ein Blatt schon bereit für das „Selbststudium“:*
  http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/SEMAlg01.pdf
- **Übungen:** http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/UEMAlg01.pdf
- **Kurzlösungen:** PDF-File siehe unter dem klickbaren Link
  http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMAlg01.pdf
  Source Code siehe unter dem klickbaren Link
  http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMAna01.nb
- **Übungssscheine:** Nach mündlichen Erklärungen des Dozenten. Download siehe
  http://rowicus.ch/Wir/Administratives/Uebungsscheine.html
- Einführung in die Arbeit Arbeit mit MatLab oder Octave:
  - ⇒ Files sichten, schauen was die Befehle machen. Link zur Einführung in Matlab (Octave)
    http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/FileList.html
    (Navigationszentrale)
    http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf
    (kleines Skript)

  * An einem Schulrechner auf dem MATLAB installiert ist: Die Inhalte der rtf-Files kann man mittels copy-paste ins Matlab kopieren. Finde heraus was die Files tun!

⊘ **Eintrag ins Porte-Feuille:**

- Notizen
- Zusammenfassungen zu den Themen: Begriffe, Zusammenhänge, Anwendungen, Stundennachweis (Handschriften)
- Zusätzlich ev. Computerausarbeitungen
- Handlösungen
- Projekte

2.2 Selbststudium in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M 01 ◇

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns pro Unterrichtslektion ca. eine Stunde Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint.
Gerade am Anfang gilt es im Selbststudium Grundlagen zu repetieren oder eventuell fehlende Grundlagen zu erarbeiten. **Aufgabe:** Bearbeite dieses Blatt „Selbststudium 1“ und mache dir dafür einen Studienplan über ca. 1 Woche. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Ziel hier ist ein erster Umgang mit MATLAB („Matrix Laboratory“ abgekürzt) - oder an dessen Stelle zu Hause mit dem MATLAB–Clone Octave.

(1) Octave, GnuPlot, MATLAB:

(a) Beschaffe und installiere Octav (wie schon in den Übungen 01 verlangt). Z.B. unter dem Link 1.

(b) Falls du Gelegenheit hast, an einem Schulcomputer MATLAB zu probieren, so nütze sie. Das Programm ist momentan nicht bei der Mathematik-Software, sondern bei der Ingenieursoftware zu finden.

(c) Beschaffe dir im Internet Literatur zu MATLAB resp. Octave (wie schon in den Übungen 01 verlangt). Z.B. unter dem Link 2. Die Octave-Befehle sollten auch unter MATLAB laufen. Umgekehrt geht nicht alles in Octave, was in MATLAB funktioniert.

(d) Beschaffe dir im Internet Literatur zu GnuPlot (Octave verwendet GnuPlot um Diagramme zu erstellen). Z.B. unter dem Link 3. Konsultiere die Literatur, wenn du mit Octave alleine in der Sache der Plots nicht weiterkommst.

Link 1:
`http://rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage1.html#Freeware`

Link 2: `http://rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage3.html#EinfMatlab`

Link 3: `http://rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage3.html#Gnu`

Link 4: `http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/FileList.html`

(2) Eine kleine Expedition in Octave:

(a) Probiere mit Octave die Befehle aus, die im File (resp. ev. inzwischen in den Files) unter Link 4 aufgeführt sind. Diese Befehle haben schon einmal funktioniert...

(b) Probiere weitere interessante Befehle aus, die du in der beschafften MATLAB–Literatur findest. Die Erfahrung kommt durch das Ausprobieren!

(3) Mache dich mit deinem persönlichen Taschenrechner vertraut, sofern das nicht schon erledigt ist. Hinweis: Es ist für viele Leute ratsam, immer ein Handbuch oder eine Anleitung griffbereit dabei zu haben...

2.3 Übungen in lin.Alg.+Geo. und Organisatorisches ◇ E+M 01 ◇

Diese Serie enthält 3 Seiten!

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns pro Unterrichtslektion ca. eine Stunde Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint.
Gerade am Anfang gilt es im Selbststudium Grundlagen zu repetieren oder eventuell fehlende Grundlagen zu erarbeiten. **Aufgabe:** Konsultiere daher das Blatt „Selbststudium 1, lin.Alg.+Geo.“ (im Menue wo man dieses Blatt hier öffnen kann: `http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/SEMAlg01.pdf`) und mache dir dafür einen Studienplan über ca. 1 Woche. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

(1) Eigene Organisation und Planung wie schon auf dem ersten Analysis-Übungsblatt erwähnt (nichts dem Zufall überlassen beim Erarbeiten eines Stoffgebietes, beim Arbeiten mit dem Stoff der Lektionen, Prüfungsvor- und Nachbereitung (Verbesserung), . . .).

   (a) Planung organisieren! (Strategie, Prinzipien, Tandem)

   (b) Einarbeitung in die Lerntechnik (Literaturseite von Wir1!) `http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/LiteraturAktuell.html`

   (c) A4-Seite mit den persönlich wichtigsten 7 Punkten der eigenen Lerntechnik zusammenstellen und eine **Kopie abgeben**. Beginn 3. Woche.

(2) Rechner-Probleme lösen und falls noch nicht vorhanden beschaffen wie schon auf dem ersten Analysis-Übungsblatt erwähnt (Aufgabe: Sich damit zurecht finden, durchfragen u.s.w.):

   (a) Account (Schule)

   (b) Mathematik–Software–Zugang

   (c) Scripte u.s.w. (DOWNLOAD, WIR1)

   (d) Ein MATLAB–Kurs (wird zu einem wesentlichen Teil dann im Selbststudium erarbeitet). DOWNLOAD: Internet, Link-Seiten Wir1

   (e) Eigener Rechner, Software, Speicher, Internet lauffähig halten

   (f) Taschenrechner in Eigenverantwortuöng (an Prüfungen notwendig).

(3) Literatur und Schulunterlagen (Reglemente) wie schon auf dem ersten Analysis-Übungsblatt erwähnt :

(a) Schulreglemente beschaffen und studieren, Weisungen, Führer

(b) Literatur (Lehrbuch, Formeln) beschaffen nach Literaturliste Wir1

(4) Porte–Feuille wie schon auf dem ersten Analysis-Übungsblatt erwähnt (dient je nach Bedarf als zusätzlicher Leistungsnachweis. Dafür können nach Ankündigung auch Punkte verteilt werden, die eventuell dann eine Rundung ermöglichen). Was gehört ins Porte–Feuille (präsentierbare Sammlung der eigenen Arbeit, keine rohen Entwürfe)?

(a) Eigene Formelsammlung, Zusammenfassungen

(b) Eigene Planungen, Lerntechnik: Strategien, Prinzipien, Schemata, wichtige Dinge

(c) Übungen und Prüfungen mit Verbesserungen

(d) Mathematiksoftware–Arbeiten

(e) Eventuell Journal

Mögliche Abgabe von Übungen: Nach Reglement „Übungscheine"!
http://rowicus.ch/Wir/Administratives/Uebungsscheine.html

(5) (a) Notiere auf maximal einer A4–Seite (abzugeben in der 2. Woche): Wie ist meine Einstellung zur Mathematik? Mag ich sie hassen? Der eigene Standpunkt ist zu erläutern.

(b) Notiere auf maximal einer A4–Seite (abzugeben in der 2. Woche): Was erwarte ich von den Mathematikfächern in meinem Studium? Der Standpunkt ist zu formulieren.

(c) Der Dozent möchte die heutige Meinung mit der Meinung am Schlusse des Kurses im Sommer vergleichen.)

(Vgl. auch Skript v.B.+M. Seite 5, falls Skript vorhanden.)

(6) Orientiere dich im Wikipedia:
http://de.wikipedia.org/wiki/Hauptseite
(links unter „Suche" Begriff eingeben!)

Was bedeuten die Begriffe „Bit" und „Byte" und wieviele Arten von „Byts" gibt es? Ebenso betreffend „Digit", „Dualzahl", „Integer–Zahl" und „Gleitkomma–Dezimalzahl".

(7) Orientiere dich in der Literatur resp. im Internet (z.B. Wikipedia:)

(a) Was sind Skalare?

(b) Was sind Vektoren?

(8) Schritte in MATLAB oder Octave:

Probiere auch in einem Computerlabor der Schule die ersten Befehle aus dem Matlab–Octave–Kurzskript. Sammle damit Erfahrung.

Ein Code, der einmal funktioniert hat, findet sich teilweise auch in den Lösungen zu diesen Übungen — oder in
http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

Starte MATLAB auf und beginne mit dem Studium der Befehle nach dem Skript. Am Anfang geht das manchmal besser in Gruppen, da andere Gruppenmitglieder die richtigen Tasten manchmal sofort finden, welche man alleine viel zu lange suchen muss. Vielleicht hat auch schon jemand etwas Erfahrung. Wenn wirklich niemand in der Umgebung sofort weiter weiss, dann hole Hilfe beim Dozenten.

(9) Was verwendet MATLAB für ein Winkelmass? (Hinweis: Berechne mit MATLAB z.B. $sin(360^o)$, $sin(\frac{\pi}{2})$ u.s.w. .)

(10) Im MATLAB wird eine Gleitkommazahl durch 15 Digits (sowie der Dezimalpunkt dargestellt und vielleicht ein Vorzeichen).
In welchem Bereich liegen Integer–Zahlen, die durch maximal 2 Bytes (zu 8 Bits) darstellbar sind?

(11) Berechne 20 Binärziffern der Dezimalzahl 1.4 (Darstellung als Dualzahl).

(12) Fragen zum Nachdenken:

(a) Wie kann $\dfrac{1}{3}$ im MATLAB dargestellt werden?
(b) Wie kann π im MATLAB dargestellt werden?
(c) Welcher Dezimalzahl entpricht die Dualzahl 1001110.011?

(13) Berechne mit MATLAB $\sqrt{2}$. Wie genau wird es?

(14) In einem Computer gibt es immer eine grösste Zahl, die noch exakt eingegeben werden kann. In MATLAB ist das

$$realmax = 1.7976393134862316e + 308$$

(a) Versuche herauszufinden, was die Schreibweise $e + 308$ bedeutet! (Versuche mit kleineren Zahlen!)
(b) Berechne z.B. $b = realmax + 100000$. Was passiert?
(c) Berechne die Ausdrücke $realmax - (realmax - 1)$, $realmax \cdot \dfrac{1}{(realmax - 1)}$, $(\dfrac{realmax}{5}) \cdot 5$, $5 \cdot (\dfrac{realmax}{5})$ u.s.w.
(d) Berechne die Summen $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{10'000^2}$ sowie $\dfrac{1}{10'000^2} + \dfrac{1}{9'999^2} + \ldots + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{1^2} + 1$. Was stellt man fest?

(15) Es gilt: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \;\Rightarrow\; a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$.

Sei $a = \sqrt{987654}$, $b = \sqrt{987653}$. Berechne $a - b$ und $\dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$ und vergleiche. Was stellt man fest bezüglich Genauigkeit oder Rundung?

WIR1

2.4 Link zu den Lösungen Phase 1

Hinweis: Die Lösungen sind aus Praktikabilitätsgründen mit *Mathematica* produziert worden. In den bald 20 Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter

`http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html`.

Vorteil dieses Verfahrens: Die Files mit dem reinen *Mathematica*–Source-Code in lassen sich damit sehr klein halten. Daher sind sie sehr einfach über Internet transportierbar. Es entstehen keine grossen Download–Zeiten und die Kosten des Speicherplatzes bei einem Provider übersteigen die gesetzten Grenzen nicht, denn die entstehenden File–Sammlungen haben beschränkte Grösse. Die abgearbeiteten Files mit dem Output mit Postscript-Graphiken sind allgemein sehr „schwer", können aber jederzeit mit dem *Mathematica*–Programm aus dem Source-Code wieder erstellt werden. Dafür sind die mittels „Output beladenen Files" erzeugten PDF-Files wieder klein, was sie transportabel macht.
Für den auf den folgenden Seiten wiedergegebene Output (bei der Alternativausgabe mittels des unten angegebenen klickbaren URL's via Internet abrufbar) sind daher die Seiten unabhängig nummeriert.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

`http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg01.pdf`

Quellencode für Fachkundige:

`http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg01.nb`

Kapitel 3

Phase 2 (I/2)

3.1 Stoffprogramm Phase 2 ◇ E+M ◇

- ⊘ Skalare
- ⊘ Vektoren
  - Geometrische Definition, Repräsentant, Pfeilklasse, Länge, Betrag, Norm in Koordinatensystem
  - Addition
  - Multiplikation
  - Gesetze
  - Allgemeiner Vektorbegriff
  - Lineare Abhängigkeit: Kollinear, komplanar, linear abhängig, linear unabhängig, Linearkombination
  - Erzeugendensystem, Basis, Dimension eines Vektorraums (Anzahl Basisvektoren)
  - Eigenschaften einer Basis
- ⊘ Weiter mit MATLAB (siehe Übungen)

Arbeiten

Download Octave
http://rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage1.html#Freeware (Freeware)
Selbststudium nach eigenem Plan:
http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

- ⊘ Einführung in die Arbeit mit **MatLab** oder **Octave**:
  - http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/FileList.html ⇒ Neue Versionen der Files sichten, schauen was die Befehle machen. (Achtung: Das Skript „Einführungskurs“ ist neu organisiert: PDF-Version für Print, HTM-Version für Links im Text, RTF-Files für copy-paste in Matlab.)

⊘ **Selbststudium:** MatLab

3.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 02 ◇

---

(1) (a) Berechne mit MatLab Ausdrücke wie $0.42 - 0.5 + 0.08$ und $0.08 + 0.42 - 0.5$.

(b) Gegeben ist die Gleichung $x = x - \frac{x-1}{1000}$.

Zur Untersuchung soll $a = 1.000'000'000'000'000'1$ gesetzt werden und $b = a - \frac{a-1}{1000}$.
Berechne auch $b - a$. Schalte auf *format long* und schaue, was dann passiert.

(c) Untersuche, welche Rechenoperationen bei MatLab zu Fehlern führen: Multiplikation mit oder Division durch eine grosse Zahl. Multiplikation mit oder Division durch eine kleine Zahl.

(d) Nach n Jahren beträgt ein Kapital $1'000'000 * (1 + 0.05)^n$. Bis zu welchem n kann man diese Formel mit MatLab auswerten?

(e) *eps* ist die kleinste Zahl, die MatLab darstellen kann. Berechne $\frac{eps}{2}$ und $\frac{eps}{2} + 1$.

(2) (a) Berechne mit MatLab die Dezimalbruchdarstellung von $\frac{11}{3}$

(b) Berechne mit MatLab die binäre Gleitkommadarstellung von $\frac{11}{3}$

(3) Schreibe in einer frei gewählten Programmiersprache ein Programm, welches versuchen kann herauszufinden, welches die grösste Zahl ist, die in dieser Sprache darstellbar ist.

(4) Rufe möglichst aus deiner Erinnerung folgende Begriffe und Regeln ab:

(a) Skalar

(b) Geometrischer Vektor

(c) Abesche Gruppe

(d) Gesetze der Vektoraddition

(e) Gesetze Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

(f) Vektorraum

(g) Unterraum

(h) Linear abhängig Linear unabhängig

(5) Berechne die Unbekannte von Hand:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \ 7\,(\vec{a} - 3\,\vec{b}) + 2\,(\vec{c} - 3\,\vec{x}) - 4\,\vec{d} = 3\,(\vec{a} + 3\,\vec{d}) - 2\,(\vec{c} + 5\,\vec{x} + 3\,\vec{c})$$

WIR1

3.3 Link zu den Lösungen Phase 2

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg02.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg02.nb

Kapitel 4

Phase 3 (I/3)

4.1 Stoffprogramm Phase 3 ◇ E+M ◇

⊘ Weiter mit Vektoren

⊘
- – Koordinatensystem, Vektoren in Koordinatensystemen, Spaltenvektoren, Transponierte
- – Gleichheit von Vektoren
- – Einheitsvektoren
- – In Polarkoordinaten
- – Rechengesetze in Koordinatensystemen
- – Basiswechsel, Länge
- – Beispiele

⊘ Skalarprodukt

- – Motivation: Arbeit
- – Definition

⊘ Gesetze ==¿ **Selbststudium:** Skalarprodukt, Gesetze und Anwendungen

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

4.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M I / 3 ◇

A. Verwende für die nachfolgenden Berechnungen einen beliebigen Taschenrechner freier Wahl oder ein beliebiges Computeralgebra–Programm (**CAS** $\rightsquigarrow$ **Computer–Algebra–System**).

(1) Gegeben sind im 5 - dimensionalen Raum die Punke $P_1(3,5,6,9,2)$ und $P_2(-1,3,4,2,8)$. Berechne die Länge des Vektors von P_1 zu P_2 sowie die Länge der Projektion des Vektors in den Unterraum mit den ersten 3 Koordinaten . Was passiert allgemein mit der Länge eines Vektors bei der Projektion in einen Unterraum?

(2) Gegeben ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3\\5\\6\\9\\2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1\\3\\4\\2\\8 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -3\\-3\\-2\\-2\\-1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1\\2\\4\\6\\7 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $4\,\vec{a} - 3\,\vec{b} + 5\,\vec{c}$.

(b) Löse die Gleichungen $4\,\vec{a} + 2\,(\vec{x} - \vec{b}) + 5\,\vec{c} = \vec{d} + 8\,\vec{b}$.

(3) (a) $\vec{v}$ ist als Ortsvektor gegeben durch die Koordinaten $(-2,0,4,6,8)$, $\vec{a_1}$ durch $(-1,3,4,2,8)$, $\vec{a_2}$ durch $(-3,-3,-2,-2,-1)$, $\vec{a_3}$ durch $(-3,-3,-2,-2,-1)$, $\vec{a_4}$ durch $(1,2,4,6,7)$ und $\vec{a_5}$ durch $(4,2,4,6,7)$. Drücke $\vec{v}$ in der „Basis“ $\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4},\vec{a_5}\}$ aus.

(b) $\vec{v}$ ist als Ortsvektor gegeben durch die Koordinaten $(-2,0,4,6,8)$, $\vec{b_1}$ durch $(3,5,6,9,2)$, $\vec{b_2}$ durch $(-1,3,4,2,8)$, $\vec{b_3}$ durch $(-3,-3,-2,-2,-1)$, $\vec{b_4}$ durch $(1,2,4,6,7)$ und $\vec{b_5}$ durch $(4,2,4,6,7)$. Drücke $\vec{v}$ in der „Basis“ $\{\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3},\vec{b_4},\vec{b_5}\}$ aus.

(4) (a) Seien $(-4,10,24,31,43)$ die Koordinaten eines Ortsvektors $\vec{w}$. Ist $\vec{w}$ linear abhängig von $\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4},\vec{a_5}\}$? ($\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4},\vec{a_5}\}$ wie oben in der vorhergehenden Aufgabe.)

(b) Seien $(-4,10,24,31,43)$ die Koordinaten eines Ortsvektors $\vec{w}$. Ist $\vec{w}$ linear abhängig von $\{\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3},\vec{b_4},\vec{b_5}\}$? ($\{\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3},\vec{b_4},\vec{b_5}\}$ wie oben in der vorhergehenden Aufgabe.)

(c) Seien $(4,-10,-24,31,43)$ die Koordinaten eines Ortsvektors $\vec{w}$. Ist $\vec{w}$ linear abhängig von $\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4},\vec{a_5}\}$? ($\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4},\vec{a_5}\}$ wie oben in der vorhergehenden Aufgabe.)

(d) Seien $(4,-10,-24,31,43)$ die Koordinaten eines Ortsvektors $\vec{w}$. Ist $\vec{w}$ linear abhängig von $\{\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3},\vec{b_4},\vec{b_5}\}$? ($\{\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3},\vec{b_4},\vec{b_5}\}$ wie oben in der vorhergehenden Aufgabe.)

(5) Der Ortsvektor von $\vec{a}$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$, derjenige von $\vec{b}(n)$ durch $\begin{pmatrix} (\frac{n}{2})\\(\frac{2}{n})\\(\frac{3}{n^2}) \end{pmatrix}$ resp. $\vec{b}(n) = (\frac{n}{2},\frac{2}{n},\frac{3}{n^2})^T$. Berechne die Summe

$$\vec{a} + \sum_{n=1}^{100}(-1)^n\,\vec{b}(n) = \vec{a} - \vec{b}(1) + \vec{b}(2) - \vec{b}(3) + \ldots - \ldots + \vec{b}(100).$$

%

B. Verwende für die nachfolgenden Aufgaben **MATLAB** oder **Octave**:

(1) Folgende Befehle sollen der Reihe nach eingegeben werden:

$x = [1\ 3\ 2];$
$y = [2\ 4];$
$z = [2 * x\ 1./y];$

Wie lauten die ausgegebenen Komponenten des „Vektors“ z?

(2) Gib folgende Anweisungen ein: a = 0:14 und b = [1:7 8 7:-1:1]. Überlege, welche Bildschirmausgaben durch die nachfolgenden Befehle erzeugt werden und kontrolliere die die Befehle mit Hilfe des Programms nach:

```
a) b                b) a+b            c) a.*b           d)  [a,b]
e) mean(b)          f) plot(a,b)      g) plot(b,a,'+')  h)  min([a b])
i) plot(a,b.^2)     j) a(a>8)         k) b(b<6)         l)  size(a.')
```

(3) (a) Versuche die Wirkungsweise der folgenden Befehle vorherzusagen und teste diese darauf mit dem Programm: 1:10-1, 1:(10-1) sowie (1:10-1) .

(b) Gehe mit den folgenden Befehlen genauso vor wie in der letzten Aufgabe beschrieben:

```
v = [3:3:10, 12:-2:5]; w = v(v<=9)
```

(4) Generiere mit x = rand(1,50) 50 gleichverteilte Pseudo–Zufallszahlen. (Diese liegen zwischen 0 und 1 und werden im Zeilenvektor x gespeichert.)

(a) Stelle die Zahlen dieses Vektors in einem Histogramm dar. Benutze dazu den Befehl hist(x,m), mit dem m Balken mit den Werten von x erzeugt werden. Finde mit Hilfe des Befehls help hist heraus, wie man die Farben im Histogramm anpassen könnte.

(b) Finde heraus was passiert, wenn der Befehl u = hist(x,8); sowie u eingegeben wird.

(5) Sei x z.B. der Vektor von vorhin. Erkunde mit Hilfe des Programms, was die Befehle diff(x), prod(x), std(x) und median(x) bewirken.

(6) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = e^{\frac{-x}{10}}$, $g(x) = \sin(x^2)$. Verwende z.B. die Funktion help um folgende Probleme zu lösen.

(a) Erstelle einen Plot der beiden Graphen im selben Fenster über dem Bereich $0 \leq x \leq 15$. Der Graph von f soll dabei rot, derjenige von g blau erscheinen. Die Strichdicken der Graphen sollen verschieden sein. Und auch dein Name soll im Fenstertitel erscheinen. . .

(b) Bestimme mit Hilfe des Programms das Maximum von f im Intervall $[0, 15]$.
Hinweis: Verwende den Befehl [m,i] = max(y) . Dieser Befehl speichert in m den maximalen Wert des Vektors y und in i den Index des grössten Werts. %

(c) Hebe den eben bestimmten Maximalwert in der Graphik durch einen gut sichtbaren gelben Punkt hervor.

(d) Speichere die Graphik in einem Graphikprogramm sowie in einem Textverarbeitungsprogramm ab. Fixiere die Graphikgrösse auf $6.5\,cm \times 5.5\,cm$.

(7) Konstruiere eine Funktion namens *einh*, welche zu einem gegebenen Vektor $\vec{v}$ den Einheitsvektor $\vec{e}_v$ berechnet. Teste die Funktion an eigenen Beispielen.

(8) (a) Konstruiere eine Funktion namens clearMax(x), welche aus einem Vektor x alle grössten Werte wegstreicht.

(b) Teste die eben definierte Funktion an eigenen Beispielen.

(c) Gegeben sei der Vektor x. Was bewirkt wohl der Befehl clearMax(clearMax(x))? Teste die Funktion an eigenen Beispielen.

(9) Ohne Lösung. Der Weg ist selbst zu finden:

Sind diese Vektoren l.u. oder l.a.? *(Hinweis: Homogenes Gleichungssystem.)*

(a) $$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

(b) $$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(c) $$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

4.3 Link zu den Lösungen Phase 3

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg03.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg03.nb

Kapitel 5

Phase 4 (I/4)

5.1 Stoffprogramm Phase 4 ◇ E+M ◇

- ⊘ Skalarprodukt
  - Gesetze, Regeln
  - Anwendungen: Z.B. Test auf Rechtwinkligkeit, Cosinussatz, Richtungscosinus(e), Drehung eines Vektors
  - Anwendungen auf lineare Gebilde
- ⊘ Geraden- und Ebenengleichungen
  - Parametergleichungen
  - Koordinatengleichungen (Spezialfall: Funktionsgleichung der Geraden)
  - Umwandlungen ineinander
  - Koordinatengleichung und Normalenvektor
  - Koordinatengleichung und Distanz vom Ursprung
  - Winkel zwischen Geraden oder Ebenen (Winkel zwischen Normalenvektoren)
  - Hess'sche Normalform
  - Abstand eines Punktes von einer Geraden oder Ebenen
- ⊘ **Selbststudium:** Nicht besprochene Anwendungen nach Skript

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

5.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 04 ◇

A. Vektorrechnung

(1) Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Skalarprodukt!).

(2) Untersuche mit Hilfe des Skalarprodukts, ob bei einem Würfel die Raumdiagonalen senkrecht aufeinander stehen.

(3) Bestimme k so, dass die Vektoren $\vec{a} = (3, k, 2)^T$ und $\vec{b} = (-2, 4, 3\,k)^T$ senkrecht aufeinander stehen.

(4) Bestimme k so, dass die Geraden $4\,x + k\,y - 2 = 0$ und $-4\,x + 5\,y + 6 = 0$ senkrecht aufeinander stehen.

(5) Bestimme k und s so, dass der Punkt $P_0(-3, k, s)$ auf der Geraden g liegt:

$$g: \ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(6) Berechne den Abstand des Punktes $Q_0(-3, 2, 5)$ von der Ebene Φ:

$$\Phi: \ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(7) Spiegle den Punkt $Q_0(-3, 2-, 5)$ an der Ebene $\Phi: \ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(8) Drehe den Ortsvektor von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ um den Winkel $\varphi = -\dfrac{\pi}{5}$ um den Ursprung

%

B. Schritte in MatLab oder Octave

Gib nacheinander die unten aufgelisteten Befehle ein und studiere anhand des Outputs, was sie bewirken:

(1) Manipulation von Vektoren: Elemente anfügen, Elemente auswählen, Elemente anders einfügen u.s.w.

(a) u1=[1 2 3 4 5]

(b) size(u1)

(c) size(u1,2)

(d) u1(5)

(e) u1=[3,6,7,9,3]

(f) u1(size(u1,2))

(g) u1(1)

(h) u1(2)

(2) Beispiel einer Funktion:

Erst Funktion definieren, die eine Serie von Flächenprodukten rechnet. Die Koordinaten verschiedener Punkte in der Ebene sind durch zwei Vektoren gegeben. Nachfolgend ist eine Sequenz gegeben, die erst nach endfunction ausgeführt wird:

```
function
z=flaechePolygon(x,y)

z=dot([0 x],[y y(1)])-dot([x x(1)],[0 y])
endfunction
```

(3) Vektoren mit x- und y-Koordinaten definieren:

```
x=[1 2 3 4 5]
y=[6 7 8 9 0]
```

(4) Funktion anwenden

```
flaechePolygon(x,y)
z = -30
```

(5) x-Vektor anders definieren:

```
x=[1 3 4 7 8]
```

(6) Funktion anwenden:

flaechePolygon(x,y) z = -59

(7) Aufsummieren von Teillängen (Quadratwurzeln), die aus zwei Vektoren gewonnen werden (alle x- und y-Werte von Punkten der Ebene als zwei Vektoren)

Erst Funktion **diff** und Operationen auf dieser Funktion studieren:

diff(x)

(8) diff(x).^2

(9) diff(y).^2

(10) diff(x).^2+diff(y).^2

(11) sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2)

(12) Funktion **sum** studieren und damit eine Summen von Teillängen nach Pythagoras berechnen:

sum([1 2 3])

(13) sum(sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2))

5.3 Link zu den Lösungen Phase 4

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg04.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg04.nb

Kapitel 6

Phase 5 (I/5)

6.1 Stoffprogramm Phase 5 ◇ E+M ◇

- ⊘ Flächenprodukt
  - Motivation, Definition
  - Regeln
  - Anwendungen, z.B. Cramersche Regeln (Determinantenmethode)
- ⊘ Vektorprodukt
  - Motivation, Definition
  - Regeln
  - Anwendungen, z.B. Berechnung der Koordinatengleichung (3D) aus einem Stützpunkt und zwei Richtungsvektoren
- ⊘ **Selbststudium:** Nicht besprochene Anwendungen nach Skript sowie Ausblick (Spatprodukt, Anwendungen und weitere Produkte).

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

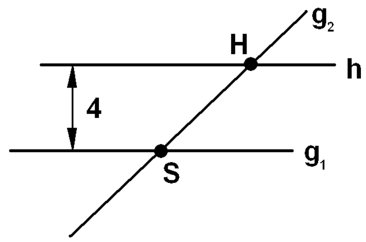
6.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 05 ◇

A: Vektorrechnung

(1) $g_1 : \ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$g_2 : \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

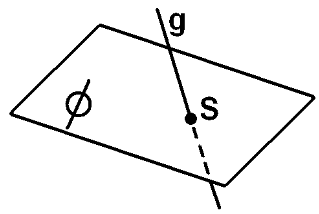
$h = ?$ $\qquad S = ?$ $\qquad H = ?$



(2) (a) $g : \ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

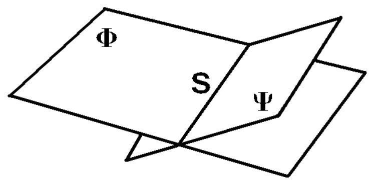
$\Phi : \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$S = ?$



(b) $\Psi : \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

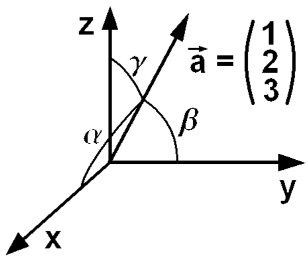
Spurpunkt von S in der Grundebene?



(3)

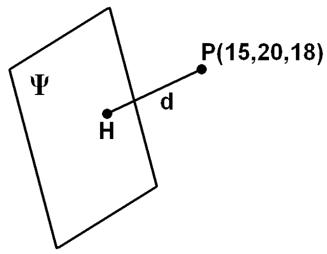
(a) $\alpha = ?$ $\qquad \beta = ?$ $\qquad \gamma = ?$

(b) Drehe $\vec{a}$ in $+$–Richtung um $\dfrac{\pi}{7}$ um die z–Achse $\leadsto$ $\vec{a}\,' = ?$



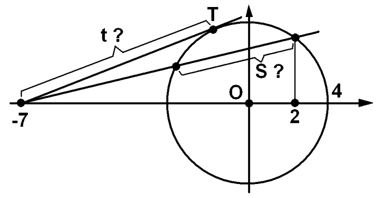
(4) $\Psi: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = ? \qquad H = ?$



(5)

$t = ? \qquad s = ?$

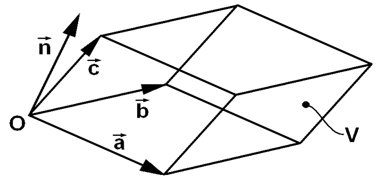


(6)

$$\left| \begin{array}{rcl} 3\,x + 4\,y & = & 7 \\ 2\,x - 3\,y & = & 5 \end{array} \right|$$

(7) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

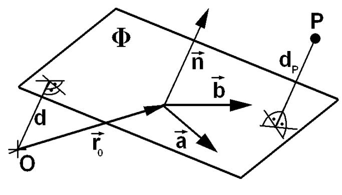
$\vec{a} \times \vec{b} = ? \qquad V = ?$



(8) $P = P(17, 18, 19)$,

$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

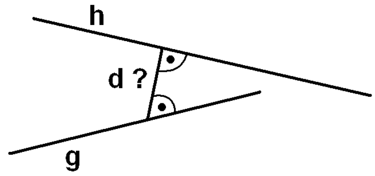
$d = ? \qquad d_P = ?$



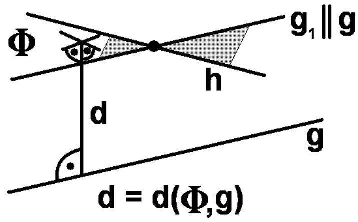
(9) $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$h:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = ?$



Idee:



B: Erste Grosse Repetition und Aufarbeitung der MATLAB-Grundlagen

Arbeite nach dem Skript
http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.htm resp.
http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf
den bisherigen MATLAB–Stoff auf. **Ziel:** Klarheit erreichen über este Anwendungen der hier besprochenen Befehle. Diese Aufarbeitung betrifft folgende Kapitel

Kap. 1 Grundlagen MATLAB /Octave, „who ist who?“ (Matlab_Octave001.RTF)

Kap. 2 Etwas herumspielen mit Octave / MATLAB (Matlab_Octave002.RTF)

(a) Help, simple Arithmetik
(b) Simple Arithmetik
(c) Arbeiten mit Funktionen
(d) Spiele etwas mit MATLAB
(e) Arbeiten mit Variablen und Befehlsketten
(f) Speichern und laden
(g) Etwas spielen mit Plots und Funktionen (Beispiele)

Kap. 3 Grundkenntnisse: Arithmetik, Funktionen, Formate, Loops, Fehler, löschen,.... (Matlab_Octave003.RTF)

(a) Zahlenformate
(b) Schlaufen
(c) Arithmetische Operationen, Wurzel, Fehler, kleinste Zahl

(d) Clear, beep, who

(e) Einige Funktionen und Konstanten: exp, log, e, floor, round, rem, sign

(f) Vektoren, Skalarprodukt, Vektorprodukt

(g) (Imaginäre Einheit, real, imag, conj)

Kap. 4 Komposition von Vektoren, Kenngrössen (Matlab_Octave004.RTF) (Vektoren sind hier Arrays resp. Listen)

(a) Sequenzen mit Vektoren: Elementextraktion, Transponierte, Vektorenerzeugung

(b) Probiere die folgenden Sequenzen mit Vektoren am Computer aus

Kap. 5 Vektoroperationen, diskrete Plots (Matlab_Octave005.RTF)

(a) length, size, sum.. 18

(b) Addition einer Konstante, Addition von Vektoren, Operationen komponentenweise ausführen

(c) Sortieren, Maximum, Minimum, Mittelwert

(d) Elemente finden unter gesetzten Bedingungen, rechnen unter Bedingungen.

(e) Plots

Kap. 6 Plots (Matlab_Octave006.RTF)

(a) Probiere die folgenden verschiedenartigen Plots aus!

(b) Gitter, Plots übereinanderlegen, Labels, Unterfenster

(c) Graphikfenster löschen, leeres Fenster öffnen, Plot speichern

(d) Ploteigenschaften anzeigen und ändern, Graphik drucken

Der im Skript verbleibende Rest wird später bearbeitet.

6.3 Link zu den Lösungen Phase 5

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg05.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg05.nb

Kapitel 7

Phase 6 (I/6)

7.1 Stoffprogramm Phase 6 ◇ E+M ◇

- ⊘ Spatprodukt
  - Motivation, Definition
  - Eigenschaften, Regeln, Sarrus
  - Anwendungen, z.B. Cramersche Regeln (Determinantenmethode)
  - Anwendung auf Abstandsberechnungen (Abstand Punkt von Ebene. . .)
  - Beispiele, Übungen
- ⊘ Weitere Produkte: Grassmannprodukt, Viererprodukte
- ⊘ Kreis- und Kugelgleichungen
- ⊘ Gleichungen der Tangente oder der Tangentialebene
  - Beispiele, Übungen
- ⊘ **Selbststudium:** Nicht besprochene Anwendungen nach Skript sowie Ausblick (Apolloniuskreis, Kegelschnitte, Potenz, Potenzgerade, Polare, Anwendungen, z.B. Sehnensatz, Sekanten–Tangentensatz, Kegel, Zylinder u.s.w.).

Arbeiten

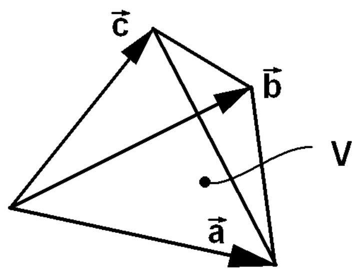
http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

7.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 06 ◇

A: Vektorrechnung

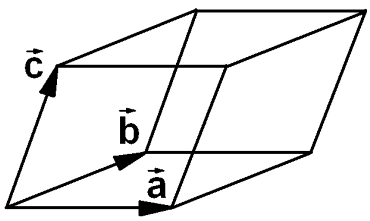
Kap. 1 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$V = ?$



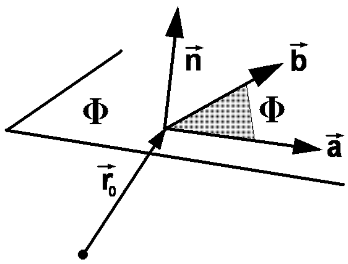
Kap. 2 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ z \end{pmatrix}$

$V(z) = 50, \ \ z = ?$



Kap. 3 $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = ? \qquad \vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = ?$

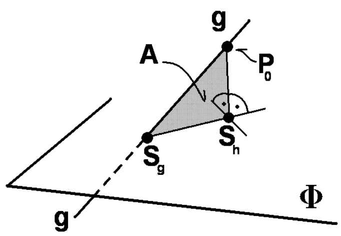


Kap. 4 $\Phi \ : \ H(\vec{r}) = A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$
$\rightsquigarrow \ D = ?$

$S_g = g \cap \Phi, \ \ P_0 = P_0(5, 1, 6), \ \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$g \ : \ \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{c}, \ \ \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$

$A = ? \qquad (\Delta S_g S_h P_0)$



B: Arbeit mit MATLAB oder Octave (oder mit einem andern Tool, falls das Ziel so nicht erreicht werden kann)

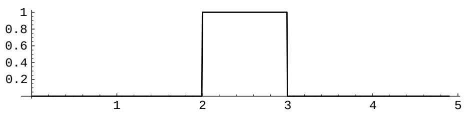
Zeiche mit dem Computer die folgenden Funktionen:

Kap. 1

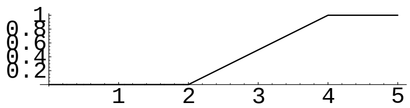
$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < 3 \\ 0 & 3 \leq x \end{cases}$$

Kap. 2

$$g(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{2}x - 2 & 2 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x \end{cases}$$



(Problem 1)



(Problem 2)

Hinweis: Informationen über die Komposition „eckiger Funktionen“ findest du im folgenden Skript (Grundschritte in den Zoo der Funktionen, d):

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/FktZoo.pdf

Kap. 3 Versuche, mit MATLAB oder Octave die unten angegebenen Matrixen darzustellen. Die Befehle sind wie unten aufgeführt einzugeben. Finde so weit wie möglich heraus, was dabei gerechnet wird. Benütze dazu z.B. Wikipedia.

(a) eye(4) $\rightsquigarrow$ (Einheits-Matrix E, suche die Erklärung im Wikipedia)
(b) hadamard(4) $\rightsquigarrow$ (Hadamard–Matrix, suche die Erklärung im Wikipedia)
(c) hilb(3) $\rightsquigarrow$ (Hilbert–Matrix, suche die Erklärung im Wikipedia)
(d) hilb(4) $\rightsquigarrow$ (Hilbert–Matrix)
(e) magic(3) $\rightsquigarrow$ (Magic–Matrix, z.B. A = [1 2 3 ; 4 5 6; 7 2 9]) oder
(f) magic(4) $\rightsquigarrow$ ...
(g) ones(4,3) $\rightsquigarrow$ (Matrix mit 1 in den Zellen)
(h) pascal(4) $\rightsquigarrow$ (Pascal–Matrix, suche die Erklärung im Wikipedia)
(i) rand(4,5) $\rightsquigarrow$ (Pseudo–Zufallsmatrix, suche die Erklärung im Wikipedia)
(j) vander([1 2 3 4]) $\rightsquigarrow$ (Vandermonde–Matrix, suche die Erklärung im Wikipedia)
(k) vander(6) $\rightsquigarrow$ (Vandermonde–Matrix — ist das Ergebnis sinnvoll?)
(l) vander(4) $\rightsquigarrow$ (Vandermonde–Matrix — ist das Ergebnis sinnvoll?)

7.3 Link zu den Lösungen Phase 6

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg06.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg06.nb

Kapitel 8

Phase 7 (I/7)

8.1 Stoffprogramm Phase 7 ◇ E+M ◇

⊘ Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

- Schreiben einer linearen Gleichung mit Hilfe des Skalarprodukts
- Homogene und inhomogene Gleichung
- Homogene Erweiterung durch Erhöhung der Dimension
- System von linearen Gleichungen: Systemlösung = Schnittmenge der Lösungen der Einzelgleichungen
- Elementarsubstitutionen: Lösung des Systems bleibt erhalten (Abtausch von Gleichungen, Multiplikation mit Skalar, Ersatz einer Gleichung durch die Summe mit einer anderen. . .)
- Verhältnis von homogenen und inhomogenen Lösungen: Homogene Lösungen bilden einen Vektorraum. Nur Basislösungen suchen. Inhomogene Lösungsmenge = homogene Lösungsmenge + partikuläre inhomogene Lösung $\Rightarrow$ lineare Mannigfaltigkeit
- Übungen

⊘ **Selbststudium:** Nicht besprochene Anwendungen nach Skript.

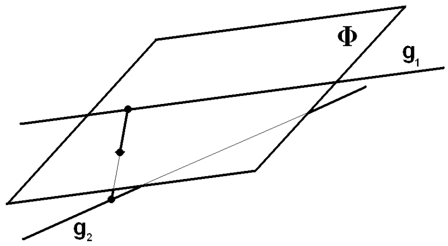
Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

8.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 07 ◇

A: Vektorrechnung

Kap. 1 $\Phi =$ Mittelebene
$(\Phi \| g_1,\ \ \Phi \| g_2)$



$$g_1\ : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g_2\ : \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

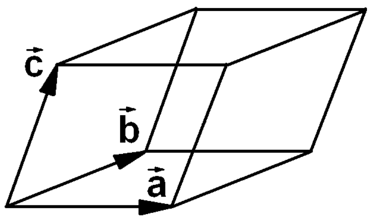
$$\Phi\ :\ A\,x + B\,y + C\,z + D = 0, \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \vec{e}_n$$

$A, B, C, D = ?$

Kap. 2 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 4 \end{pmatrix}$

$V = 100$

$y = ?$



Kap. 3 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{d_1} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = ?$
$\vec{d_2} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = ?$
$\vec{d_1} \times \vec{d_2} = ?$

Kap. 4
$$\left| \begin{array}{lcl} 4\,x - 2\,y + 3\,z - 5 & = & 0 \\ 8\,x - 2\,y + 4\,z - 6 & = & 0 \\ 9\,x + \alpha\,y + \beta\,z + 4 & = & 0 \end{array} \right|$$

(Mit Cramer lösen!)

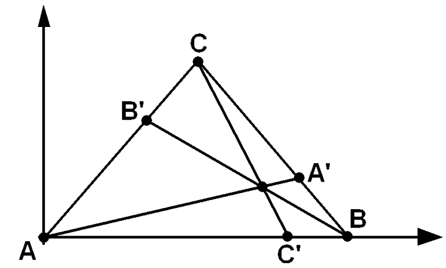
$x(\alpha, \beta) = ?$
$y(\alpha, \beta) = ?$
$z(\alpha, \beta) = ?$

Repetitionsaufgaben:

Kap. 5
$$\begin{array}{lcl} \vec{a} & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{b} & = & \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{c} & = & \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + 4\,\vec{e}_3 \end{array}$$

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \rightsquigarrow$ Basis?
Basiswechsel:
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = ?$

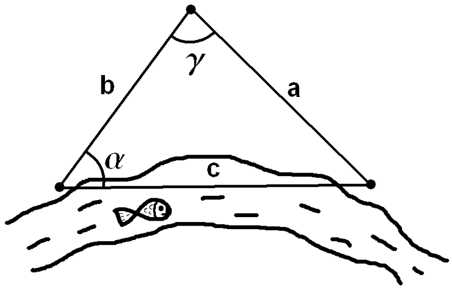
Kap. 6



Gegeben:
$B = B(8/0),\ \ C = C(5/6),$
$\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AC}\ ,\ \ \ \overrightarrow{BA'} = \frac{2}{5}\ \overrightarrow{BC}$

$\leadsto\ C' = ?$

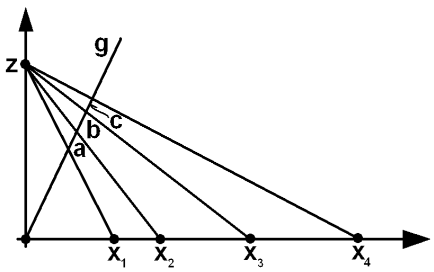
Kap. 7



Gegeben:
$a = 67.54\,m,\ \ b = 59.18\,m$
$\gamma = 98^o\,12'\,14''$

$\leadsto\ \ c = ?,\ \ \alpha = ?$

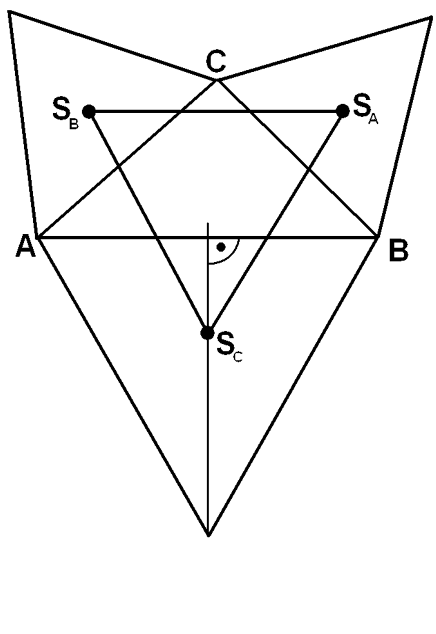
Kap. 8



Gegeben:
$Z = Z(0/12),\ \ a : b = 1$
$x_1 = 6,\ \ x_2 = 10,\ \ x_3 = 16,\ \ x_4 = 25$

(a) $c : b = ?$
(b) Ist es möglich, eine Gerade g so zu legen, dass $a = b = c$ gilt?

Kap. 9



Gegeben:
$A = A(1/1),\ \ B = B(10/4)$
$C = C(5/9) \leadsto\ \ \triangle ABC$

Über $a,\ b,\ c$ werden die gleichseitigen $\triangle$ errichtet $\leadsto$ Schwerpunkte $S_A,\ S_B,\ S_C$.

(a) Berechne $S_A,\ S_B,\ S_C$

(b) Berechne $|\overline{S_AS_B}|,\ \ |\overline{S_BS_C}|,\ \ |\overline{S_CS_A}|$

B: Arbeit mit MATLAB oder Octave (oder mit einem andern Tool, falls das Ziel so nicht erreicht werden kann)

Bau einer Matrix mittels Vektoren, Gauss-Algorithmus:

Kap. 1 Eingabe von Vektoren in MATLAB oder Octave:

a1=[0 0 0 -1 1 0 0 0 0 (50+1)]

a2=[0 -1 1 -1 0 0 0 0 0 20]

a3=[-1 1 0 0 0 0 0 0 0 (50-10)]

a4=[0 0 0 0 1 1 0 0 0 50+56]

a5=[0 0 1 0 0 1 -1 -1 0 0]

a6=[-1 0 0 0 0 0 1 0 -1 100]

a7=[0 0 0 0 0 0 0 1 1 10+5]

Kap. 2 Konstruktion einer Matrix mittels der Vektoren:

m=[a1;a2;a3;a4;a5;a6;a7]

Kap. 3 Was machr der folgende Befehl mit der Matrix? (Denke an den Gauss–Algorithmus!)

rref(m)

Kap. 4 Transponieren m, um besser lesen zu können!

Kap. 5 Vergleiche allenfalls das vorgehen mit den Möglichkeiten von CAS.

WIR

8.3 Link zu den Lösungen Phase 7

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg07.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg07.nb

Kapitel 9

Phase 7 (I/8)

9.1 Stoffprogramm Phase 8 ◇ E+M ◇

⊘ Lineare Gleichungssysteme

- Matrizen, Matrixschreibweise
- Matrizentypen
- Gauss-Jordan-Algorithmus
- Beispiele
- Ungelöste Probleme: Besprechen von Lösungen
- Beispiele zum Gauss-Algorithmus:
  * Keine Lösung
  * Genau eine Lösung
  * Unendlich viele Lösungen (geometrische Struktur)
  * Rang der Matrix
- Zeilenrang uns Spaltenrang
- Ordnung, Dimension,
- Satz zu Ordnung, Rang und Dimension
- Beispiele
- Zeilenmatrix, Spaltenmatrix
- Allgemeine Matrix und transponierte Matrix
- Regeln zur Transponierten
- Matrixaddition
- Beispiele
- Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar
- Beispiele

  - Regeln für die Matrixaddition und die Multiplikation mit einem
  - Skalar
  - Beispiele
  - Matrixprodukt
  - Regeln zum Matrixprodukt
  - Schreiben eines Gleichungssystems mit Hilfe des Matrixprodukts
  - Gleichungssysteme und Matrixaddition
  - Gleichungssysteme und Multiplikation von Matrizen

⊘ **Testvorbereitung:** Studium des bisherigen Stoffs.

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

9.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 08 ◇

A. Ehemaliger Test:

Test ◇ E+M1 Algebra 01 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. („Exakt“ heisst „ohne Dezimalbrüche“ im Resultat.) Wichtig: Immer eine Skizze. Alle Teilaufgaben geben gleichviele Punkte.

Kap. 1 Gegeben sind die Punkte $O(0,0), A(4,3), B(6,5)$ und $C(2,8)$. Berechne die Flächeninhalte (Flächenprodukte) von $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ und $\triangle OCA$ sowie deren Summe unter Beibehaltung des Vorzeichens. Was stellt man fest?

Kap. 2 Die Resultierende von zwei Kräften $\vec{F_1}$ von 1 N mit Richtung $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{F_2}$ von 1 N mit Richtung $\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ soll in drei Komponenten zerlegt werden, die parallell zu den Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind. Berechne die Länge der Zerlegungskomponente in Richtung $\vec{a}$.

Kap. 3 Gegeben sind vier Punkte A, B, C und D durch
$\overrightarrow{OA}= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD}= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne das Volumen des Tetraeders $ABCD$.

(b) Berechne den Inhalt der Oberfläche des Tetraeders $ABCD$.

(c) Berechne bei B den Winkel $\angle(ABC)$.

Kap. 4 Gegeben ist in Dreieck $\triangle ABC$ mit $A(4,5,-6)$, $B(6,2,-5)$, $C(2,16,1)$.

(a) Kann man einen Punkt X auf der Seite $\overline{BC}$ derart finden, dass $\overline{BC}$ rechtwinklig auf $\overline{AX}$ steht? Wenn ja, so ist dieser Punkt X zu berechnen.

(b) Dann ist zu entscheiden, ob X zwischen B und C oder ausserhalb der Strecke liegt resp. mit einer Ecke zusammentrifft. %

(c) Wenn man durch A und X eine Gerade legt, so durchstösst diese irgendwo die (x, y)–Ebene (Grundebene) oder ist parallel zu dieser. Im letzten Fall vereinbaren wir, dass die Gerade die Ebene „im Unendlichen“ durchstösst. Man berechne den Durchstosspunkt.

B: Arbeit mit MATLAB oder Octave (oder mit einem andern Tool, falls das Ziel so nicht erreicht werden kann)

Kap. 1 Selbststudium: Suche und studiere Matlabbefehle, die zum behandelten Stoff dieser Woche passen. Verwende dazu Matlabskripte deiner Wahl.

9.3 Link zu den Lösungen Phase 8

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg08.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg08.nb

Kapitel 10

Phase 9 (I/9)

10.1 Stoffprogramm Phase 9 ◇ E+M ◇

- ⊘ Beispiele, Übungen
- ⊘ Test
- ⊘ **Testvorbereitung:** Studium des bisherigen Stoffs

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

10.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 09 ◇

A. Aufgaben zu Gauss-Jordan:

Kap. 1

$$\left|\begin{array}{rcl} 1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z & = & 1\\ 0\cdot x+1\cdot y+1\cdot z & = & 1\\ 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z & = & 1 \end{array}\right|$$

(a) $\Rightarrow\ \mathbb{L} = ?$

$$\left|\begin{array}{rcl} 1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z & = & 1\\ 1\cdot x+2\cdot y+3\cdot z & = & 1\\ 1\cdot x+4\cdot y+9\cdot z & = & 1 \end{array}\right|$$

(b) $\Rightarrow\ \mathbb{L} = ?$

Kap. 2

$$\left|\begin{array}{ccc} \lambda\cdot x-5\,x+6\,z+7\,w & = & 8\\ 4\,x-8\,y+9\,z+w & = & 1\\ x+y-z+w & = & 0 \end{array}\right|$$

(a) $\lambda = 3\ \Rightarrow\ \mathbb{L} = ?$

(b) $\mathbb{L} = \{\}\ \Rightarrow\ \lambda = ?$

(c) $\mathbb{L}$ =Ebene $\Rightarrow\ \lambda = ?$

Kap. 3

$$\left|\begin{array}{ccc} x+y+z+w & = & 1\\ x+2\,y+3\,z+4\,w & = & 2\\ x+4\,y+9\,z+16\,w & = & 3\\ x+8\,y+27\,z+64\,w & = & 4 \end{array}\right|$$

$\mathbb{L} = ?$ (Gauss-Jordan!)

Kap. 4

$$\left|\begin{array}{ccc} x+y+z+w & = & 1\\ x+2\,y+3\,z+4\,w & = & 2\\ 2\,x+3\,y+4\,z+5\,w & = & 3\\ 0\,x+1\,y+2\,z+3\,w & = & 1 \end{array}\right|$$

$\mathbb{L} = ?$

Kap. 5

$$\left|\begin{array}{ccc} x+y+z+w & = & 1\\ x+2\,y+3\,z+4\,w & = & 2\\ 2\,x+3\,y+4\,z+5\,w & = & 1\\ 0\,x+1\,y+2\,z+3\,w & = & 3 \end{array}\right|$$

$\mathbb{L} = ?$

B: Arbeit mit MATLAB oder Octave (oder mit einem andern Tool, falls das Ziel so nicht erreicht werden kann)

Kap. 1 Selbststudium: Suche und studiere Matlabbefehle, die zum behandelten Stoff dieser Woche passen. Verwende dazu Matlabskripte deiner Wahl.

10.3 Link zu den Lösungen Phase 9

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg09.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg09.nb

Kapitel 11

Phase 10 (I/10)

11.1 Stoffprogramm Phase 10 ◇ E+M ◇

- ⊘ Gauss'scher Algorithmus und Rückwärtseinsetzen–Algorithmus: Rechenaufwand
- ⊘ Übung: Vektorprodukt–Formel via elementare Aufgliederung.
- ⊘ Matrixmultiplikation
- ⊘ LU-Faktorisierung (LR-Zerlegung, Dreieckszerlegung), quadr. Matrizen u. Determinanten, Fälle $n = 2$, $n > 2$
- ⊘ Testnachbereitung:
  http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0708_01.pdf

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

11.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 10 ◇

Bereitstellung von Arbeitsmaterial (Matrizen, Vektoren):

Material 1 2×2–Matrizen:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Material 2 3×3–Matrizen:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \ C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Material 3 4×4–Matrizen:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ B_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Material 4 Matrizen mit verschiedenen Formaten:

$$A_{2,4} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}, \ B_{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Material 5 Matrizen mit unbekannten Koeffizienten (Vektoren, Spaltenvektorzeilen etc.):

$$X_{1,3} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \end{pmatrix}, \ X_{3,1} = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ x_{3,1} \end{pmatrix},$$

$$X_{2,4} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} \end{pmatrix}, \ X_{4,2} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{pmatrix}$$

Material 6 Vektor, Spaltenvektorzeile:

$$\vec{b}_{3,1} = \begin{pmatrix} 50 \\ -100 \\ 1000 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_{3,2} = \begin{pmatrix} (50 & 203) \\ (-100 & 105) \\ (1000 & -50) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 203 \\ -100 & 105 \\ 1000 & -50 \end{pmatrix}$$

%

Material 7 Einheits– und Nullmatrizen:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Probl. 1 (a) Berechne folgende Matrizen:

$$A_2+B_2,\ \ B_2+C_2,\ \ (A_2+B_2)+C_2,\ \ A_2+(B_2+C_2),\ \ (A_3+B_3)+C_3,\ \ A_3+(B_3+C_3)$$

(b) Überprüfe folgende Gleichungen:

$$(A_2 + B_2) + C_2 = A_2 + (B_2 + C_2),\ \ (A_3 + B_3) + C_3 = A_3 + (B_3 + C_3)$$

(c) Berechne folgenden Summen von „gestreckten“ Matrizen (Linearkombination):

$$4\,A_3 + (-5)\,B_3 + 6\,C_3,\ \ 4\,A_3 - 5\,B_3 - 6\,C_3$$

(d) Berechne folgenden Matrixsummen:

$$A_4 + E_4,\ \ A_4 + E_4 + N_4$$

(e) Was passiert mit den Koeffizientenmatrizen, wenn man zwei $(m \times n)$–Gleichungssysteme beidseitig addiert?

Probl. 2 Matrixmultiplikation: Berechne die Resultate der nachfolgenden Matrixprodukte und versuche auch, die restlichen gefragten Grössen zu bestimmen (Achtung: Nicht alle Berechnungen sind möglich):

(a)
$$A_3 \cdot X_{3,1} = ?$$

(b)
$$A_3 \cdot X_{1,3} = ?$$

(c)
$$A_4 \cdot X_{4,2} = ?$$

(d)
$$A_{2,4} \cdot X_{4,2} = ?$$

(e)
$$B_{4,2} \cdot X_{2,4} = ?$$

(f)
$$A_3 \cdot \vec{b}_{3,1} = ?$$

(g)
$$A_3 \cdot \vec{b}_{3,2} = ?$$

(h)
$$(A_2 \cdot B_2) \cdot C_2 = ?,\ \ A_2 \cdot (B_2 \cdot C_2) = ?$$

(i)
$$(A_3 \cdot B_3) \cdot C_3 = ?,\ \ A_3 \cdot B_3 \cdot C_3) = ?$$

(j)
$$A_3 \cdot B_3 = ?,\ \ B_3 \cdot A_3 = ?$$

(k)
$$A_4 \cdot B_4 = ?,\ \ B_4 \cdot A_4 = ?$$

(l)
$$A_3 \cdot E_3 = ?,\ \ E_3 \cdot A_3 = ?,\ \ A_4 \cdot E_4 = ?,\ \ E_4 \cdot A_4 = ?$$

(m)
$$\det(A_4) = |A_4| = ?,\ \ A_4^{-1} = ?\ \text{(Inverse)},\ \ A_4^{-1} \cdot A = ?,\ \ A \cdot A_4^{-1} = ?$$

Probl. 3 **Selbststudium:** Suche und studiere Matlabbefehle, die zum behandelten Stoff dieser Woche passen. Verwende dazu Matlabskripte deiner Wahl.

11.3 Link zu den Lösungen Phase 10

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg10.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg10.nb

Kapitel 12

Phase 11 (I/11)

12.1 Stoffprogramm Phase 11 ◇ E+M ◇

- ⊘ Rückgabe Test
- ⊘ Repetition.: Matrixmultiplikation, Gesetze, rechnen mit Matrizen (Addition, Multiplikation, Streckung mit Skalar), Beziehung Matrix – Gleichungssystem
- ⊘ Repetition: Allgemeine Determinantendefinition und Regeln
- ⊘ Allgemeiner Entwicklungssatz für Determinanten
- ⊘ **Selbststudium:** Stoff unter diesen Links:
  http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Links/Links.pdf
  http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Links/Links.txt

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

12.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 11 ◇

Bereitstellung von Arbeitsmaterial (Matrizen, Vektoren, ähnlich wie in Serie 10):

Material 1 2×2–Matrizen:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Material 2 3×3–Matrizen:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \ C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Material 3 4×4–Matrizen:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ B_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Material 4 Matrizen mit verschiedenen Formaten:

$$A_{2,4} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}, \ B_{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Material 5 Matrizen mit unbekannten Koeffizienten (Vektoren, Spaltenvektorzeilen etc.):

$$X_{1,3} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \end{pmatrix}, \ X_{3,1} = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ x_{3,1} \end{pmatrix},$$

$$X_{2,4} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} \end{pmatrix}, \ X_{4,2} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{pmatrix}$$

Material 6 Vektor, Spaltenvektorzeile:

$$\vec{b}_{3,1} = \begin{pmatrix} 50 \\ -100 \\ 1000 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_{3,2} = \begin{pmatrix} (50 & 203) \\ (-100 & 105) \\ (1000 & -50) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 203 \\ -100 & 105 \\ 1000 & -50 \end{pmatrix}$$

%

Material 7 Einheits– und Nullmatrizen:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Material 8 Spezielle Matrizen:

$$ABC = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ u & v & w & x & y \end{pmatrix}, \quad VdM_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_{3,0} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Probl. 1 (a) Kleinprojekt: Leite eine Methode für die LU-Zerlegung her mittels einer abstrakten Matrix ($A_{3,0}$ von oben günstig). Die Methode sollte so aufbereitet werden, dass damit auf einem eigenen Rechner (ev. Taschenrechner), gegebenenfalls mit Zuhilfenahme von „Zwischenschritten von Hand" eine Zerlegung ausgeführt werden kann. Untersuche auch, ob du für MATLAB Befehle für die LU-Zerlegung findest (Help-Funktion oder Internet–Suche). Hinweise dazu findest du auch unter: `http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/Matlab_Internet/MatlabIndex_m.html`. Bekannt sind auch die Hinweise von der „TU München".

(b) Zerlege anschliessend die oben wiedergegebenen Matrizen A_3, B_3 und C_3.

Probl. 2 Berechne von den oben gegebenen Matrizen die Determinanten. Bis zu 4×4–Matrizen soll die Berechnung von Hand durchgeführt werden. Benütze die folgende Gruppierung:

(a) $A_2,\ B_2,\ C_2$

(b) $A_3,\ B_3,\ C_3$

(c) $A_4,\ B_4$

(d) $A_{2,4},\ B_{4,2}$ (was fällt hier auf?)

(e) $X_{1,3},\ X_{3,1},\ X_{2,4},\ X_{4,2}$ (was fällt hier auf?)

(f) $b_{3,1},\ b_{3,2}$ (was fällt hier auf?)

(g) $E_2,\ E_3,\ E_4,\ N_4$

(h) ABC (was fällt hier auf?)

(i) VcM_5 (was fällt hier auf?)

Probl. 3 **Selbststudium:** Suche und studiere Matlabbefehle, die zum behandelten Stoff dieser Woche passen. Verwende dazu Matlabskripte deiner Wahl.

12.3 Link zu den Lösungen Phase 11

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg11.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg11.nb

Kapitel 13

Phase 12 (I/12)

13.1 Stoffprogramm Phase 12 ◇ E+M ◇

- ⊘ Nachholtest
- ⊘ Repetition Determinantenberechnung: Entwicklungssatz
- ⊘ Anwendung Entwicklungssatz
  - Determinante der Transponierten von A = Determinante von A
  - Determinante Einer Dreiecksmatrix = Produkt der Diagonalelemente
    - Beispiel
  - Determinantenberechnung durch Transformation auf Dreiecksmatrix (Anwendung der Regeln)
    - Beispiel
  - Determinantenberechnung mittels Unterdeterminanten
    - Beispiel
- ⊘ Eine Matrix stiftet eine lineare Abbildung
- ⊘ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- ⊘ Berechnung der Inversen mittels Gauss-Jordan (simultane Lösung von Gleichungssystemen)
- ⊘ Determinantenmultiplikationssatz, Berechnung der Determinanten der Inversen
- ⊘ Selbststudium: Jacobi Verfahren, iteratives Verfahren: $A \approx ?$, wann konvergiert das Jacobi–Verfahren? Rechenaufwand?
- ⊘ Jacobi–Verfahren siehe:
  http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGd.pdf http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGdf.pdf

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

13.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 12 ◇

Bereitstellung von Arbeitsmaterial (quadratische Matrizen, ähnlich wie in Serie 11):

Material 1 2×2–Matrizen:

$$Di_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ Dr_{2,1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Dr_{2,2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Material 2 2×2–Matrizen:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Material 3 3×3–Matrizen:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix},\ C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Material 4 4×4–Matrizen:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Material 5 Matrizen mit verschiedenen Formaten:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix},\ D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Material 6 Spezielle Matrizen:

$$VdM_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ NVdM_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

%

Berechnungen:

Probl. 1 **Selbststudium:** Suche und studiere Matlabbefehle, die zum behandelten Stoff dieser Woche passen. Verwende dazu Matlabskripte deiner Wahl.

Probl. 2 Berechne die Determinanten von A_4, B_4 und C_4 mit Hilfe der Diagonalisierungsmethode und anschliessend auch mit Hilfe der Methode der Untermatrizen (Entwicklungssatz).

Probl. 3 Berechne die Inversen von Di_2, $Dr_{2,1}$, $Dr_{2,2}$, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, A_4, B_4, C_4 von Hand. Kontrolliere die Resultate anschliessend mit deinem Rechner (oder mit deiner privaten Maschine). Berechne die Determinanten der Inversen von Di_2, $Dr_{2,1}$, $Dr_{2,2}$, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, A_4, B_4, C_4. (Methode frei). Kontrolliere anschliessend jeweils, ob $\det(M) \cdot \det(M^{-1}) = \det(M \cdot M^{-1}) = \det(E) = 1$ richtig ist.

Probl. 4 Es sollen die Inversen von D_3, VdM_4, $NVdM_5$ berechnet werden. Man hat sich entschlossen, dazu eine Maschine (Rechner) zu verwenden. Führe diese Aufgabe aus! Falls eine Inverse nicht berechnet werden kann, so kontrolliere die Determinante.

Probl. 5 Berechne zur Übung die oben nur von Hand berechneten Determinanten und Inversen nochmals mit einer Maschine (Rechner). Benutze dazu für mindestens einen Teil der Berechnungen übungshalber auch Matlab.

Probl. 6 Approximiere die Inverse von A mit der Jacobi-Metode (Iteration):

$$A_{n+1}^{-1} \approx E - (A - E) \cdot A_n^{-1}.$$

Benütze dazu zur Übung Matlab.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Start: } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

An welcher Stelle ist nach 7 Schritten die maximale Ungenauigkeit zu finden?

13.3 Link zu den Lösungen Phase 12

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg12.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg12.nb

Kapitel 14

Phase 13 (I/13)

14.1 Stoffprogramm Phase 13 ◇ E+M ◇

- ⊘ Jacobi Verfahren (iteratives Verfahren) zum Lösen von Gleichungen und der Berechnung der Inversen
- ⊘ Übungen, Aufgaben im Labor
- ⊘ Addition von Schwingungen
- ⊘ Komplexe Zahlen und zweidimensionale Vektoren
- ⊘ Grund der Verwendung solcher Zahlen
- ⊘ Addition in den komplexen Zahlen, Multiplikation mit einem Skalar
- ⊘ **Selbststudium:** Beginn Generalrepetition, siehe Links unter: `http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Links/Links.pdf`

Arbeiten

`http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf`

14.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 13 ◇

Probl. 1 Addition von Schwingungen $A_k \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha_k)$:

$$A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha_1) + A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha_1) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha), \;\; \omega = \frac{2\,Pi}{T}$$

(Wenn zwei Schwingungen dieselbe Kreisfrequenz ω haben, so hat auch die Summe der beiden Schwingungen dieselbe Kreisfrequenz ω.)

Bekannt:

$$\varphi_1 = \omega\, t + \alpha_1, \quad \varphi_2 = \omega\, t + \alpha_2, \quad \varphi = \omega\, t + \alpha$$

(a) $A \cos(\varphi) = A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)$

(b) $\varphi = \arctan(\dfrac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)})$

(c) $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$

Sei $T = 5, \;\; A_1 = 2, \;\; A_2 = 3, \;\; \alpha_1 = \dfrac{\pi}{8}, \;\; \alpha_2 = \dfrac{3\,\pi}{6}$.

Berechne:

(a) $f_1(t) = A_1 \cos(\omega\, t + \alpha_1) + A_1 \cos(\omega\, t + \alpha_2), \;\; t = 0, \; \dfrac{\pi}{6}, \; \dfrac{\pi}{4}, \; \dfrac{\pi}{3}$

(b) $f_2(t) = A_1 \cos(\omega\, t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega\, t + \alpha_2), \;\; t = 0, \; \dfrac{\pi}{6}, \; \dfrac{\pi}{4}, \; \dfrac{\pi}{3}$

(c) $f_3(t) = A_1 \sin(\omega\, t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega\, t + \alpha_2), \;\; t = 0, \; \dfrac{\pi}{6}, \; \dfrac{\pi}{4}, \; \dfrac{\pi}{3}$

(d) $f_4(t) = A_1 \cos(\omega\, t - \alpha_1) + A_2 \cos(\omega\, t + \alpha_2), \;\; t = 0, \; \dfrac{\pi}{6}, \; \dfrac{\pi}{4}, \; \dfrac{\pi}{3}$

Probl. 2 $z_1 = +2 + 1\,i$
$z_2 = +3 - 2\,i$
$z_3 = -4 + 3\,i$
$z_4 = -6 - 5\,i$

(a) $z = z_1 + z_2$

(b) $z = z_2 - z_3$

(c) $z = z_1 + 2\,z_2 - 3\,z_3 + 4\,z_4$

(d) $z = z_1 - 2\,z_2 + 3\,z_3 - 4\,z_4$

(e) $3\,z_1 - 2\,z_2 + 4\,z_3 + 6\,z = 5\,z_2 - 3\,z \;\Rightarrow\; z = ?$

(f) $2\,(z_1 - 3\,z_2) + 4\,(z_3 - z) - 5(z_4 + 2\,z - z_2) = 8\,z_1 - 8\,z \;\Rightarrow\; z = ?$

Probl. 3 **Selbststudium:** Erarbeite eine Übersicht zur Theorie der Gleichungssysteme. Suche und studiere weiter Matlabbefehle, die zum behandelten Stoff dieser Woche passen. Verwende dazu Matlabskripte deiner Wahl.

WIR1

14.3 Link zu den Lösungen Phase 13

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg13.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg13.nb

Kapitel 15

Phase 14 (I/14)

15.1 Stoffprogramm Phase 14 ◇ E+M ◇

- ⊘ Repetition bisheriger Stoff zu den komplexen Zahlen
- ⊘ Eine bisher nicht eingeführte Rechnungsart: Multiplikation von komplexen Zahlen
- ⊘ Die Bedeutung der imaginären Einheit i bei der Multiplikation, Schreibeweisen von i
- ⊘ Gesetze der Multiplikation
- ⊘ Konjugiert komplexe Zahl und Division, Divisionsformel
- ⊘ Die Bezeichnung $z = Radius \cdot cis(\varphi)$: Polarkoordinaten
- ⊘ Multiplikation mit der cis–Bezeichnung, Additionstheoreme
- ⊘ Die geometrische Bedeutung der Multiplikation: Drehstreckung und Konsequenzen
- ⊘ Konsequenzen für die Potenzierung von komplexen Zahlen
- ⊘ Beispiele (z.B. $z_n = (cis(\frac{\pi}{4}))^n \;\Rightarrow\;$ Achteck)
- ⊘ Konsequenzen für das Assoziativgesetz der Multiplikation
- ⊘ Konsequenzen für die Inverse einer Zahl bei der Multiplikation
- ⊘ Lage der Inversen
- ⊘ Additive und multiplikative Gruppen bezüglich $\mathbb{C}$
- ⊘ **Selbststudium:** Generalrepetition (Repetition des bisherigen Stoffes im Hinblick auf die Modulprüfung)

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

15.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 14 ◇

Probl. 1 $z = 3 + 4\,i$

(a) $\bar{z} = ?,\ \ z \cdot \bar{z} = ?$

(b) $|z| = ?$

(c) $z^2 = ?$

(d) $\dfrac{1}{z} = ?$

(e) $z = r\,cis(\varphi) = r\,e^{i\,\varphi},\ \ r, \varphi = ?$

(f) $\dfrac{1}{|z|} = ?$

(g) $z \cdot \bar{z} = ?$

(h) $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = ?$

(i) $|\bar{z}| = ?$

Probl. 2 $z_1 = 1 - i,\ \ z_2 = -1 + 2\,i$

(a) $z_1 \cdot z_2 = ?$

(b) $\dfrac{z_1}{z_2} = ?$

(c) $|\dfrac{z_1}{z_2}| = ?$

(d) $\dfrac{z_1 + z_2}{z_2} = ?$

(e) $\dfrac{3\,z_1 + 2\,z_2}{4\,z_2} = ?$

(f) $z_1^2 \cdot z_2^3 = ?$

Probl. 3 $z_1 = -1 - i$

(a) $z^2 = z_1 \rightsquigarrow\ \ z = ?$

(b) $z^3 = z_1 \rightsquigarrow\ \ z = ?$

(c) $z^4 = z_1 \rightsquigarrow\ \ z = ?$

(d) $z^5 = z_1 \rightsquigarrow\ \ z = ?$

Probl. 4 $x^2 + x + 1 = 0,\ \ x_{1,2} = ?$

Probl. 5 (a) $z_1 = 2 + i\ \ \Rightarrow\ \ z_1^2, z_1^3, z_1^4 = ?$ Skizze!

(b) $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + i)\ \ \Rightarrow\ \ z_2^2, z_2^3, z_2^4 \ldots z_2^M = ?$ Skizze!

Kapitel 16

Phase 15 (I/15)

16.1 Stoffprogramm Phase 15 ◇ E+M ◇

- ⊘ Wurzelziehen in $\mathbb{C}$
- ⊘ n–te Einheitswurzeln
- ⊘ n–te Wurzeln aus beliebigen komplexen Zahlen
- ⊘ Das Problem der Eindeutigkeit der n–ten Wurzel
- ⊘ Drehungen von Figuren mittels komplexer Zahlen
- ⊘ Formeln von Moivre und Darstellungen wie $(\cos(\varphi))^n$ (Fourier)
- ⊘ Hauptsatz der Algebra
- ⊘ Das Problem der Berechnung der Nullstellen (mittels Radikalen allgemein nur bis und mit Polynome 4. Grades)
- ⊘ Partialbruchzerlegung
  - Das Problem
  - Ausdividieren
  - Reelle Polynome und Faktorisierbarkeit im Komplexen: Paare konjugiert komplexer Nullstellen oder quadratische reelle Faktoren
  - Mehrfache Nullstellen und Potenzen von Faktoren
  - Beispiele und Anwendungen
- ⊘ Ausblicke
- ⊘ Beispiele
- ⊘ **Selbststudium:** Generalrepetition

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

16.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 15 ◇

Probl. 1 $z_1 = 2 + 4\,i,\;\; z_2 = -4 - 6\,i$

(a) Skizze: $z_1, z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}, \bar{z}_1, Re(z_1)$

(b) $z_1 \cdot z + z_2^{-1} = \dfrac{\bar{z}_1}{Re(z_1)} \rightsquigarrow\;\; z_1 = ?$

(c) $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = ?$

(d) $w^6 = z_2 \rightsquigarrow$ Skizze: $w_0, w_1, \ldots\,?$

(e) $w_1 = ?$

Probl. 2 Geg.: $\triangle ABC,\;\; \overrightarrow{OA}= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\;\; \overrightarrow{OB}= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},\;\; \overrightarrow{OC}= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

(a) Stelle $\triangle ABC$ mit Hilfe von komplexen Zahlen in $\mathbb{C}$ dar!

(b) Drehe $\triangle ABC$ um O mit $\varphi = \dfrac{5\,\pi}{11} \rightsquigarrow\;\; \triangle A'B'C'$?

Probl. 3 $f(x) = 2\,(x-2)\,(x+3)\,(x-4)\,(x+5)\,(x-8)$

(a) Skizziere den Graphen!

(b) Berechne die Nullstellen!

(c) Vergleiche den Grad von f mit der Anzahl der Nullstellen!

Probl. 4 Benütze $z = e^{i\,\varphi},\;\; z^6 = \ldots$

$\cos(6\,\varphi) = ?$ (Moivre)

Probl. 5 $\cos(\varphi)^4 = ?$ (Fourier)

Probl. 6 $\dfrac{3\,x^2 - 2\,x + 1}{x^2 + 2\,x + 1} = ?$ (Partialbrüche)

Probl. 7 $\dfrac{1}{(x-2)^2\,(x^2 + 2\,x + 3)} = ?$ (Partialbrüche)

Probl. 8 $\dfrac{1}{(x-2)\,(x+3)} = ?$ (Partialbrüche)

Probl. 9 $w^7 = 2 + 5\,i = \rightsquigarrow\;\; w_0 + w_1 = \ldots + w_6 = ?$

%

Probl. 10 Partialbruchzerlegung:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)(x+2)(x+4)}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^4}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x-1)}$

16.3 Link zu den Lösungen Phase 15

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg15.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg15.nb

Kapitel 17

Phase 16 (I/16)

17.1 Stoffprogramm Phase 16 ◇ E+M ◇

- ⊘ Partialbruchzerlegung
  - Reelle Polynome und Faktorisierbarkeit im Komplexen: Paare konjugiert komplexer Nullstellen oder quadratische reelle Faktoren
  - Mehrfache Nullstellen und Potenzen von Faktoren
  - Beispiele und Anwendungen
- ⊘ Reserve, Repetition, Ausblick: Alte Prüfungsserien lösen: Vorbereitung auf die Modulprüfung
- ⊘ **Selbststudium:** Generalrepetition

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

17.2 Übungen in lin.Alg.+Geo. ◇ E+M 16 ◇

Probl. 1 Generalrepetition nach mündlicher sowie spezieller Anleitung.

Probl. 2 Löse die letzte(n) Modulprüfungsserie(n) in linearer Algebra und Geometrie, siehe

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html.

17.3 Link zu den Lösungen Phase 16

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg16.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg16.nb

Kapitel 18

Phase 17 (II/1)

Algebra 1/ 2. Semester

18.1 Stoffprogramm Phase 17 ◇ E+M ◇

⊘ Beispiele zu

- Semestereinführung, Repetition
- Lage von Geraden und Ebenen, Beispiele

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

18.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 01 ◇

Repetition und Ausbau Vektoralgebra und Vektorgeometrie

(Die nachfolgenden Aufgaben sind aus ehemaligen Serien zur Vektorgeometrie des vormaligen Diplomstudienganges B in leicht veränderter Form übernommen worden.)

Teil 1

Probl. 1 $A(-3;5;2)$ und $B(1;-3;4)$ sind zwei Punkte im $\mathbb{R}^3$. Ermittle die Komponenten der Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$.

Probl. 2 $A(2;1;3)$, $B(3;0;2)$, $C(5;-1;-3)$ sowie $D(3;1;-1)$ bezeichnen vier Punkte im $\mathbb{R}^3$. Welche der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AA}$ sind zueinander parallel?

Probl. 3 Gegeben sind die Punkte $A(-4;5;1)$, $B=(2;6;3)$, $C=(6;-2;-1)$, $D(12;-1;1)$ und $E(6;1;2)$. Welche der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OE}$ sind parallel und welche sind gleich?

Probl. 4 Berechnen Sie die Komponenten der Vektoren $3\,\vec{a}$, $\vec{a}-2\,\vec{b}$ bei $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Probl. 5 Gesucht ist der Einheitsvektor $\vec{e}$, welcher parallel und auch gleichgerichtet (also nicht antiparallel) zum Vektor $\vec{a}$ aus der letzten Aufgabe ist.

Probl. 6 Liegen die drei Punkte $A(2;-3;5)$, $B(7;-7;6)$ und $C(27;-23;10)$ auf einer Geraden?

Probl. 7 Bestimme x und y so, dass der Punkt $C(x;y;4)$ auf der Geraden durch die Punkte $A(3;-4;2)$ und $B(7;2;1)$ liegt.

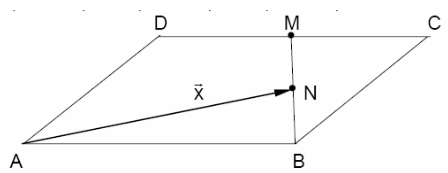
Probl. 8 Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind die Eckpunkte $A(1;1;1)$, $C(-5;3;2)$ und $D(-2;-4;-2)$ gegeben. Berechne die Koordinaten des Eckpunktes B.

Probl. 9 Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind die Eckpunkte $A(3;-2;5)$ und $B(7;5;10)$ sowie der Schnittpunkt $E(5;4;6)$ der Diagonalen gegeben. Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte C und D.

Probl. 10 Berechne die Koordinaten des Punktes M, der die Strecke $\overline{AB}$ halbiert. $A(1;3;-2)$, $B(5;-1;4)$.

Probl. 11 Gesucht sind die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(-4;2;-1)$, $B(7;-1;5)$ und $C(0;2;2)$.

Probl. 12 Berechne die Komponenten des Vektors $\vec{x}$. $ABCD$ bezeichnet ein Parallelogramm. Die Punkte M und N halbieren die Seiten $\overline{CD}$ und $\overline{BM}$. $A(0;-2;1)$, $B(-1;5;0)$, $D(1;-1;4)$.



Probl. 13 A, B, C sind die Ecken eines Dreiecks und S bezeichnet seinen Schwerpunkt. Drücke den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ durch die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ aus.

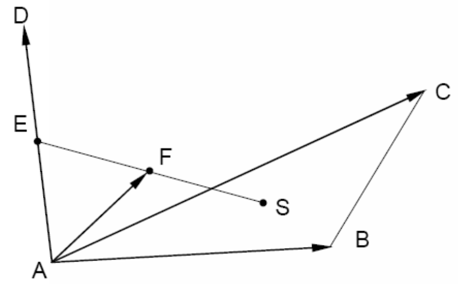
Probl. 14 Beweise: Im Dreieck teilen sich zwei Schwerlinien im Verhältnis 1 : 2.

Probl. 15 Beweise: Die Seitenmitten eines räumlichen Vierecks liegen in einer Ebene und bilden ein Parallelogramm.

Teil 2

Probl. 1 Drücke den Vektor $\overrightarrow{AF}$ in Figur 1 durch die linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ aus.

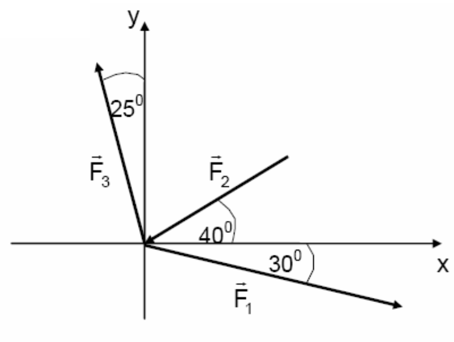
S = Schwerpunkt von ABC,
E = Mittelpunkt von $\overline{AD}$,
F = Mittelpunkt von $\overline{ES}$.



Figur 1

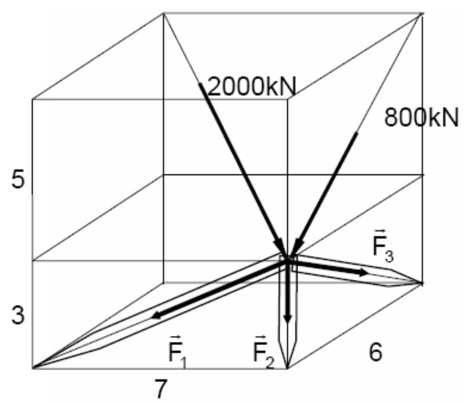
Probl. 2 Berechne in Figur 2 den resultierenden Kraftvektor. Wie gross ist diese Kraft betragsmässig?

$|\vec{F}_1| = 190\,kN$,
$|\vec{F}_2| = \ 80\,kN$,
$|\vec{F}_3| = 100\,kN$.



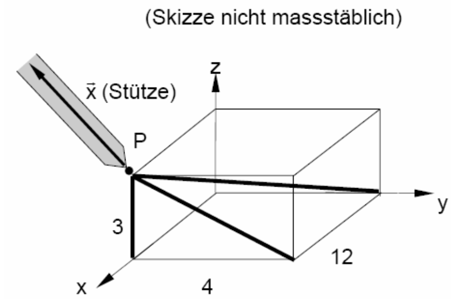
Figur 2

Probl. 3 Das Dreibein in Figur 3 wird mit zwei Kräften belastet. Berechne die Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ in den Stäben.
Gebe die Kräfte auch betragsmässig an.



Figur 3

Probl. 4 In welcher Richtung $\vec{x}$ muss die Stütze im Punkt P in Figur 4 aufgesetzt werden, damit im Belastungsfall die von dieser Stütze auf das Dreibein übertragenen Druckkräfte betragsmässig gleich gross sind?



Figur 4

Probl. 5 Wähle aus den folgenden 5 Vektoren 3 Vektoren aus, die linear unabhängig sind:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Probl. 6 Zeige, dass die Vektoren $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ und $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$ Basen des $\mathbb{R}^3$ bilden und gebe die Komponenten des Vektors $\vec{x}$ bezüglich diesen Basen an.
$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Probl. 7 Liegen die vier Punkte $A(2,-3,5)$, $B(7,-7,5)$, $C(0,1,7)$ und $D(2,3,6)$ auf einer Ebene?

18.3 Link zu den Lösungen Phase 17

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_01.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_01.nb

Kapitel 19

Phase 18 (II/2)

19.1 Stoffprogramm Phase 18 ◇ E+M ◇

Algebra 2/ 2. Semester

⊘ Beispiele zu

- Umrechnungen zwischen Parametergleichung und Koordinatengleichungen
- Parametergleichung mit Normalenvektor durch Punkt
- Parametergleichung und Abstandsberechnungen
- Orthogonalzerlegung und Fußpunkt

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

19.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 02 ◇

Repetition und Ausbau Vektoralgebra und Vektorgeometrie

(Die nachfolgenden Aufgaben sind aus ehemaligen Serien zur Vektorgeometrie des vormaligen Diplomstudienganges B in leicht veränderter Form übernommen worden.)

Teil 1

Probl. 1 Liegen die Punkte $A(3;0;4)$, $B(1;1;1)$ und $C(-7;5;11)$ auf einer Geraden?

Probl. 2 Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechne auch den Schnittpunkt der Geraden, sofern dieser existiert.

(a) $$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(d) $$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Probl. 3 Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $P(2;-3;1)$. Bestimme eine Parameterdarstellung der winkelhalbierenden Geraden von g und h.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Probl. 4 Berechne den Durchstosspunkt der Geraden g, gegeben durch die Punkte $A(3;-2;2)$ und $B(-3;5;8)$, mit der Ebene Φ, gegeben durch die Punkte $U(2;1;-3)$, $V(1;5;4)$ und $W(6;-2;-1)$.

Probl. 5 Bestimme die gegenseitige Lage der Ebenen Φ und Ψ.

(a)

$$\Phi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \Psi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 22 \\ -23 \\ -4 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 29 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \Psi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Probl. 6 Gegeben ist die Ebene $\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Wie lautet die Ebenengleichung (Koordinatengleichung)?

Probl. 7 Gib für die Ebene $\Phi :\ 3\,x - 7\,z = 21$ eine Parameterdarstellung an.

Probl. 8 Die Punkte A, B und C liegen auf der Ebenen Φ. Wie lautet ihre Ebenengleichung? Bestimme die Schnittpunkte der Ebene Φ mit den Koordinatenachsen.

(a) $A(4; 3; -2),\ B(-3; 1; 2),\ C(1; 0; 2)$

(b) $A(2; -3; 0),\ B(-4; 6; 2),\ C(0; 0; 9)$

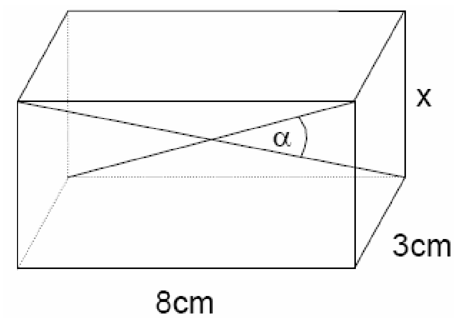
Teil 2

Probl. 1 Berechne mit dem Skalarprodukt die Winkel im Dreieck ABC.
$A(-1; 0; 5),\ B(3; -4; 7),\ C(2; 2; 3)$.

Probl. 2 Der Punkt $P(1; 2; 0)$ wird an der Ebene $\Phi :\ x - y + 2\,z = 3$ gespiegelt. Berechne die Koordinaten des gespiegelten Punktes P' sowie den Abstand zwischen P und P'.

Probl. 3 Zeige mit Hilfe des Skalarprodukts, dass die Winkelhalbierenden von zwei sich schneidenden Geraden senkrecht aufeinander stehen.

Probl. 4 Von einem Quader messen zwei Seiten $3\,cm$ und $8\,cm$. Welche Länge x hat die dritte Seite, wenn der Winkel α zwischen den eingezeichneten x Körperdiagonalen 60^o ist?



Probl. 5 Von einem Rechteck $ABCD$ sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(2; -4; -9)$ und $B(0; 6; 1)$ gegeben. Ein dritter Eckpunkt (d.h. C oder D) liegt auf der Geraden g. Berechne die Koordinaten aller Eckpunkte.

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Probl. 6 Bestimme den Abstand zwischen den Ebenen $\Phi:\ x+2\,y+3\,z=5$ und $\Psi:\ x+2\,y+3\,z=-2$.

Probl. 7 Bestimme den Abstand zwischen $\Phi:\ 3\,x-y+2\,z=1$ und $\Psi:\ -6\,x+2\,y-4\,z=-7$.

Probl. 8 Berechne den Abstand des Punktes $P(-1;0;3)$ von der Ebene $\Phi:\ -x+2\,y+5\,z=-2$.

Probl. 9 Bestimme die Gleichung der Ebene Ψ, die zur Ebene $\Phi:\ 3\,x-5\,y-4\,z=10$ parallel ist und zu ihr einen Abstand von 4 aufweist.

Probl. 10 Die beiden Ebenen Φ und Ψ sind gegeben durch:
$\Psi:\ -x-2\,y+z=2$
Ψ : bestimmt durch die Punkte $A(3;4;2)$, $B(3;-1;5)$ und $C(3;0;-1)$.
Wie lauten die Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen?

Probl. 11 Gegeben ist das Dreieck ABC im Raum. Berechne allgemein Mittelpunkt und Radius seines Umkreises. Berechne dann konkret Umkreismittelpunkt und Umkreisradius des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(-2;5;-5)$, $B(3;-1;5)$ und $C(0;3;-1)$.

Teil 3

Probl. 1 Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

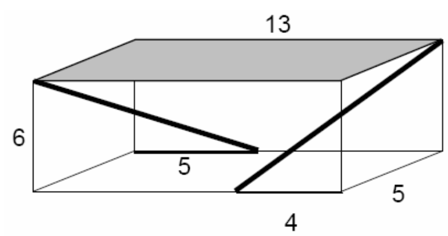
Probl. 2 Berechne den Abstand des Punktes $P(2;4;-5)$ von der Geraden g.

$$g:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$$

Probl. 3 Berechne Oberflächeninhalt und Volumeninhalt des Tetraeders $ABCD$:

$$A(2;-1;5),\ B(3;3;0),\ C(-4;3;-2),\ D=(-1;-3;2)$$

Probl. 4 Ein Dach wird mit zwei Stützen abgestützt. Berechne den Abstand zwischen den Stützen und gib die Koordinaten der Punkte an, zwischen welchen dieser Abstand gemessen werden kann.



Probl. 5 Zerlege die Kraft $\vec{F}$ in zwei Komponenten $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$. Die Kraft $\vec{F_1}$ ist parallel zur Ebene, aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Und die Kraft $\vec{F_2}$ steht normal zu dieser Ebene.

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}30\\-60\\80\end{pmatrix},\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Probl. 6 Gib eine Parameterdarstellung für die Gerade g an, die durch den Punkt P geht und senkrecht auf der Ebene Φ steht.

$$P(2;0;-3), \qquad \Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Probl. 7 Gib zwei Ebenen $2\,x - y + 3\,z + 4 = 0$ und $x + y - 2\,z - 3 = 0$ und ein Punkt $P(2;0;-1)$. Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Geraden, die durch P geht und zu den beiden Ebenen parallel ist.

Probl. 8 Ein Hausdach besteht aus zwei Dreiecksflächen OAC und OBC. Die dreieckige Hausfront ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis AB und Höhe $h = 10$.

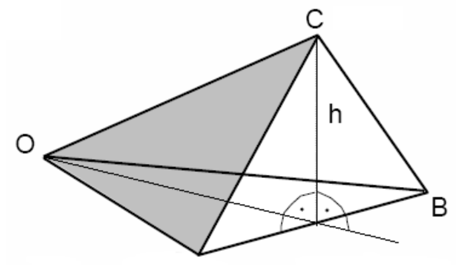
(a) Berechne die Koordinaten der Hausspitze C.

(b) Berechne den Winkel $\angle ACB$.

(c) Unter welchem Winkel treffen die Dachflächen aufeinander?

(d) Wie gross ist die Dachfläche insgesamt?

(e) Berechne das Hausvolumen, d.h. das Volumen des Tetraeders $OABC$.



$O(0;0;0)$, $A(12;4;0)$, $B(2;14;0)$

19.3 Link zu den Lösungen Phase 18

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_02.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_02.nb

Kapitel 20

Phase 19 (II/3)

20.1 Stoffprogramm Phase 19 ◇ E+M ◇

Algebra 3/ 2. Semester

- ⊘ Beispiele (Kurzrepetition) zu
  - Flächeninhalt und Vektorprodukt
  - Gleichung der Ebene durch drei gegebene Punkte und Normalenvektor
  - Abstand eines Punktes zu einer Geraden (Hess'sche Normalform!)
  - Abstand eines Punktes zu einer Ebenen (Hess'sche Normalform!)
  - Ebene orthogonal zu zwei andern Ebenen und durch gegebenen Punkt
  - Volumen mit Spatprodukt
  - Beispiele
- ⊘ Problem der Aufteilung einer Kraft in 4 Kräfte mit gegebener Richtung, Denkanstoss: Löse das Problem erst einmal mit 3 Stützen und 3 Kräften. Dieses Problem ist eindeutig lösbar. Füge dann eine 4. Stütze lose hinzu, die spannbar ist, z.B. durch eine Spannschraube. Anfangs ist die Kraft in dieser neuen Stütze 0. Beginne dann zu spannen. Mit der Zunahme der Kraft in der neuen Stütze durch das Spannen werden die andern bisherigen Stützen entlastet. Diese Kraft nennen wir einmal für den Moment „Vorspannkraft". Diese Vorspannkraft ist nun so groß, wie man sie eben durch den Schraubenmechanismus vom Menschen einstellt wird. Das gestellte Problem lässt sich daher auf den Vorspanner und nicht auf die die Physik resp. die Mathematik (Vektorgeometrie) alleine abwälzen. Man hat also nicht ein Problem der Berechnung oder der Methodenfindung vor sich, sondern der Zuordnung zu einem System resp. zu einer Wissenschaft. Der Vorspanner gehört in diesem Fall auch zum mit Problem. Das Problem hier reduziert sich hiermit also auf das Erfassen des Systems. Frage: Wie ist es nun, wenn die 4 Stützen z.B. im voraus schon verschweißt sind, also nichts mehr gespannt werden kann?

- ⊘ Zum Problem der Aufteilung einer Kraft in 4 Kräfte mit gegebener Richtung: Stichwort „Vorspannung“.

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

20.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 03 ◇

Repetition und Ausbau Vektoralgebra und Vektorgeometrie

Probl. 1 Gegeben ist ein Stuhl mit 4 Beinen und einer Spindel mit der Richtung $\vec{u} = (0,0,1)^T$. Die Richtungen dieser Beine ist $\vec{a} = (1,0,-1)^T$, $\vec{b} = (0,1,-1)^T$, $\vec{c} = (-1,-1,-1)^T$ und $\vec{d} = (-1,-3,-1)^T$. In Richtung $-\vec{u}$ wirkt eine Kraft von $F = 100\,N$.

(a) Ist es möglich, F ohne weitere Annahmen auf die vier Beine zu verteilen?

(b) Die Kraft im Bein mit dem Vektor $\vec{d}$ wird mit $300\,N$ vorgespannt. Berechne die Kräfte in den anderen Beinen.

(c) Ist es möglich, die Kraft Richtung $\vec{d}$ so vorzuspannen, dass die Kräfte in allen Beinen gleich gross sind?

(d) Wie verhält es sich nun mit den Kräften, wenn die 4 Beine im voraus schon verschweißt sind, also nichts mehr vorgespannt werden kann?

Probl. 2 Eine Matlab–Übung: Zeichne alle nachfolgend beschriebenen Phasen mit Matlab! Versuche, falls Zeit vorhanden, auch mit einem andern Instrument der Sache beizukommen.

(a) Ein Kreis mit Radius $r = 1$ wird in x– und y–Richtung verschieden gestreckt, so dass eine Ellipse mit zwei Halbachsen $a = 5$ (x–Richtung) und $b = 3$ entsteht.

(b) Die Figur wird danach um den Origo um $+35^o$gedreht.

(c) Dann wird die Figur mit einer Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ verzerrt.

(d) Anschliessend erfolgt eine Translation um den Vektor $(4,-3)^T$.

(e) Danach kommt eine Spiegelung an der Geraden durch O und $(5,2)^T$.

Probl. 3 Gegeben ist eine Kugel K mit dem Zentrum $M(3,4,2)$ und dem Radius $r = 2$ sowie eine Ebene Φ : $x + y + 2z + 6 = 0$ und ein Punkt $L(10,12,15)$, in dem sich eine Lichtquelle befindet. Konstruiere mit Hilfe eines Computers den Schatten der Kugel auf der (y,z)–Ebene sowie derjenige auf Φ.

Hinweis: Druch L und K ist ein Kegel LK definiert. Schneide diesen Kegel mit den gegebenen Ebenen und zeichne die Schnittkurve.

20.3 Link zu den Lösungen Phase 19

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_03.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_03.nb

Kapitel 21

Phase 20 (II/4)

21.1 Stoffprogramm Phase 20 ◇ E+M ◇

Algebra 4/ 2. Semester

- ⊘ Kurze Rep.Spatprodukt, Determinante und Volumen, Abstand
- ⊘ Kreis, Kugel, Tangente, (Tangentialebene)
- ⊘ Thaleskreis (Kugel) und Apolloniiuskreis (-Kugel)
- ⊘ Die Kegelschnitte
- ⊘ Selbststudium:
  - Tangente, Tangentialebene
  - Pol, Polare
  - Potenz, Potenzgerade, Potenzebene
  - Sehnensatz, Tangenten-Sekantensatz
  - Kegelgleichung
  - Zylindergleichung

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

21.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 04 ◇

Repetition und Ausbau Vektoralgebra und Vektorgeometrie

Suche mit Hilfe des Skripts oder anderen Mitteln die Definitionen sowie die zentralen Formeln zu den folgenden Begriffen und mache dazu je ein Beispiel, wenn möglich graphisch:

Probl. 1 Kreis (Kugel)

Probl. 2 Thaleskreis (Kugel)

Probl. 3 Apolloniuskreis (Kugel)

Probl. 4 Kegelschnitte

Probl. 5 Tangente, Tangentialebene

Probl. 6 Pol

Probl. 7 Polare

Probl. 8 Potenz eines Punktes

Probl. 9 Potenzgerade, Potenzebene

Probl. 10 Sehnensatz

Probl. 11 Tangentensatz

Probl. 12 Sekantensatz

Probl. 13 Kegel

Probl. 14 Zylinder

Ausbau Matrizenrechnung

Probl. 1 Gegeben ist die Matrix A sowie die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ in einem KKS:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne A^{-1}, $\det(A)$ sowie $\det(A^{-1})$.

(b) Berechne $A \cdot \vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Was ist am Resultat bemerkenswert?

(c) Berechne $A^{-1} \cdot \vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Was ist am Resultat bemerkenswert? %

Probl. 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne A^{-1}, $\det(A)$ sowie $\det(A^{-1})$.

(b) Sei E die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Löse $A \cdot \vec{x} = \lambda\,\vec{x} = \lambda\,E\,\vec{x}$ durch Umformung auf $(A - \lambda\,E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$.
Hinweis: Wenn dieses Gleichungssystem in x und y eine Lösung ungleich der Null–Lösung hat, so kann die Matrix $A - \lambda\,E$ bekanntlich nicht regulär sein. Was folgt daher für $\det(A - \lambda\,E)$? (Der entstehende Ausdruck heisst „charakteristisches Polynom".)

Berechne $\det(A - \lambda\,E)$. Was für ein Polynom entsteht? Löse damit die charakteristische Gleichung $\det(A - \lambda\,E) = 0$!

Die gefundenen Lösungen λ_1 und λ_2 heissen „Eigenwerte".

Berechne zu λ_1 und zu λ_2 jeweils die Vektoren $\vec{x}$ aus der Eigenwertgleichung

$$A \cdot \vec{x} = \lambda\,\vec{x}.$$

Untersuche das Lösungsverhalten im Falle von exakten Eigenwerten λ und im Falle von Näherungswerten für die Eigenwerte λ!

21.3 Link zu den Lösungen Phase 20

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_04.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_04.nb

Kapitel 22

Phase 21 (II/5)

22.1 Stoffprogramm Phase 21 $\diamond$ E+M $\diamond$

Algebra 5/ 2. Semester

- ⊘ Repetition Kreis, Kugel
- ⊘ Proportionierung: Winkelhalbierende und Seitenverhältnisteilung im Dreieck
- ⊘ Die Winkel am Apolloniuskreis
- ⊘ Tangente, Tangentialebene
- ⊘ Kegelgleichung
- ⊘ Selbststudium:
  - Potenz, Potenzgerade, Potenzebene
  - Sehnensatz, Tangenten-Sekantensatz

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

22.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 05 ◇

Wiederholung Ausbau Matrizenrechnung

Probl. 1 Gegeben ist die Matrix A sowie die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ in einem KKS:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne A^{-1}, $\det(A)$ sowie $\det(A^{-1})$.

(b) Berechne $A \cdot \vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Was ist am Resultat bemerkenswert?

(c) Berechne $A^{-1} \cdot \vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Was ist am Resultat bemerkenswert?

Probl. 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne A^{-1}, $\det(A)$ sowie $\det(A^{-1})$.

(b) Sei E die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Löse $A \cdot \vec{x} = \lambda\,\vec{x} = \lambda\,E\,\vec{x}$ durch Umformung auf $(A - \lambda\,E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$.
Hinweis: Wenn dieses Gleichungssystem in x und y eine Lösung ungleich der Null–Lösung hat, so kann die Matrix $A - \lambda\,E$ bekanntlich nicht regulär sein. Was folgt daher für $\det(A - \lambda\,E)$? (Der entstehende Ausdruck heisst „charakteristisches Polynom".)

Berechne $\det(A - \lambda\,E)$. Was für ein Polynom entsteht? Löse damit die charakteristische Gleichung $\det(A - \lambda\,E) = 0$!

Die gefundenen Lösungen λ_1 und λ_2 heissen „Eigenwerte".

Berechne zu λ_1 und zu λ_2 jeweils die Vektoren $\vec{x}$ aus der Eigenwertgleichung

$$A \cdot \vec{x} = \lambda\,\vec{x}.$$

Untersuche das Lösungsverhalten im Falle von exakten Eigenwerten λ und im Falle von Näherungswerten für die Eigenwerte λ!

%

Eigenwertprobleme

Probl. 1 Gegeben ist die Matrix A_1:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3$.

(b) Erstelle mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren die Matrizen

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Berechne damit die Matrix $M_1 = S_1 \cdot D_1 \cdot S_1^{-1}$.

(c) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M_1 und vergleiche diese mit denen von A_1. Was stellt man fest?

Probl. 2 Gegeben sind die Eigenwerte einer Matrix A_2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Erstelle mit Hilfe dieser Werte die Matrizen

$$D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechne damit die Matrix $M_2 = S_2 \cdot D_2 \cdot S_2^{-1}$.

(c) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M_2 und vergleiche diese mit den gegebenen Werten von D_2 und S_2. Was stellt man fest und was ist zu A_2 zu bemerken?

Probl. 3 Gegeben sind die Eigenwerte einer Matrix A_3: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Erstelle mit Hilfe dieser Werte die Matrizen

$$D_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechne damit die Matrix $M_3 = S_3 \cdot D_3 \cdot S_3^{-1}$.

(c) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M_3 und vergleiche diese mit den gegebenen Werten von D_3 und S_3. Was stellt man fest und was ist zu A_3 zu bemerken?

%

Probl. 4 Gegeben sind die Eigenwerte einer Matrix A_4: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_3 = 0$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Erstelle mit Hilfe dieser Werte die Matrizen

$$D_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechne damit die Matrix $M_4 = S_4 \cdot D_4 \cdot S_4^{-1}$.

(c) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M_4 und vergleiche diese mit den gegebenen Werten von D_4 und S_4. Was stellt man fest und was ist zu A_4 zu bemerken?

Probl. 5 Gegeben ist die Matrix A_5:

$$M_5 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

sowie der Kreis K mit dem Mittelpunkt $P_M(3; -1)$ und dem Radius $r = 1.5$.

(a) Berechne die Eigenwerte λ_1 und λ_2 sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2$ von M_5.

(b) Stelle K sowie die Eigenvektoren in einer Skizze dar.

(c) Benützt die Eigenvektoren als Basis eines neuen Koordinatensystems und stelle dieses ebenfalls in der Skizze dar.

(d) Bilde die Kreislinie mittels der Matrix M_5 ab. Benutze dazu die Skizze.
(*Hinweis: Überlege dir, wie ein Vektor in der Darstellung im neuen Koordinatensystem abgebildet wird! Benutze dabei die Eigenwerte und Eigenvektoren.*

(e) Um welchen Kurventyp handelt es sich bei der Bildkurve?

22.3 Link zu den Lösungen Phase 21

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_05.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_05.nb

Kapitel 23

Phase 22 (II/6)

23.1 Stoffprogramm Phase 22 ◇ E+M ◇

Algebra 6/ 2. Semester

- ⊘ Potenz, Potenzgerade, Potenzebene
- ⊘ Sehnensatz, Tangenten-Sekantensatz
- ⊘ Vektorkurven, Tangentialvektor, Normalenvektor
- ⊘ Repetition Abbildungseigenschaften einer Matrix
- ⊘ Eigenwerte und Eigenvektoren: Beispiel

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

23.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 06 ◇

Ausbau Matrizenrechnung

Probl. 1 Gegeben eine Vektorfunktion $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \vec{v}_k(t) \in \mathbb{R}^2$.
Skizziere diese Vektorfunktion. Wähle dabei t aus einem Intervall, das eine volle Periode abdeckt.

(a) $\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 2\,\cos(t) + \frac{\cos(5\,t)}{3} \\ \sin(t) + \frac{\sin(5\,t)}{3} \end{pmatrix}$.

(b) $\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 2\,\cos(t) + \frac{\cos(6\,t)}{4} \\ \sin(t) + \frac{\sin(6\,t)}{4} \end{pmatrix}$.

(c) $\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 2\,\cos(t) + \frac{\cos(8\,t)}{6} \\ \sin(t) + \frac{\sin(8\,t)}{6} \end{pmatrix}$.

(d) $\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 2\,\cos(t) + \frac{\cos(8\,t)}{6} \\ \sin(t) + \frac{\cos(8\,t)}{6} \end{pmatrix}$.

Probl. 2 Berechne $\vec{v}_1{}'(t)$ und skizziere die Tangente (Tangentialvektor) an die Kurve für $t = 1.2$.

Überlege auch, wo an der Kurve Spitzen entstehen.

Probl. 3 Gegeben ist die nachfolgende Vektorfunktion $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \vec{v}(t) \in \mathbb{R}^3$.
Skizziere diese Vektorfunktion. Wähle dabei $t \in [-\pi,\, 2\,\pi]$.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2\,\cos(t) + \frac{\cos(5\,t)}{3} \\ \sin(t) + \frac{\sin(5\,t)}{3} \\ \sqrt{(t-\pi)^2} \end{pmatrix}$$

Probl. 4 Gegeben ist eine Gerade g durch den Ursprung O und den Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne eine Matrix M, mit welcher ein Punkt mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ an g gespiegelt wird.

(b) Speziell ist duch $P(1;\, 5)$ und dem Zentrum O ein Fünfeck gegeben. Spiegele dieses Fünfeck.

(c) Visualisiere die Situation.

%

Probl. 5 Gegeben ist eine Ebene Φ im Raum, $\Phi:\ \vec{x} = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$. Es gilt:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Beschreibe eine Abbildung, die sich aus einer Translation, einer Ebenenspiegelung an eine Ebene durch O und einer Rücktranslation zusammensetzt, mit deren Hife man dann einen beliebigen Punkt P an Φ spiegeln kann.

(b) Berechne die Matrix M, mit der die Ebenenspiegelung an die Ebene durch O ausgeführt werden kann.

(c) Speziell ist duch $P_1(1;5;2)$, $P_2(2;6;5)$, $P_3(4;3;1)$ und $P_4(-1;1;-5)$ ein Tetraeder gegeben. Spiegele dieses Tetraeder an Φ.

(d) Visualisiere die Situation.

23.3 Link zu den Lösungen Phase 22

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_06.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_06.nb

Kapitel 24

Phase 23 (II/7)

24.1 Stoffprogramm Phase 23 ◇ E+M ◇

Algebra 7/ 2. Semester

⊘ Repetition Eigenwerte und Eigenvektoren:

- Charakteristisches Polynom
- Matrizen mit mehrfachen Eigenwerten oder weniger Eigenwerten als die Ordnung
- Matrizen mit weniger Eigenvektoren als die Ordnung
- Die Triviallösung 0
- Das Problem bei nicht regulägen Matrizen
- Beispiel, Berechnungen
- Approximation von Eigenwerten: Bei der Berechnung der Eigenvektoren ist die Gleichung Ördnung = Rang + Dimension"gestört
- Beispiel

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

24.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 07 ◇

Ausbau Matrizenrechnung: Eigenwerte und Eigenvektoren

Probl. 1 Gegeben sind:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$.

(b) Berechne die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A. Was fällt bezügleich D auf?

(c) Berechne die Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ von A. Was fällt bezüglich B auf?

(d) Berechne die Zerlegung von $\vec{v}$ nach den Eigenvektoren: $\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \beta_1 \cdot \vec{x}_2$.

(e) Berechne $A \cdot \vec{v}$.

(f) Berechne $\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \beta_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{x}_2$.

Probl. 2 Gegeben seien:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$.

(b) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A.

(c) Berechne die Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ von A. Was fällt bezügleich D auf?

(d) Berechne die Zerlegung von $\vec{v}$ nach den Eigenvektoren: $\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \beta_1 \cdot \vec{x}_2 + \gamma_1 \cdot \vec{x}_3$. Was fällt bezüglich B auf?

(e) Berechne $A \cdot \vec{v}$.

(f) Berechne $\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \beta_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \gamma_1 \cdot \lambda_3 \cdot \vec{x}_3$.

Probl. 3 Wähle B, D und $\vec{v}$ nach eigener Wahl, sodass B^{-1} existiert. Führe damit obige Rechnungen ebenfalls durch. Stellt man damit die selben Zusammenhänge fest wie oben?

Probl. 4 Gegeben ist eine Vektorfunktion $\vec{v}(t)$. Dazu ist noch eine Matrix A gegeben:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + t \\ \ln(t+1) + \sin^2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Skizziere die Kurve $\vec{v}(t)$, $t \in [0, 7]$.

(b) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(c) Skizziere $A \cdot \vec{v}(t)$, $t \in [0, 7]$.

(d) Erkläre die Abbildung mittels der Eigenwerte und Eigenvektoren.

WIR

24.3 Link zu den Lösungen Phase 23

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_07.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_07.nb

Kapitel 25

Phase 24 (II/8)

25.1 Stoffprogramm Phase 24 ◇ E+M ◇

Algebra 8/ 2. Semester

- ⊘ Repetition Vektorgeometrie und Prüfungsstoff
  - Abbildung mit Matrizen
  - Apollonius
  - Kreis, Kugel, Tangente
  - Pol, Polare, Potenz, Potenzgerade
  - Beispiele
- ⊘ Berechnung von Eigenwerten, Eigenvektoren: Beispiel
- ⊘ Beziehungen zwischen Abbildung und Eigenwerten/Eigenvektoren
- ⊘ Ein Beispiel mit $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$ — dabei besteht B aus den Eigenvektoren und D ist die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

25.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 08 ◇

Ausbau Matrizenrechnung: Eigenwerte und Eigenvektoren

Probl. 1 Gegeben sind:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die inverse Matrix zu B.

(b) Berechne $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$.

(c) Berechne die Eigenwerte von A.

(d) Was fällt auf, wenn man die Eigenwerte von A mit denjenigen von D vergleicht?

(e) Berechne die Eigenvektoren von A.

(f) Was fällt auf, wenn man die Eigenvektoren von A mit denjenigen von B vergleicht?

Probl. 2 Gegeben seien:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne B^{-1}.

(b) Berechne $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$.

(c) Berechne das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ von A und auch dasjenige von D, welches wir mit $P_D(\lambda)$ bezeichnen. Vergleiche $P_A(\lambda)$ mit $P_D(\lambda)$. Was stellt man fest?

(d) Berechne die Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 von A und auch diejenigen von D. Vergleiche die Ergebnisse. Was stellt man fest?
Stellt man denselben Sachverhalt, der bei den Eigenwerten gilt, auch für die Eigenvektoren von A und D fest?
Was ist bemerkenswert an den Eigenvektoren von D?

(e) Summiere die Eigenwerte von A. Mache dasselbe für die Eigenwerte von D. Vergleiche die Ergebnisse mit dem jeweils 2. Koeffizient des charakteristischen Polynoms (derjenige von λ^2). Was stellt man fest?

(f) Berechne die Determinante von A und auch diejenige von D. Vergleiche die Werte mit dem Wert des letzten, d.h. des konstanten Koeffizienten des charakteristischen Polynoms. Was stellt man fest?

(g) Multipliziere die Eigenwerte von A. Mache das gleiche mit den Eigenwerten von D. Vergleiche die Resultate mit der Determinante der jeweiligen Matrix. Was stellt man fest?

%

Probl. 3 Gegeben ist ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt $M(4,\ 3)$ und dem Radius $r = 2$. Dazu sei $P_0(0,\ 0)$ ein Punkt, den wir als Pol bezeichnen.

(a) Berechne die Polare p zu P_0 sowie deren Schnittpunkte mit k_1. Skizziere alsdann die Situation.

(b) Berechne die Tangenten von P_0 aus an k_1 und dazu die Tangentenschnittpunkte mit k_1. Trage die erhaltenen Punkte in die Skizze ein.

(c) Berechne eine Gleichung für die Gerade $g_1 = \overline{P_0M}$. Berechne damit die Schnittpunkte $g_1 \cap k_1$. Trage die erhaltenen Punkte in die Skizze ein.

(d) Berechne einen Punkt P_1, so dass k_1 der Apolloniuskreis zu $\overline{P_0P_1}$ ist. Trage den erhaltenen Punkt in die Skizze ein. Was fällt an diesem Punkt besonders auf?

(e) Gegeben ist ein zweiter Kreis mit dem Mittelpunkt P_0 und dem Radius $3\,r$. Suche zu k_1 und k_2 die Potenzgerade und skizziere die Situation. Was ist das Auffallende an der Lage der Potenzgeraden?

Probl. 4 Gegeben ist eine Gerade g durch die Punkte A und B. Weiter kennt man einen Punkt Q. Berechne mit Hilfe der Parametergleichung von g und dem Richtungsvektor den Abstand von Q zu g und den Lotfusspunkt L.

$$A = A(1; 3; 2),\ \ B = B(4; 1; 3),\ \ Q = Q(7; 7; 7)$$

Hinweis: Benutze die Normalenebene zu g durch Q.

Probl. 5 Gegeben ist eine Ebene Φ durch ihre Koordinatengleichung. Weiter kennt man einen Punkt Q. Berechne den Abstand von Q zu Φ und den Lotfusspunkt L.

$$\Phi:\ \ 2\,x - y + 3\,z - 1 = 0,\ \ Q = Q(7; 7; 7)$$

25.3 Link zu den Lösungen Phase 24

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_08.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_08.nb

Kapitel 26

Phase 25 (II/9)

26.1 Stoffprogramm Phase 25 ◇ E+M ◇

Algebra 9/ 2. Semester

- ⊘ Test (Link siehe Übungen)

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

26.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 09 ◇

Nachbearbeitung / Aufbereitung Test

Probl. 1 Bearbeite den Test unten abgegebenen Test:

Test:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0708_02.pdf

Lösungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0708_02_Loes.pdf

Source–Code:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0708_02_Loes.nb

26.3 Link zu den Lösungen Phase 25

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_09.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_09.nb

Kapitel 27

Phase 26 (II/10)

27.1 Stoffprogramm Phase 26 ◇ E+M ◇

Algebra 10/ 2. Semester

- ⊘ Spezialwoche

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

27.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 10 ◇

Kreis und Ellipse

Probl. 1 (a) i. Durch $\vec{v}_0 = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $r = 1$ ist eine Kurve in Parameterdarstellung gegeben. Skizziere diese Kurve.

ii. Durch $\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle - r^2 = 0,\ \ r = 1$, ist eine Kurve durch eine implizite Gleichung gegeben. Skizziere diese Kurve. Was stellt man fest?

(b) Sei $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

i. Durch $\vec{v}_{1a} = D_1 \cdot \vec{v}_0$ mit $r = 1$ ist eine Kurve in Parameterdarstellung gegeben. Skizziere diese Kurve.

ii. Durch $\vec{v}_{1b} = D_1^{-1} \cdot \vec{v}_0$ mit $r = 1$ ist eine Kurve in Parameterdarstellung gegeben. Skizziere diese Kurve. Was stellt man fest?

iii. Durch $\langle (D_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}), (D_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \rangle - r^2 = 0,\ \ r = 1$, ist eine Kurve durch eine implizite Gleichung gegeben. Skizziere diese Kurve. Was stellt man fest?

(c) Sei $\varphi = \frac{\pi}{6},\ \ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

i. Durch $\vec{v}_{3a} = M \cdot \vec{v}_{2a}$ mit $r = 1$ ist eine Kurve in Parameterdarstellung gegeben. Skizziere diese Kurve.
Berechne auch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M \cdot D_1$.

ii. Durch $\vec{v}_{3b} = M^{-1} \cdot \vec{v}_{2b}$ mit $r = 1$ ist eine Kurve in Parameterdarstellung gegeben. Skizziere diese Kurve. Was stellt man fest?
Berechne auch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $(M \cdot D_1)^{-1}$.

iii. Durch $\langle (D_1 \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}), (D_1 \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \rangle - r^2 = 0,\ \ r = 1$, ist eine Kurve durch eine implizite Gleichung gegeben. Skizziere diese Kurve. Was stellt man fest?

27.3 Link zu den Lösungen Phase 26

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_10.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_10.nb

Kapitel 28

Phase 27 (II/11)

28.1 Stoffprogramm Phase 27 ◇ E+M ◇

Algebra 11/ 2. Semester

- ⊘ Test retour
- ⊘ Repetition von und weiter mit Eigenwertproblemen:
  - Repetition Eigenwerte und Eigenvektoren
  - Berechnung, charakteristisches Polynom, maximale Anzahl
  - Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten
  - Eigenwerte, Eigenvektoren zur inversen Matrix
  - Eigenwerte, Eigenvektoren zur transponierten Matrix
  - Diagonalisierung einer Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

28.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 11 ◇

Eigenwertprobleme: Inverse, Transponierte, Diagonalisierung

Probl. 1 (a) Sei $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3,\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

i. Bilde $X = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

ii. Berechne $\det(X)$. Ist $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ l.u.?

iii. Bilde $D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ und berechne damit $A = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$.

iv. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

v. Vergleiche $\det(A)$ mit $\det(D_\lambda)$.

(b) Sei $A_1 = A^{-1}$.

i. Berechne A_1.

ii. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von A_1. Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

iii. Vergleiche $\det(A_1)$ mit $\det(D_\lambda^{-1})$.

(c) Sei $A_2 = A^T$.

i. Berechne A_2.

ii. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von A_2. Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

iii. Vergleiche $\det(A_2)$ mit $\det(D_\lambda)$.

Probl. 2 (a) Sei $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3,\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i. Bilde $Y = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

ii. Berechne $\det(Y)$. Ist $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ l.u.?

iii. Bilde $E_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ und berechne damit $B = Y \cdot E_\lambda \cdot Y^{-1}$.

iv. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von B. Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

v. Vergleiche $\det(B)$ mit $\det(E_\lambda)$.

(b) Sei $B_1 = B^{-1}$.

i. Berechne B_1.

ii. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von B_1. Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

iii. Vergleiche $\det(B_1)$ mit $\det(E_\lambda^{-1})$.

(c) Sei $B_2 = B^T$.

i. Berechne B_2.

ii. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von B_2. Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

iii. Vergleiche $\det(B_2)$ mit $\det(E_\lambda)$.

28.3 Link zu den Lösungen Phase 27

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_11.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_11.nb

Kapitel 29

Phase 28 (II/12)

29.1 Stoffprogramm Phase 28 ◇ E+M ◇

Algebra 12/ 2. Semester

- ⊘ Repetition Diagonalisierung einer Matrix A mit n verschiedenen Eigenwerten
- ⊘ Vergleich der Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit denjenigen der zugehörigen Diagonalmatrix D
- ⊘ Berechnung der Eigenvektoren von D
- ⊘ Vergleich der Determinante von A mit derjenigen von D
- ⊘ Konstruktion einer Matrix mit gegebenen Eigenvektoren und Eigenwerten
- ⊘ Beispiel einer Konstruktion mit Abbildung einer Kurve (Kreis in eine bestimmte gegebene Richtung zu einer Ellipse deformiert mit gegebenem Achsenverhältnis. . .)

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

29.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 12 ◇

Eigenwertprobleme: Anwendungen zur Matrixkomposition

Probl. 1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = (\vec{x}_1)_\perp = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind die Eigenvektoren einer Matrix A. Der zu $\vec{x}_1$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_1 = 2$, der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_2 = 1$. Dazu ist noch die Vektorfunktion $\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ gegeben mit $t \in [0,\ 2\,\pi]$. Dazu kennt man die Vektorfunktion $\vec{v}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}\,t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [-2,\ 2]$.

(a) Konstruiere die Matrix A.

(b) Erstelle mit Hilfe eines Computers oder Taschenrechners eine Skizze von $\vec{v}_1(t)$ und ebenso von $\vec{v}_2(t) = A \cdot \vec{v}_1(t)$. Was stellt man bezüglich der oben gegebenen Eigenvektoren und Eigenwerten fest?

(c) Dreht man die damit gegebene Kurve in positiver Drehrichtung um den Urprung um den Winkel, der durch die x–Achse und $\vec{x}_1$ gegeben ist, so erhält man eine Vektorfunktion $\vec{v}_4(t)$. Daraus wiederum gewinnt man eine Vektorfunktion $\vec{v}_5(t) = A \cdot \vec{v}_4(t)$. Skizziere $\vec{v}_3(t)$, $\vec{v}_4(t)$ und $\vec{v}_5(t)$.

Probl. 2 Nun verallgemeinern wir das oben gegebene Problem etwas. Sei $\vec{x}_1 = \vec{x}_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \vec{x}_2(\varphi) = (\vec{x}_1(\varphi))_\perp$. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind die Eigenvektoren einer Matrix $A(\varphi, \lambda)$. Der zu $\vec{x}_1(\varphi)$ gehörige Eigenwert ist λ_1 (variabel), der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_2 = 1.5$. Dazu ist wiederum die Vektorfunktion $\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ gegeben mit $t \in [0,\ 2\,\pi]$.

(a) Konstruiere die Matrix $A(\varphi, \lambda) = A(\varphi, \lambda_1)$.

(b) Berechne $\vec{v}_2(t, \varphi, \lambda_1) = A(\varphi, \lambda_1) \cdot \vec{v}_1(t)$ und erstelle die Plots von $\vec{v}_2(t, \varphi, \lambda_1)$ für $\lambda_1 = 1 + \sqrt{\varphi}$, $\varphi \in \{\frac{2\,\pi}{9}, 2\,\frac{2\,\pi}{9}, 3\,\frac{2\,\pi}{9}, \ldots, 9\,\frac{2\,\pi}{9} = 2\,\pi\}$. Wenn man diese Kurven alle im selben Plot darstellt, so kann man feststellen, dass die Kurvenschar eine Kurve anderer Art einhüllt. Welche Kurve wird hier eingehüllt? (Das Resultat ist einfach ablesbar.)

29.3 Link zu den Lösungen Phase 28

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_12.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_12.nb

Kapitel 30

Phase 29 (II/13)

30.1 Stoffprogramm Phase 29 ◇ E+M ◇

Algebra 13/ 2. Semester

- ⊘ Spur, Determinante und charakteristisches Polynom
- ⊘ Gleichheit der charakteristischen Polynome bei A und D, Ähnlichkeit von Matrizen (gleiche Eigenwerte res. charakteristische Polynome)
- ⊘ Kollineation: Geometrische Abbildung einer Figur mit Fixgerade, Konstruktion der Matrix mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren.
- ⊘ Beispiele

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

30.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 13 ◇

Eigenwertprobleme: Diverse Anwendungen

Probl. 1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind die Eigenvektoren einer Matrix A. Der zu $\vec{x}_1$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_2 = 1$.

(a) Entscheide, ob die Matrix A eine Fixgerade besitzt.

(b) Konstruiere die Matrix A.

(c) Diagonalisiere A : $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ und berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von D.

(d) Berechne und vergleiche die charakteristischen Polynome $P_A(\lambda)$ und $P_D(\lambda)$ von A und D.

(e) Ermittle aus diesen Polynomen die Spur sowie die Determinante von A und D.

(f) Bestimme mit Hilfe der oben gegebenen Eigenwerten eine Matrix B, bei der die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

(g) Berechne auch für B die Spur und die Determinante mit Hilfe der Eigenwerte.

(h) Berechne die Eigenwerte von $A \cdot B$ und auch diejenigen von $B \cdot A$.

(i) Gegeben sind die Punkte $P_1(-2, -1)$, $P_2(-1, -3)$, $P_3(2, -2)$. Dadurch ist ein Dreieck $F_1 = \triangle(P_1 P_2 P_3)$ gegeben. Bilde dieses Dreieck mit Hilfe der Matrix A ab und berechne die Eckpunkte des Bilddreiecks $F_2 = \triangle(Q_1 Q_2 Q_3)$.

(j) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalten von F_1 und F_2. Sieht man einen Zusammenhang zu den Eigenwerten?

(k) Erstelle mit Hilfe eines Computers oder Taschenrechners eine Skizze von $\vec{x}_1$ und ebenso von $\vec{x}_2$ sowie von den beiden Dreiecken und arbeite die Fixpunkte bei der Abbildung des Dreiecks heraus.

Probl. 2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind die Eigenvektoren einer Matrix A und auch der Matrix B. Der zu $\vec{x}_1$ gehörige Eigenwert von A ist $\lambda_{1,A} = 2$, der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist von A $\lambda_{2,A} = 1$. Weiter ist der zu $\vec{x}_1$ gehörige Eigenwert von B gleich $\lambda_{1,B} = 1$, der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist von B $\lambda_{2,B} = -3$. Stelle die zugehörigen Abbildungen A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ in der Form $M = X \cdot D \cdot X^{-1}$ dar für die Matrizen $M = A, B, A \cdot B, B \cdot A$. Welche Erkenntnis kann man daraus gewinnen?

30.3 Link zu den Lösungen Phase 29

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_13.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_13.nb

Kapitel 31

Phase 30 (II/14)

31.1 Stoffprogramm Phase 30 ◇ E+M ◇

- ⊘ Repetition Drehmatrix für Drehung in der Ebene
- ⊘ Repetition Spiegelungsmatrix für Punktspiegelung
- ⊘ Repetition Spiegelungsmatrix für Spiegelung an einer Geraden in der Ebene
- ⊘ Projektionsmatrix für Projektion im Raum auf eine Ebene mit gegebener Projektionsrichtung
- ⊘ Drehmatrix für Drehung um eine Achse im Raum
- ⊘ Beispiele

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

31.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 14 ◇

Eigenwertprobleme: Diverse Anwendungen

Probl. 1 Gegeben sind die Punkte $P_1(2,1),\ P_2(3,2),\ P_3(1,3)$. Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = 71^o$. Drehe damit das Dreieck $F_1 = \triangle(P_1P_2P_3)$ um φ und berechne die Eckpunkte des Bilddreiecks $F_2 = \triangle(Q_1Q_2Q_3)$. Skizziere die Situation.

Probl. 2 Gegeben ist Gerade $g:\ \vec{v} = \vec{0} + t \cdot \vec{x}_1$ mit $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte P_1, P_2, P_3 aus der obigen Aufgabe. Konstruiere die Spiegelungsmatrix $S(g)$. Spiegele damit das Dreieck $F_1 = \triangle(P_1P_2P_3)$ und berechne die Eckpunkte des Bilddreiecks $F_3 = \triangle(S_1S_2S_3)$. Skizziere die Situation.

Probl. 3 Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $S(g)$ in der letzten Aufgabe. Was fällt auf?

Probl. 4 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Kontrolliere, ob diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden zusammen mit dem Ursprung O eine Ebene Φ. $\vec{u}$ zeigt die Projektionsrichtung bei der Projektion auf Φ an. Konstruiere die Projektionsmatrix und projiziere das Dreieck $F_3 = \triangle(T_1T_2T_3)$ auf die Ebene Φ (Dreieck $F_4 = \triangle(N_1N_2N_3)$). Dabei ist $T_1 = T_1(0,2,3),\ T_2 = T_2(1,1,0),\ T_3 = T_3(2,0,2)$.

Probl. 5 Suche die Matrix, welche in der letzen Aufgabe die Punkte P_k in die Punkte M_k abbildet. Dabei ist $\overrightarrow{OM_k} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OT_k} + \overrightarrow{ON_k})$. Berechne dazu die Eigenwerte und die Eigenvektoren. Fällt etwas auf?

Probl. 6 Durch die Gerade $g:\ \vec{x} = \vec{0} + t \cdot \vec{a},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ist eine Drehachse im Raum gegeben. Das oben genannte Dreieck $F_3 = \triangle(T_1T_2T_3)$ soll um g mit Blickrichtung $-\vec{a}$ um $+56^o$ gedreht werden. Konstruiere die Drehmatrix und berechne die Eckpunkte $R_1,\ R_2,\ R_3$ des gedrehten Dreiecks.

Probl. 7 Durch den Ursprung O, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Ebene Φ im Raum gegeben. Das oben genannte Dreieck $F_3 = \triangle(T_1T_2T_3)$ soll an Φ gespiegelt werden. Konstruiere die Spiegelungsmatrix und berechne die Eckpunkte $S_1,\ S_2,\ S_3$ des gespiegelten Dreiecks. (Hinweis: Verwende Eigenwerte und Eigenvektoren.)
Kontrolliere, ob die Mittelunkte M_k der Strecken $\overline{T_kS_k}$ in Φ liegen.

WIR

31.3 Link zu den Lösungen Phase 30

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_14.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_14.nb

Kapitel 32

Phase 31 (II/15)

32.1 Stoffprogramm Phase 31 ◇ E+M ◇

⊘ Test

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

32.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 15 ◇

Eigenwertprobleme: Diverse Anwendungen

Probl. 1 Studiere im Skript das Kapitel über konforme Abbildungen (komplexe Abbildungen, die den Schnittwinkel zweier Linien in einem Schnittpunkt erhalten).

Probl. 2 Wann ist durch die Abbildung $z \longmapsto f(z) = \frac{1}{z}$ eine konforme Abbildung gegeben?

Probl. 3 Sei $z(t) = a + i\,t$. Studiere die Abbildung $z \longmapsto f(z) = \frac{1}{z}$, wenn $z = z(t) = a + i\,t,\ \ a \in \mathbb{R}$ eine Gerade beschreibt. Skizziere die Kurven $f(z) = \frac{1}{a + i\,t}$ für einige Werte von $a \in \mathbb{R}$. Welche Kurvenart entsteht?

Probl. 4 Sei $z(t) = t + i\,b$. Studiere die Abbildung $z \longmapsto f(z) = \frac{1}{z}$, wenn $z = z(t) = t + i\,b,\ \ b \in \mathbb{R}$ eine Gerade beschreibt. Skizziere die Kurven $f(z) = \frac{1}{t + i\,b}$ für einige Werte von b. Welche Kurvenart entsteht?

Probl. 5 Wenn man die beiden obigen Kurvenarten übereinander legt, so entsteht ein „Gitter". Skizziere dieses Gitter.

Probl. 6 Studiere im Skript den Stoff über Möbiustransformationen. Handelt es sich bei $z \longmapsto f(z) = \frac{1}{z}$ um eine solche Transformation?

32.3 Link zu den Lösungen Phase 31

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_15.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_15.nb

Kapitel 33

Phase 32 (II/16)

33.1 Stoffprogramm Phase 32 ◇ E+M ◇

⊘ Testrückgabe, Testbearbeitung, Abschluss, Erledigung von ausstehenden Arbeiten u.s.w.

Arbeiten

http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/Matlab_Octave00.pdf

33.2 Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 16 ◇

Generelles:

Probl. 1 Mache eine Generalrepedition nach eigenem Plan (Prüfungsvorbereitung).

Probl. 2 Verfasse einen Kommentar: Wo könnte man Zeit sparen und wo braucht man mehr Zeit nach deiner Meinung?

33.3 Link zu den Lösungen Phase 32

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_16.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Algb_EuM_Bach/LEMAlg2_16.nb

Kapitel 34

Tests

34.1 Test aus den Jahren 2005 – 2009

34.2 Test ◇ E+M1 Algebra 01/05 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. („Exakt“ heisst „ohne Dezimalbrüche“ im Resultat.) Wichtig: Immer eine Skizze. Alle Teilaufgaben geben gleichviele Punkte.

Probl. 1 Gegeben sind die Punkte $O(0,0), A(4,3), B(6,5)$ und $C(2,8)$. Berechne die Flächeninhalte (Flächenprodukte) von $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ und $\triangle OCA$ sowie deren Summe unter Beibehaltung des Vorzeichens. Was stellt man fest?

Probl. 2 Die Resultierende von zwei Kräften $\vec{F_1}$ von 1 N mit Richtung $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{F_2}$ von 1 N mit Richtung $\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ soll in drei Komponenten zerlegt werden, die parallell zu den Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind. Berechne die Länge der Zerlegungskomponente in Richtung $\vec{a}$.

Probl. 3 Gegeben sind vier Punkte A, B, C und D durch
$\overrightarrow{OA}= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD}= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne das Volumen des Tetraeders $ABCD$.

(b) Berechne den Inhalt der Oberfläche des Tetraeders $ABCD$.

(c) Berechne bei B den Winkel $\angle(ABC)$.

Probl. 4 Gegeben ist in Dreieck $\triangle ABC$ mit $A(4,5,-6)$, $B(6,2,-5)$, $C(2,16,1)$.

(a) Kann man einen Punkt X auf der Seite $\overline{BC}$ derart finden, dass $\overline{BC}$ rechtwinklig auf $\overline{AX}$ steht? Wenn ja, so ist dieser Punkt X zu berechnen.

(b) Dann ist zu entscheiden, ob X zwischen B und C oder ausserhalb der Strecke liegt resp. mit einer Ecke zusammentrifft.

(c) Wenn man durch A und X eine Gerade legt, so durchstösst diese irgendwo die (x,y)–Ebene (Grundebene) oder ist parallel zu dieser. Im letzten Fall vereinbaren wir, dass die Gerade die Ebene „im Unendlichen“ durchstösst. Man berechne den Durchstosspunkt.

WIR1

Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_05_01_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_05_01_Loes.nb

34.3 Test ◇ E+M1 Algebra 02/05 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

Probl. 1 (a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus. Zeige den Lösungshergang. Entscheide, ob es eine, keine oder unendlich viele Lösungen gibt und untersuche, was die Dimension der Lösungsmenge ist.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus. Zeige den Lösungshergang. Entscheide, ob es eine, keine oder unendlich viele Lösungen gibt und untersuche, was die Dimension der Lösungsmenge ist.

(c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 5 & 9 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus. Zeige den Lösungshergang. Entscheide, ob es eine, keine oder unendlich viele Lösungen gibt und untersuche, was die Dimension der Lösungsmenge ist.

Probl. 2 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \beta \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \gamma \end{pmatrix}$

Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_k$ mit Hilfe von Determinanten.

(a) Für welche $\alpha,\ \beta$ hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ keine Lösung?

(b) Für welche $\alpha,\ \beta$ hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ unendlich viele Lösung?

(c) Für welche $\alpha,\ \gamma$ hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ keine Lösung?

(d) Für welche $\alpha,\ \gamma$ hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ unendlich viele Lösung?

Probl. 3 $M = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}),\ \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1+u \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Zeige die Berechnung von $\det(M)$.

(b) Für welches u hat die Matrix $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ einen Rang < 4?

Probl. 4 Sei $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ A = M^T \cdot D \cdot (M^T)^{-1}$

(a) Berechne A.

(b) Berechne A^T.

(c) Berechne A^{-1}.

(d) Löse $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Probl. 5 Gegeben ist die Ebene Φ durch die Gleichung $2\,x - 3\,y + 5\,z = 4$. Der Punkt $P_0(5; 8; 11)$ soll senkrecht zur Ebene Φ so verschoben werden, dass er auf der andern Seite der Ebene zu liegen kommt und sein Abstand von der Ebene 10 beträgt. Berechne die Koordinaten vom P_1.

Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_05_02_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_05_02_Loes.nb

34.4 Test ◇ E+M1 Algebra 03/06 ◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Zu einer Aufgabe gehört immer auch eine Skizze!*

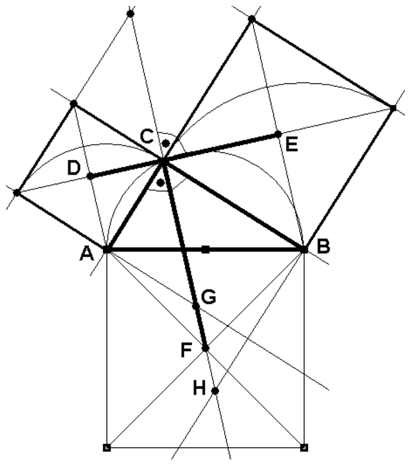
Vektoralgebra– und Geometrie, Determinanten

Probl. 1 *Hinweis:*
Wähle $C = (0;0)$, $A = (0:1)$, $B = (x;0)$.

(a) Berechne allgemein den Winkel zwischen $\overline{DE}$ und $\overline{CF}$.

(b) Berechne allgemein den Quotienten $q_1 = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{CF}|}$.

(c) Berechne allgemein den Quotienten $q_2 = \frac{|\overline{GF}|}{|\overline{FH}|}$.



Probl. 2 (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Berechne $\det(A)$ nach Sarrus.

(b) A wird so erweitert, dass die folgende Matrix entsteht:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & y & ln(98765) & e^{9876} \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & y & \tan(100) & u\,2\,\pi \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \leadsto \text{ Berechne } \det(B) \text{ von Hand exakt.}$$

(c) Eine 10×10–Matrix C hat folgende Zeilen:

1. Zeile: $\vec{v}^T - 0 \cdot \vec{b}^T$
2. Zeile: $\vec{v}^T - 1 \cdot \vec{b}^T$
3. Zeile: $\vec{v}^T - 2 \cdot \vec{b}^T$
4. Zeile: $\vec{v}^T - 3 \cdot \vec{b}^T$
5. Zeile: $\vec{v}^T - 4 \cdot \vec{b}^T$

. . . u.s.w.

Kann man aus diesen Angaben schon den Wert der von $\det(C)$ ermitteln? Berechne diesen Wert, falls das möglich ist!

Probl. 3 Gegeben sind die Punkte $A(14;10;0)$, $B(11;7;12)$, $C(0;2;8)$.

(a) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig–rechtwinklig ist.

(b) Suche einen Punkt D so, dass ein Quadrat $ABCD$ entsteht.

(c) Suche einen Punkt S so, dass die Figur $ABCDS$ eine quadratische Pyramide ist mit dem Volumen $V = 3888$ und der Spitze S (2 Lösungen).

Probl. 4 Gegeben ist eine Kugel $K: \; x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 5 = 0$ und eine Ebene Φ durch die Koordinaten $A(-1;9;9)$, $B(1;10;11)$, $C(-5;5;9)$.
M sei dabei der Kugelmittelpunkt. O ist der Ursprung des Koordinatensystems.

(a) Berechne den Punkt der Kugel K, welcher von der Ebene Φ den kürzesten Abstand d hat.

(b) Berechne diesen Abstand d.

(c) Berechne die Punkte C und D auf der Geraden $g(A,B)$ durch A und B, die in jenen Tangentialebenen an K liegen, welche senkrecht auf g stehen.

(d) Berechne M.

(e) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AMO.

Viel Glück!

WIR1

Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_06_01_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_06_01_Loes.nb

34.5 Test ◇ E+M1 Algebra 04/06 ◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Zu einer Aufgabe gehört eine Skizze, falls das Sinn macht!*

Lineare Abbildungen

Probl. 1 Berechne jeweils die Eigenwerte und die Eigenvektoren:

(a) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Probl. 2 (a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})$.
Wie gross muss a sein, damit alle Eigenwerte und Eigenvektoren reell sind?

(b) Wähle $a = -3$ und bilde dann den Vektor $\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ab.
In welche entsprechenden Vektoren kann man den Bildvektor $A \cdot \vec{v}$ aufspalten?

(c) Wähle $a = 4$ und bilde dann den Vektor $\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ab.
In welche entsprechenden Vektoren kann man den Bildvektor $A \cdot \vec{v}$ aufspalten?
Was ist in diesem Falle anders als im vorhergehenden Fall?

Probl. 3 Gegeben ist $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $\det(B)$.

(b) Für eine unbekannte Matrix M gilt $M \cdot \vec{v}_1 = 2 \cdot \vec{v}_1$, $M \cdot \vec{v}_2 = -4 \cdot \vec{v}_2$, $M \cdot \vec{v}_3 = 1 \cdot \vec{v}_3$. Berechne M sowie $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}$.

(c) Berechne M falls gilt: $M \cdot \vec{v}_1 = 2 \cdot \vec{v}_1$, $M \cdot \vec{v}_2 = -4 \cdot \vec{v}_2$, $M \cdot \vec{v}_3 = 1 \cdot \vec{v}_2$. Was ändert sich am vorhergehenden Resultat?

Probl. 4 Gegeben ist eine Projektionsrichtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ sowie eine Ebene Φ :

$\vec{v}(\lambda, \mu) = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Weiter kennen wir den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

(a) Berechne die Projektionsmatrix P für die Projektionsrichtung $\vec{u}$ und die Ebene Φ.

(b) Berechne die Projektion Q' des Punktes $Q = (7, 2, 6)$, $\overrightarrow{OQ'} = P \cdot \overrightarrow{OQ}$.

(c) Projiziere Q' in die Grundebene $(x \times y)$. Der Bildpunkt dort sei Q''. Drehe dann $\overrightarrow{OQ''}$ mit Ursprung als Zentrum in der Grundebene um den Winkel $+\alpha$. Berechne den Bildpunkt Q'''.

Probl. 5 Gegeben seien die oben genannten Matrizen M_3 sowie B. X erfüllt die Gleichung $B^T \cdot X \cdot M_3 = M_3 \cdot B^T$. Berechne, falls möglich, die Matrix X.

Viel Glück!

Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_06_02_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_06_02_Loes.nb

34.6 Test ◇ E+M1 Algebra 01/07 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Vektoralgebra– und Geometrie

Probl. 1 (a) Durch fortgesetzte Spiegelungen des Punktes $P_1(3;2;1)$ an allen drei Grundebenen entstehen 8 Punkte, welche ein rechteckiges Prisma resp. einen rechteckigen Spat oder Parallelepiped (Cuboid) bilden. Berechne alle möglichen Winkel zwischen den Raumdiagonalen dieses Körpers.

(b) Berechne die Inhalte der mittels einer Raumdiagonalen und den restlichen Eckpunkten gebildeten Dreieckflächen. Wieviele verschiedene solche Dreiecksinhalte gibt es?

Probl. 2 Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dar. (Anzugeben sind die Streckungsfaktoren der Basisvektoren.)

Probl. 3 Berechne mit Hilfe der Regel von Sarrus das Spatvolumen, das durch die oben gegebenen Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ sowie dem Ursprung definiert ist. (Sarrus zeigen!)

Probl. 4 Im Raum sind zwei Geraden $g_1:\ \vec{x}_1 = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}_1$ sowie $g_2:\ \vec{x}_2 = \vec{r}_2 + \mu\,\vec{a}_2$ gegeben. Berechne den kürzesten Abstand zwischen den Geraden. Dabei ist $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Probl. 5 (a) Berechne einen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, welcher zu den beiden Richtungsvektoren der in der letzten Aufgabe gegebenen Geraden senkrecht steht und dazu die Gleichung $\langle \vec{x}, \vec{r}_2 \rangle = 10$ erfüllt. ($\vec{r}_2$ ebenfalls wie in der letzten Aufgabe, $z \geq 0$.)

(b) Berechne daraus den Inhalt der Parallelogrammfläche, welche durch $\vec{r}_2$, $\vec{x}$ und den Ursprung aufgespannt wird.

(c) Berechne den Winkel zwischen den Parallelogrammseiten beim Urspung.

%

Probl. 6 (a) Gegeben ist der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor wird fünf mal mit den Winkel $\varphi = \dfrac{2\,\pi}{5}$ um die z–Achse gedreht. Berechne die entstehenden vier neuen Punkte.

(b) Berechne den Inhalt des entstehenden Fünfecks.

Viel Glück!

Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0708_01_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0708_01_Loes.nb

34.7 Test ◇ E+M1–07/08–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Diverses aus Vektoralgebra, Geometrie, Matrizen– und Determinantenrechnung

Probl. 1 Gegeben ist ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt $M(5,\, 4)$ und dem Radius $r = 2$. Dazu sei $P_0(1,\, 1)$ ein Punkt, den wir als Pol bezeichnen.

(a) Berechne die Polare p zu P_0 sowie deren Schnittpunkte mit k_1. Skizziere alsdann die Situation.

(b) Berechne die Tangenten von P_0 aus an k_1 und dazu die Tangentenschnittpunkte mit k_1. Trage die erhaltenen Punkte in die Skizze ein.

(c) Berechne eine Gleichung für die Gerade $g_1 = \overline{P_0M}$. Berechne damit die Schnittpunkte $g_1 \cap k_1$. Trage die erhaltenen Punkte in die Skizze ein.

(d) Berechne einen Punkt P_1, so dass k_1 der Apolloniuskreis zu $\overline{P_0P_1}$ ist. Trage den erhaltenen Punkt in die Skizze ein. Was fällt an diesem Punkt besonders auf?

(e) Gegeben ist ein zweiter Kreis mit dem Mittelpunkt P_0 und dem Radius $2\,r$. Suche zu k_1 und k_2 die Potenzgerade und skizziere die Situation.

(f) Bestimme den Schnittpunkt der Potenzgeraden mit der Geraden durch die beiden Kreismittelpunkte.

Probl. 2 Gegeben sind: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne B^{-1}.

(b) Berechne $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$.

(c) Berechne $A \cdot A$ und $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = A^{10}$.

(d) Berechne $\det(A)$ und $\det(D)$. Was stellt man fest?

(e) Berechne $A \cdot \vec{a}$ und $A \cdot \vec{b}$.

(f) Berechne $A \cdot (\lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{b})$.

(g) Der Ursprung spannt mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Parallelogramm auf. Berechne den Inhalt F_1 dieser Figur.

(h) Berechne den Inhalt $F_2(\lambda,\, \mu)$ der Figur, die durch den Ursprung und $\lambda\, \vec{a}$ sowie $\mu\, \vec{b}$ gegeben ist.

(i) Berechne $\dfrac{F_2(\lambda,\, \mu)}{F_1}$

Probl. 3 Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A,\ B$ und C:

$$A = A(0,\,0),\ \ B = B(10,\,0),\ \ C = C(3,\,8).$$

(a) Berechne den Höhenschnittpunkt H.

(b) Berechne den Schnittpunkt der Schwerlinien S.

(c) Berechne den Umkreismittelpunkt U.

(d) Wie steht es mit der linearen Abhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{US}$ und $\overrightarrow{UH}$?

(e) Berechne das Verhältnis $\dfrac{|\overrightarrow{UH}|}{|\overrightarrow{US}|}$.

(f) Sei $\vec{a} = \overrightarrow{UA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{UB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{UC}$. Berechne $\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{s} = \dfrac{1}{3}\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Fällt dabei etwas auf?

(g) Bekanntlich schneidet eine Schwerlinie durch einen Eckpunkt die dem Eckpunkt gegenüber liegende Seite genau in der Seitenmitte. Diesen Schnittpunkt nennen wir Seitenmittelpunkt $S_a,\ S_b$ oder S_c. Berechne den Umkreismittelpunkt U_S des Dreiecks $\triangle(S_a\,S_b\,S_c)$ und auch den Radius r_S dieses Dreiecks.

(h) Eine von einem Eckpunkt aus gezogene Höhe schneidet die gegenüberliegende Seite hingegen im Höhenfusspunkt $H_a,\ H_b$ oder H_c. Berechne den Umkreismittelpunkt U_H des Dreiecks $\triangle(H_a\,H_b\,H_c)$ und auch den Radius r_H dieses Dreiecks. Fällt dabei etwas auf?

(i) Untersuche, wie es steht mit der linearen Abhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{UH}$ und $\overrightarrow{UU_H}$.

(j) Berechne das Verhältnis $\dfrac{|\overrightarrow{UH}|}{|\overrightarrow{UU_H}|}$.

Probl. 4 Gegeben ist ein Dreieck im Raum mit den Eckpunkten $A,\ B$ und C, das als Grundfläche G eines Körpers dient. Es gilt: $A = A(0,\,0,\,1),\ \ B = B(10,\,0,\,1),\ \ C = C(3,\,8,\,3)$. Weiter ist ein Punkt $D = D(1,\,2,\,8)$ gegeben. Die Figur $ABCD$ bildet somit ein Tetraeder.

(a) Berechne den Volumeninhalt, den Grundflächeninhalt und daraus die Länge der Höhe h_D von D aus auf die Grundfläche G.

(b) Berechne den Höhenfusspunkt H_D von h_D in der Grundfläche G.

(c) Nun wird D so verschoben, dass die Länge der Höhe nicht ändert, der neue Höhenfusspunkt jedoch mit C zusammenfällt. Berechne die Koordinaten von D.

Viel Glück!

Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0708_02_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0708_02_Loes.nb

34.8 Test ◊ E+M1–07/08–03 ◊

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◊ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Diverses aus Matrizenrechnung und Eigenwerttheorie

Probl. 1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind die Eigenvektoren einer Matrix A. Der zu $\vec{x}_1$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_1 = 20$, der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_2 = 30$.

(a) Bilde mit den Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ eine Matrix X und berechne ihre Eigenwerte. Sind diese Eigenwerte ganzzahlig?

(b) Entscheide, ob die Matrix A eine Fixgerade besitzt. (Begründung!)

(c) Konstruiere die Matrix A und vergleiche sie mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 21 & 6 \\ \frac{3}{2} & 29 \end{pmatrix}$. Was stellt man fest?

(d) Diagonalisiere A : $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ und berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von D.

(e) Berechne und vergleiche die charakteristischen Polynome $P_A(\lambda)$ und $P_D(\lambda)$ von A und D.

(f) Ermittle aus diesen Polynomen die Spur sowie die Determinante von A und D.

(g) Gegeben ist derPunkte $P_1(5, -3)$. Bilde diesem Punkt mit Hilfe der Matrix A ab, d.h. berechne den Bildpunkt Q.

(h) Berechne auch die Eigenwerte von B. Was stellt man fest?

Probl. 2 Gegeben sind die Punkte $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$, $P_3(3,2)$.

(a) Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = 62^o$.

(b) Drehe damit das Dreieck $F_1 = \triangle(P_1P_2P_3)$ um φ und berechne die Eckpunkte des Bilddreiecks $F_2 = \triangle(Q_1Q_2Q_3)$.

Probl. 3 Gegeben ist Gerade $g: \ \vec{v} = \vec{0} + t \cdot \vec{x}_1$ mit $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie der Punkte $P(7, -2)$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix $S(g)$.

(b) Spiegele damit P, d.h. berechne den Bildpunkt Q.

%

Probl. 4 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Kontrolliere, ob diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden zusammen mit dem Ursprung O eine Ebene Φ. $\vec{u}$ zeigt die Projektionsrichtung bei der Projektion auf Φ an.

(a) Zeige die Kontrolle der linearen Unabhängigkeit der drei oben erwähnten Vektoren.

(b) Konstruiere die Projektionsmatrix.

(c) Projiziere den Punkt $P(100, 100, 100)$ in Φ, d.h. berechne den Bildpunkt Q.

Probl. 5 Durch die Gerade $g: \ \vec{x} = \vec{0} + t \cdot \vec{a}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ist eine Drehachse im Raum gegeben. Der Punkt $P(5, 4, 6)$ soll um g mit Blickrichtung $-\vec{a}$ um $+36^o$ gedreht werden.

(a) Konstruiere die Drehmatrix.

(b) Berechne den Bildpunkt Q von P bei der Drehung.

Probl. 6 Zum Punkt $P(10, 10)$ gehört der Ortsvektor $\vec{x}_0 = \overrightarrow{OP}$. $\vec{x}_0$ wird mit Hilfe der Matrix $D = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{7}) & -\sin(\frac{\pi}{7}) \\ \sin(\frac{\pi}{7}) & \cos(\frac{\pi}{7}) \end{pmatrix}$ in $\vec{y}_0 = D \cdot \vec{x}_0$ abgebildet. Anschliessend wird $\vec{y}_0$ mit Hilfe der Matrix $S = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ in $\vec{x}_1 = S \cdot \vec{y}_0$ abgebildet. Dieses Verfahren wird danach nach den Regeln $\vec{y}_n = D \cdot \vec{x}_n$ und $\vec{x}_{n+1} = S \cdot \vec{y}_n$ fortgesetzt. Berechne die ersten Glieder der Folge $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ... und zeichne die dazugehörigen Punkte in eine *Skizze* ein. Was ist zu *vermuten* über die entstehende Folge der Vektoren bezüglich ihrer Lage und eventueller Konvergenz?

Viel Glück!

Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0708_03_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0708_03_Loes.nb

34.9 Test ◇ E+M1–08/09–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 Erkläre so gut wie möglich, was die folgenden Matlab-Befehle (Octave-Befehle) machen resp. welche Ausgabe zu erwarten ist:

(a) `u=[0 2 4 8 9]; length(u)` (b) `u=[0 2 4 8 9]; size(u)`

(c) `m=[3 0 -5]; n=[2 1 6]; m+n` (d) `m=[3 0 -5]; n=[2 1 6]; dot(m,n)`

(e) `m=[3 0 -5]; n=[2 1 6]; cross(m,n)` (f) `format long; a=sqrt(90)`

Probl. 2 Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a\,x + 2\,y + 3\,z &= 4 \\ b\,x - 2\,y + 3\,z &= 4 \\ x + 2\,y - c\,z &= d \end{aligned}$$

(a) Löse das Gleichungssystem mit Hilfe des Gauss-Algorithmus für $a = b = 1$, $c = 3$, $d = 4$. (Der Algorithmus muss nachvollziehbar sein.)

(b) Löse das Gleichungssystem (Algorithmus hier frei wählbar) für $b = 1$, $c = 3$, $d = 4$ und berechne die Lösungen in Abhängigkeit von a. Gibt es ein a, für das das System keine oder undendlich viele Lösungen hat? (Im Falle von unendlich vielen Lösungen ist die Dimension des Lösungsraumes anzugeben.)

(c) Löse das Gleichungssystem (Algorithmus hier frei wählbar) für $a = 1$, $c = 3$, $d = 4$ und berechne die Lösungen in Abhängigkeit von b. Gibt es ein b, für das das System keine oder undendlich viele Lösungen hat? (Im Falle von unendlich vielen Lösungen ist die Dimension des Lösungsraumes anzugeben.)

(d) Löse das Gleichungssystem (Algorithmus hier frei wählbar) für $a = b = 1$, $d = 4$ und berechne die Lösungen in Abhängigkeit von c. Gibt es ein c, für das das System keine oder undendlich viele Lösungen hat? (Im Falle von unendlich vielen Lösungen ist die Dimension des Lösungsraumes anzugeben.)

(e) Löse das Gleichungssystem (Algorithmus hier frei wählbar) für $a = b = 1$, $c = 3$ und berechne die Lösungen in Abhängigkeit von d. Gibt es ein d, für das das System keine oder undendlich viele Lösungen hat? (Im Falle von unendlich vielen Lösungen ist die Dimension des Lösungsraumes anzugeben.)

Probl. 3 Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dar. (Anzugeben sind die Streckungsfaktoren der Basisvektoren.)

Probl. 4 Die vorhin definierten Vektoren $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$ bilden mit dem Ursprung ein Tetraeder.

(a) Berechne das Tetraedervolumen.

(b) Durch den Ursprung und die drei Vektoren werden drei Kanten definiert. Berechne die drei Winkel zwischen den Kanten in Grad (numerisch, 2 Stellen hinter dem Komma exakt) und stelle fest, ob diese gleich oder verschieden sind.

Probl. 5 Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{OP_0} = \vec{w} = \begin{pmatrix} 2.00 \\ -1.00 \end{pmatrix}$.

(a) Der Punkt P wird um den Winkel $\varphi = +38.96^o$ um O gedreht.
Berechne den Bildpunkt $P\,'$.

(b) $P\,'$ wird an der Geraden $g:\ \vec{r}(t) = \vec{w} + t\begin{pmatrix} 1.50 \\ 2.50 \end{pmatrix}$ gespiegelt.
Berechne den Bildpunkt $P\,''$.

Probl. 6 Gegeben sind zwei Geraden im Raum: $g_1:\ \vec{x}_1 = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}_1$ sowie $g_2:\ \vec{x}_2 = \vec{r}_2 + \mu\,\vec{a}_2$ gegeben. Dabei ist $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Weiter ist der Punkt $P_0(5;5;5)$ gegeben.

(a) Stelle fest, ob die Geraden windschief sind.

(b) Berechne den kürzesten Abstand zwischen den Geraden, falls sie sich nicht schneiden.

(c) Berechne einen Vektor $\vec{n}$, der zu beiden Geraden normal steht und die Länge 1 hat. (Dezimalbrüche, 3 Stellen hinter dem Komma exakt).

(d) Berechne den Abstand des Punktes P_0 von der Ebene $\Phi:\ \vec{x} = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}_1 + \mu\,\vec{a}_2$.

Viel Glück!

Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0809_01_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0809_01_Loes.nb

34.10 Test ◇ E+M1–08/09–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle lösbaren Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♠ Unlösbare Aufgaben sind zu kommentieren.
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Diverses aus Vektor– und Matrizenrechnung sowie Eigenwerttheorie

Probl. 1 Gegeben ist eine Gerade $g:\ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechne den Abstand des Punktes $Q(3;10;14)$ von g.

Probl. 2 Gegeben ist eine Ebene $\Phi:\ \vec{v}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne den Abstand des Punktes $Q(3;10;14)$ von Φ.

(b) Berechne den Lotfusspunkt von Q auf Φ.

Probl. 3 Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Eigenwerte von M.

(b) Berechne die Eigenvektoren von M in der normierten Form.

(c) Stelle M dar in der Form $X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$, wobei X aus den Eigenvektoren besteht. D_λ ist die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten in der Diagonalen.

(d) Berechne die Eigenwerte von D_λ. Was stellt man fest?

(e) Berechne die Eigenvektoren von D_λ. Was stellt man fest?

(f) Skizziere die Geraden, welche gegeben sind durch die Eigenvektoren von M und den Ursprung. Schreibe für jede Gerade eine Parametergleichung auf.

(g) Bilde die eben betrachteten Gerade mit M ab. Was stellt man fest?

(h) Bilde die eben betrachteten, durch die Eigenvektoren von M und den Ursprung gegebenen Gerade mit Hilfe von D_λ ab. Decken sich die nun erhaltenen Geraden mit den in der vorhergehenden Teilaufgabe gewonnenen Geraden?

(i) Berechne die Matrix $M \cdot M := M^2 = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} \cdot X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} = \ldots$.

(j) Berechne mit Hilfe des eben entdeckten Tricks die Matrix M^{50}.

Probl. 4 Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dazu ist A diejenige Matrix, für welche gilt: $A \cdot \vec{e}_1 = \vec{a}_1,\ \ A \cdot \vec{e}_2 = \vec{a}_2,\ \ A \cdot \vec{e}_3 = \vec{a}_3$.

(a) Berechne die Matrix A.
(b) Berechne die Eigenwerte von A.
(c) Berechne die Eigenvektoren von A.
(d) W_e sei der Einheitswürfel, gegeben durch die Basisvektoren $\vec{e}_1,\ \ \vec{e}_2,\ \ \vec{e}_3$. W_e wird durch A in einen Spat Sp abgebildet. Berechne das Volumen V_{Sp} des Spats.
(e) Berechne die Determinanten von A und von A^{-1}.
(f) Vergleiche $\det(A)$ mit V_{Sp}. Was stellt man fest?
(g) Berechne das Produkt der Eigenwerte λ_k von A.
(h) Vergleiche $\prod\limits_{k=1}^{3} \lambda_k$ mit V_{Sp}. Was stellt man fest?
(i) Berechne das Bild von $s = \sum\limits_{k=1}^{3} \vec{e}_k$ bei der Abbildung durch A.
(j) Vergleiche s mit $\sum\limits_{k=1}^{3} \vec{a}_k$. Was stellt man fest?

Probl. 5 Gegeben ist die Gerade $g:\ \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie der Punkte $P(10, -1)$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix $S(g)$ für die Geradenspiegelung an g.
(b) Spiegele damit P, d.h. berechne den Bildpunkt P_1.
(c) Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = +10^o$.
(d) Drehe damit P_1 um O, d.h. berechne den Bildpunkt P_2.
(e) Spiegele den Punkt P_2 mittels $S(g)$ zurück, d.h. berechne den Bildpunkt P_3.
(f) P_4 sei der Punkt, welcher entsteht durch Drehung um O um $\varphi = -10^o$. Berechne P_4.
(g) Ist die Gleichung $P_3 = P_4$ mit den hier erhaltenen Resultaten richtig oder falsch?

Probl. 6 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Diese Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden zusammen mit dem Ursprung O eine Ebene Φ.

(a) Konstruiere eine Spiegelungsmatrix, mit deren Hilfe man einen Punkt P an Φ spiegeln kann.
(b) Spiegele damit den Punkt $P_0(10, 5, -3)$, d.h. berechne den Bildpunkt P_1.
(c) Konstruiere eine Projektionsmatrix, mit Hilfe welcher man einen Punkt P auf Φ projizieren kann. (Überlege dir dazu. wie man jetzt die Eigenwerte wählen muss.)
(d) Projiziere den Punkt $P(10, 10, 20)$ auf Φ, d.h. berechne den Bildpunkt Q.

Probl. 7 Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär sind:

$$M \cdot (E - X) \cdot M^{-1} + M - A \cdot M = A \cdot M^T - 2\,M$$

Viel Glück!

WIR1

Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0809_02_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0809_02_Loes.nb

34.11 Test ◇ E+M1–08/09–03 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle lösbaren Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♠ Unlösbare Aufgaben sind zu kommentieren.
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Aufgaben aus der Vektor– und Matrizenrechnung sowie Eigenwerttheorie

Probl. 1 Gegeben ist ein überbestimmtes Gleichungssystem $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit

$$M = M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob das gegebene System tatsächlich überbestimmt (Lösungsmenge leer) ist, oder ob es vielleicht linear abhängige Zeilen und damit eine Lösung hat.

(b) Bekanntlich gilt für Matrizen $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. Untersuche damit, ob $S = M^T \cdot M$ symmetrisch ist, d.h. ob $S = S^T$ gilt.

(c) Untersuche, ob das Gleichungssystem $M^T \cdot M \cdot \vec{x} = M^T \cdot \vec{b}$ eine Lösung hat und berechne allenfalls diese Lösung.

(d) In $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ wird mit jeder Zeile eine Gerade definiert. Skizziere die drei Geraden möglichst exakt und zeichne die allfällige Lösung von $(M^T \cdot M) \cdot \vec{x} = (M^T \cdot \vec{b})$ in die Skizze ein. Beurteile damit, falls möglich, ob das Verfahren mit $(M^T \cdot M) \cdot \vec{x} = (M^T \cdot \vec{b})$ eine brauchbare Näherung liefert.

Probl. 2 Gegeben sind die Gleichungssysteme $M_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ und $M_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob eines der beiden Systeme lösbar ist und berechne allenfalls die Lösung(en).

(b) Berechne die Ordnung (= Dimension(Urbildraum)) der beiden Systeme.

(c) Berechne in allfälligen Fällen, in denen Lösungen vorhanden sind, die Dimension des Lösungsraumes (=Dimension(Kern)).

(d) Berechne den Rang der Matrix M_2.
(*Hinweis:* Den Rang kann man entweder direkt berechen. Man kann aber auch obige Resultate zur Hilfe nehmen und den Rangsatz anwenden.) %

Probl. 3 Gegeben ist eine Ebene Φ durch den Ursprung und die Vektoren $\vec{a}$ sowie $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Konstruiere eine Matrix M_3, welche einen Punkt um die Normalachse n durch O auf Φ um einen Winkel von $+30^o$ oder -30^o dreht (eine der beiden Möglichkeiten wählen). Die Normalachse n ist gegeben durch den Normalenvektor $\vec{n}$ auf Φ.

(b) Drehe den Punkt $P_0(3, 8, 6)$ mittels M_3 um n.

Hinweis: Betrachte $\overrightarrow{OP_0} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{n}$ im System der Basis $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$. Man kann nun sofort eine Matrix A_3 aufschreiben, die Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ auf $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ abbildet. A_3^{-1} bildet daher $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ auf $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ab. So kann man jetzt auch $\overrightarrow{OP_0}$ abbilden. $\vec{e}_3 \perp (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ist das Bild von $\vec{n} \perp (\vec{a}, \vec{b})$. In der Situation mit der Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kann man um die 3. Achse drehen. Anschliessend bildet man mittels A_3 zurück ab und hat den gedrehten Bildpunkt $\overrightarrow{OP_0}$ im System $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$, wobei aber letztere Vektoren in der Orthonormalbasis geschrieben sind. Wenn man das begreift, hat also gar keinen grossen Aufwand beim Rechnen. . .

Probl. 4

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch den Ursprung und $\vec{v}_1$ ist eine Achse gegeben. Weiter ist durch $\vec{v}_2$ eine Abbildungsrichtung gegeben. In dieser Richtung wird beim Abbilden die Strecke von der Achse zu jedem Punkt in Abbildungsrichtung um -2 gestreckt. Es soll nun das Quadrat abgebildet werden, das durch $P_1(1, 1)$, $P_2(2, 1)$, $P_3(2, 2)$, $P_4(1, 2)$ gegeben ist.

(a) Konstruiere die Abbildungsmatrix.

(b) Berechne die Bildpunkte.

(c) Fertige eine saubere Skizze an mit Achsen, Fixpunkten der verlängerten Kanten der Figuren auf der Achse und Hilfslinien durch die Eckpunkte für die Abbildungsrichtung.

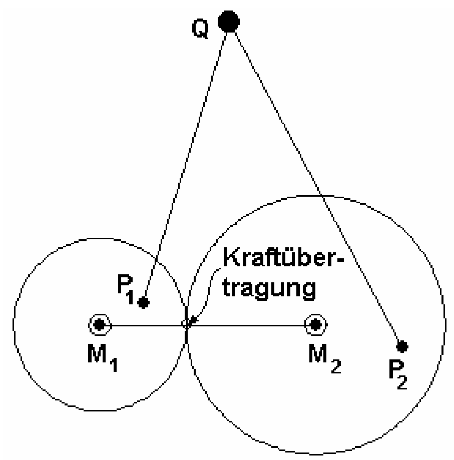
Probl. 5 Siehe Spezialblatt.

Viel Glück!

Zusatz zu Test ◇ E+M1–08/09–03 ◇

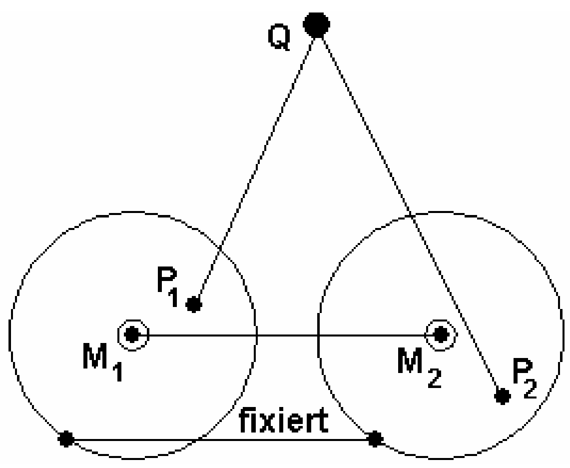
Rädergelenkgestänge

Die nachstehenden schematischen Skizzen zeigen drei Rädergelenkgestänge. Das sind Räder, an denen Stangen gelenkig gelagert sind. **Gefragt ist jeweils die Kurve, welche beschrieben wird vom Gelenkpunkt Q.**



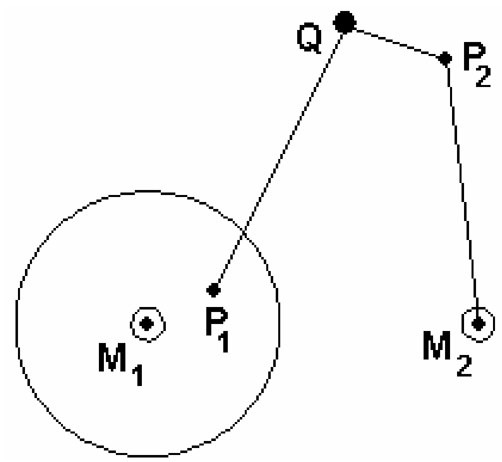
Skizze Beispiel 1:

Rad 1 mit Mittelpunkt M_1 und Rad 2 mit Mittelpunkt M_2 sind Zahnräder oder Reibräder ohne Schlupf. Sie drehen damit gegenläufig. Die Gelenkstangen sind in P_1 sowie in P_2 gelagert. Die Stangenlängen sind fix. In Q befindet sich ein Gelenk.



Skizze Beispiel 2:

Rad 1 mit Mittelpunkt M_1 und Rad 2 mit Mittelpunkt M_2 sind durch eine Stange verbunden. Sie drehen damit gleichläufig. Die Gelenkstangen sind in P_1 sowie in P_2 gelagert. Die Stangenlängen sind fix. In Q befindet sich ein Gelenk.



Skizze Beispiel 2:

Rad 1 mit Mittelpunkt M_1 sowie der am Gehäuse fixierte Lagerpunkt M_2 sind unabhängig. Rad 1 dreht. Die Gelenkstangen sind in P_1 sowie in M_2 gelagert. P_2 und Q bewegen sich. Die Stangenlängen sind fix. Untersuche erst, ob man den Winkel bei Q fixieren muss, um Stabilität zu erhalten. In P_2 befindet sich ein Gelenk.

Aufgabe:

Probl. 1 Bilde mit maximal zwei Mitstudenten eine Gruppe (maximal 3 Mitglieder). Einzelgruppen sind erlaubt, jedoch nicht empfohlen (Aufgabe in Sozialkompetenz).

Probl. 2 Wähle ein Radgelenkgestänge mit Abmessungen, wie sie noch bei keiner andern Gruppe gewählt sind (Kommunikationsaufgabe).

Probl. 3 Wähle ein Programmiertool zur Analyse, das an der BFH allgemein verfügbar ist

(a) Octave (Matlab)

(b) Mathematica

(c) Mathcad

(d) Z.u.L. („Zirkel und Lineal") — ein sehr empfehlenswertes Java-Plug-in-Tool für dynamische Geometrie der „Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt" (Bayern). $\leadsto$ **Freeware!**.

i. **Link** für den **Download**:
http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/zirkel/
Versionen deutsch oder englisch. Funktioniert mit Java, Web-Start direkt im Internet-Browser. Auch Installation möglich.

ii. **Einführung:** Video-Film mit Sprache (**Lautsprecher!**) aufrufbar auf unter Videos
http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/zirkel/doc_de/index.html

iii. **Erklärungen:**
http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/zirkel/doc_de/Data/Anwendungen/index.html

iv. **Tutorial:**
http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/zirkel/doc_de/Tutorial/index.html

v. **Weitere Links:**
http://www.wintotal.de/Software/index.php?id=2716
http://www.chip.de/downloads/Zirkel-und-Lineal_18149306.html
http://zirkel-und-lineal.softonic.de/

(e) Versuche mit einem der genannten Tools oder Programme die Ortskurve zu erzeugen, die der Punkt Q beschreibt, wenn sich das linke Rad positiv herum dreht. Diese Kurve ist für eine Präsentation aufzuzeichnen.

(f) 5-Miniuten-Präsentation vor der Klasse, enthaltend:

   i. Erklärung des Radgelenkgestänges mit den verwendeten Massen.
   ii. Präsentation der Kurve.
   iii. Kommentar zur Kurvenform und zu allfälligen Besonderheiten (geschlossen oder offen, eventuelle Endpunkte, Glattheit u.s.w.).
   iv. Kommentar zu den Schwierigkeiten und Vorteilen bei der verwendeten Programmierung. (Elektronische Abgabe des Codes für Windows, Datei „$Namen\_Person1\_Person2\_Person3.zir$“ oder entsprechend.)

(g) Bewertung:

   i. Anspruchsvolles Radgelenkgestänge, alles i.O.: 12 Punkte.
   ii. Weniger anspruchsvolles Radgelenkgestänge, alles i.O.: 9 Punkte.
   iii. Einfaches Radgelenkgestänge, alles i.O.: 9 Punkte.
   iv. Nicht alles i.O.: Abzug.

(h) Anrechnung mit dem Gewicht $\frac{1}{4}$ zum Test 2.

Viel Glück!

WIR1

Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0809_03_Loes.pdf

Für die Zusatzaufgabe:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Kleinprojekte1.htm

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TEM1Alg_0809_03_Loes.nb

34.12 Test aus den Jahren ab 2009

34.12.1 Testaufgaben

34.13 Test ◇ E+M1–09/10–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 Erkläre so gut wie möglich, was die folgenden Matlab-Befehle (Octave-Befehle) machen resp. welche Ausgabe zu erwarten ist:

(a) `[sqrt(2); cos(pi);]*cos(pi)` (b) `x=1.9; X=1e-4; x*X`

(c) `b=realmax; c=b+1e+308` (d) `u=[3,4,6]; v=[1,2,3]; cross(u,v)`

(e) `b=[3.4; 2.9; 6; -4.76; 8]; b*10` (f) `a=[3.4 2.9 6 -4.76 8]; a(2)+a(3)`

Probl. 2 Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3\,a\,x+2\,y+3\,z &= 1\\ 2\,x+2\,a\,y+4\,z &= 1\\ 3\,x+4\,y+a\,z &= 1 \end{aligned}$$

(a) Benutze die Cramerschen Regeln um herauszufinden, für welche Werte von a das System nicht lösbar ist.

(b) Löse des System im Falle $a=1$ exakt (Resultat in gemeinen Brüchen).

(c) Bestimme im Falle $a=3$ die Dimension des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Systems, falls eine Lösung existiert.

(d) Sei $P_0=P_0(1,1,1)$ ein Punkt. $\mathbb{L}_{inh,2}$ sei die Menge der Lösungen des Gleichungssystems mit den ersten beiden Gleichungen für $a=2$. $\mathbb{L}_{inh,2}$ besitzt eine geometrische Bedeutung. Gesucht ist die Distanz von P_0 zu $\mathbb{L}_{inh,2}$ (Dezimalbruch).

Probl. 3 Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix},\ \vec{v}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix},\ \vec{v}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\ \vec{w}=\begin{pmatrix}10\\12\\2\end{pmatrix}$.

(a) Untersuche, ob die Vektoren $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ linear abhängig sind.

(b) Sei $\vec{w}=\lambda_1\,\vec{v}_1+\lambda_2\,\vec{v}_2+\lambda_3\,\vec{v}_3$. Berechne die Streckungsfaktoren λ_i, falls solche existieren.

Probl. 4 (a) In einem Koordinatensystem wird eine Gerade g durch den Ursprung O und durch den ersten Oktanten im $\mathbb{R}^3$ derart gelegt, dass der Winkel zwischen g und jeder Achse immer gleich gross ist. Berechne diesen Winkel in Altgrad.

(b) Ein Würfel mit dem Mittelpunkt in O wird ist im Koordinatensystem so positioniert, dass der Eckpunkt $E_1 = E_1(10, 10, 10)$ ist. Skizziere den Würfel so, dass die drei von E_1 ausgehenden Kanten in deren Schnittpunkten S_1, S_2, S_3 die Achsen schneiden und berechne die Distanz von E_1 zu diesen Schnittpunkten.

(c) Berechne die Kantenlänge des Würfels.

(d) Berechne das Volumen des Körpers mit den Eckpunkten O, S_1, S_2, S_3, E_1.

Probl. 5 In einem Koordinatensystem sind die Punkte $P_1 = P_1(4, 1)$ und $P_2 = P_2(2, 3)$ gegeben. P_3 entsteht, indem man P_2 um $+68.44^o$ um O dreht.

(a) Berechne die Koordinaten von P_3.

(b) Berechne den Inhalt des von $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{0P_2} + \overrightarrow{P_1P_3}$ aufgespannten Parallelogramms.

Probl. 6 Gegeben sind zwei Geraden im Raum: $g_1 : \ \vec{x}_1 = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}_1$ sowie $g_2 : \ \vec{x}_2 = \vec{r}_2 + \mu\,\vec{a}_2$. Dabei ist $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Sei $P_0 = P_0(10, 1, -2)$.

(a) Untersuche, ob die Geraden windschief sind.

(b) Berechne den kürzesten Abstand zwischen den Geraden, falls sie sich nicht schneiden.

(c) Durch $\Phi : \ \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}_1 + \mu\,\vec{a}_2$ ist eine Ebene definiert. Berechne die Distanz des Punktes P_0 von der Ebene Φ.

Probl. 7 In einem Koordinatensystem sind die Punkte $M = P_1 = P_1(4, 1)$ und $P_2 = P_2(2, 3)$ gegeben. M ist Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch den Peripheriepunkt P_2 definiert ist.
Weiter ist $P_0 = P_3(-6, -2)$ ein äusserer Punkt, von dem aus die Tangenten an den Kreis konstruiert werden sollen.

(a) Berechne die beiden Tangentialpunkte T_1 und T_2. (Koordinaten als Dezimalbrüche angeben.)

(b) Berechne die Länge des Tangentenabschnittes $|\overline{P_0T_1}|$. (Dezimalbruch.)

(c) Von P_0 aus wird eine Sekante so gezogen, dass die dadurch im Kreis ausgeschnittene Sehne die Länge 1 hat. Berechne die Länge des Sekantenabschnittes von P_0 aus bis zum Punkt, wo die Sekante erstmals auf den Kreis trifft. (Dezimalbruch.)

Viel Glück!

34.14 Test ◇ E+M1–2010–FS–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle lösbaren Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♠ Unlösbare Aufgaben sind zu kommentieren.
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Diverses aus Vektor– und Matrizenrechnung sowie Eigenwerttheorie

Probl. 1 Gegeben sind zwei Geraden:

$$g_1 : \vec{v_1}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{v_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schneiden sie sich? — Berechne ihren Abstand, falls sie sich nicht schneiden.

Probl. 2 Gegeben ist eine Ebene $\Phi : \vec{v}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $Q(5; 15; 1)$ wird an Φ gespiegelt. L ist dabei der Lotfusspunkt. Der gespiegelte Vektor $\overrightarrow{LP'}$ wird anschliessend in den Vektor $\overrightarrow{LP''} = 2 \cdot \overrightarrow{LP'}$ gestreckt.

(a) Berechne die Koordinaten von L.

(b) Berechne die Koordinaten von P''.

Probl. 3 Gegeben sind zwei Matrizen: $M_1 = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Eigenwerte von M_1.

(b) Berechne die Eigenvektoren von M_1 in der normierten Form (dezimal).

(c) Berechne die Eigenwerte von M_2.

(d) Berechne die Eigenvektoren von M_2 in der normierten Form (dezimal).

(e) Was stellt man fest, wenn man die Resultate von M_1 und M_2 vergleicht?

(f) Berechne $M_1 \cdot M_2$ und $M_2 \cdot M_1$. Was stellt man fest?

(g) Berechne die Eigenwerte von $M_1 \cdot M_2$. Was stellt man fest?

(h) Berechne die Eigenvektoren von $M_1 \cdot M_2$ in der normierten Form. Feststellung?

(i) Berechne die EW und EV von $M_1 \cdot M_2 \cdot M_1$. Was stellt man fest?

Probl. 4 Die drei Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ werden in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix A zusammengefasst.
Ebenso fasst man die Vektoren $\vec{b}_1 = 2 \cdot \vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix B zusammen.

(a) Berechne die Eigenwerte von A.

(b) Berechne die Eigenwerte von B.

(c) Gibt es zwischen den Eigenwerten der beiden Matrizen Gemeinsamkeiten?

(d) Gibt es zwischen den Eigenvektoren der beiden Matrizen Gemeinsamkeiten? (Nummerierung beachten, dezimal!)

(e) Berechne die Eigenwerte von $A \cdot B$ und auch diejenigen von $B \cdot A$.

(f) Berechne die Summen der Eigenwerte von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob irgendwo ein Zusammenhang besteht.

(g) Berechne die Produkte der Eigenwerte von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob irgendwo ein Zusammenhang besteht.

(h) Berechne die Determinanten von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob ein Zusammenhang zu der vorhergehenden Teilaufgabe besteht.

(i) Gegeben ist der Punkt $Q(0,\, -2,\, 2)$. Sei $\overrightarrow{OP}_1 = A \cdot \overrightarrow{OQ}$ und $\overrightarrow{OP}_2 = B \cdot \overrightarrow{OQ}$. Berechne $\overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1$. Erkläre das Resultat.

Probl. 5 Der Ursprung O und die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmen die Ebene Φ. Dazu sei $P = P(-1,\, 2,\, 3)$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix S für die Spiegelung an Φ.

(b) Spiegele damit P, d.h. berechne den Bildpunkt P_1.

(c) Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = \dfrac{\pi}{5}$ in der Grundebene (um die z–Achse).

(d) Drehe damit P_1 um O, d.h. berechne den Bildpunkt P_2.

(e) Spiegele den Punkt P_2 mittels S zurück, d.h. berechne den Bildpunkt P_3.

(f) Konstruiere eine Projektionsmatrix, mit der ein Punkt auf Φ projiziert werden kann. (Man überlege sich dazu, was die Projektion mit der Spiegelung zu tun hat und wie man die Eigenwerte der Speigelungsmatrix abändern müsste, um eine Projektion zu erhalten.)

(g) P_4 sei die Projektion von P_3. Bereche P_4.

Probl. 6 Man konstruiere eine Translationsmatrix, welche für einem Vektor in homogenen Koordinaten eine Translation um $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ ausführt.

Probl. 7 Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär seien:

$$A \cdot (A + X) \cdot A + A + A^{-1} = A \cdot A^T + E$$

Viel Glück!

WIR1

34.15 Test ◇ M1–10–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle lösbaren Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♠ Unlösbare Aufgaben sind zu kommentieren.
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Probl. 1 **Achtung: In dieser Aufgabe zählen nur richtige Resultate. Passieren Folgefehler, so sind die später erreichten falschen Resultate wertlos. Daher sind Kontrollen und Plausibilitätsüberlegungen angebracht!**

Durch $A = A(3;\,1;\,4)$ ist die Achse $\overline{OA}$ gegeben. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Dazu kennt man noch $P_1 = P_1(2;\,0;\,6)$.

(a) Wähle den Vektor $\vec{b} = \vec{e}_1$ und konstuiere mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ sowie $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{c}$ zwei Vektoren, welche senkrecht auf $\vec{a}$ stehen. Berechne damit die Einheitsvektoren $\vec{e}_a,\ \vec{e}_c,\ \vec{e}_d$ für die Richtungen $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d},$ numerisch und schreibe danach die Resultate so auf, dass sie beim Korrigieren sofort sichtbar sind.

(b) Konstruiere eine Matrix M_1, welche $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_a$ abbildet und $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_c$ sowie $\vec{e}_3$ in $\vec{e}_d$.

(c) Bilde mit Hilfe von M_1^{-1} den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}_1$ in $\overrightarrow{OP'}_1$ ab.

(d) Konstruiere zwei Matrizen, welche $\overrightarrow{OP'}_1$ um die $\vec{e}_1$–Achse (mit Blick Richtung O) in $\overrightarrow{OP'}_2$ um den Winkel $\dfrac{2\,\pi}{3}$ und $\overrightarrow{OP'}_2$ um $\dfrac{4\,\pi}{3}$ in $\overrightarrow{OP'}_3$ drehen.

(e) Bilde $\overrightarrow{OP'}_2$ und $\overrightarrow{OP'}_3$ wieder mit M_1 zurück ab in $\overrightarrow{OP}_2$ und $\overrightarrow{OP}_3$. Damit erhält man eine Dreieckspyramide $OP_1P_2P_3$ mit der Spitze in O. ($P_2,\ P_3 = ?$)

(f) Berechne das Volumen der Pyramide.

Probl. 2 Gegeben ist die Ebene $\Phi: \quad \vec{r} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(a) Konstruiere eine Matrix M_2, welche den Ortsvektor irgend eines Punktes P in Richtung $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf Φ projiziert.

(b) Projiziere das Dreieck $\triangle(ABC)$ auf Φ. Das heisst: Berechne die Koordinaten der projizierten Punkte $A',\ B',\ C'$. $A = A(1;0;0),\ \ B = B(0;1;0),\ \ C = C(0;0;1)$.

(c) Berechne den Flächeninhalt von $\triangle(ABC)$ und vergleiche diesen mit dem Inhalt von $\triangle(A'\,B'\,C')$.

Probl. 3 $M_3 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von M_3

(b) Finde ein Polynom $P_2(X)$ mit $X = M_3$, dessen Wert $P_2(M_3)$ gerade M_3^{-1} ist: $P_2(M_3) = c_2\, M_3^2 + c_1\, M_3 + c_0\, E$. *Hinweis: Caley–Hamilton.*

Probl. 4 $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Berechne M_4^2, M_4^3, M_4^4. Was fällt auf?

(b) Berechne $M_4^2 \cdot M_4^2$, $M_4^3 \cdot M_4$ und $M_4 \cdot M_4^4$. Was fällt auf?

Probl. 5 Gegeben sind die Gleichungssysteme $M_5 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ und $M_5 \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix},\ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob eines der beiden Systeme lösbar ist und berechne dann allenfalls die Lösung(en).

(b) Berechne die Ordnung (= Dimension(Urbildraum)) der beiden Systeme.

(c) Berechne in allfälligen Fällen, dann wenn Lösungen vorhanden sind, die Dimension des Lösungsraumes (=Dimension(Kern)).

(d) Berechne den Rang der Matrix M_5.
(*Hinweis:* Den Rang kann man entweder direkt berechen. Man kann aber auch obige Resultate zur Hilfe nehmen und den Rangsatz anwenden.)

Probl. 6 Zusatzaufgabe:

Gegeben ist die Gleichung $\quad -2\,x_1^2 + \frac{4\,x_2\,x_1}{\sqrt{3}} + 2\,x_2^2 = 52$.

(a) Untersuche ob man hier das Muster $a\,x_1^2 + b\,x_1\,x_2 + c\,x_2^2$ in der Form $\vec{x^T} \cdot S \cdot \vec{x}$ mit Hilfe von $S = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$ und $X^{-1} = X^T$ schreiben kann.

(b) Schreibe, falls das möglich ist, die eingangs gegebene Gleichung in der Form $\vec{x^T} \cdot S \cdot \vec{x} = \vec{x^T} \cdot X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} \cdot \vec{x}$ mit $X^{-1} \cdot \vec{x} = \vec{y}$ etc. Was ist die einfachste Form der entstehenden Gleichung und was stellt sie geometrisch dar?

Viel Glück!

WIR1

34.16 Test ◇ M1–10–02a ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle lösbaren Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♠ Unlösbare Aufgaben sind zu kommentieren.
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Probl. 1 Achtung: In dieser Aufgabe zählen nur richtige Resultate. Passieren Folgefehler, so sind die später erreichten falschen Resultate wertlos. Daher sind Kontrollen und Plausibilitätsüberlegungen angebracht!

Durch $A = A(3;\,1;\,4)$ ist die Achse $\overline{OA}$ gegeben. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Dazu kennt man noch $P_1 = P_1(2;\,0;\,6)$.

(a) Wähle den Vektor $\vec{b} = \vec{e}_1$ und konstuiere mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ sowie $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{c}$ zwei Vektoren, welche senkrecht auf $\vec{a}$ stehen. Berechne damit die Einheitsvektoren $\vec{e}_a$, $\vec{e}_c$, $\vec{e}_d$ für die Richtungen $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, numerisch und schreibe danach die Resultate so auf, dass sie beim Korrigieren sofort sichtbar sind.

(b) Konstruiere eine Matrix M_1, welche $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_a$ abbildet und $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_c$ sowie $\vec{e}_3$ in $\vec{e}_d$.

(c) Bilde mit Hilfe von M_1^{-1} den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1}$ in $\overrightarrow{OP'_1}$ ab.

(d) Konstruiere zwei Matrizen, welche $\overrightarrow{OP'_1}$ um die $\vec{e}_1$–Achse (mit Blick Richtung O) in $\overrightarrow{OP'_2}$ um den Winkel $\dfrac{2\,\pi}{3}$ und $\overrightarrow{OP'_1}$ um $\dfrac{4\,\pi}{3}$ in $\overrightarrow{OP'_3}$ drehen.

(e) Bilde $\overrightarrow{OP'_2}$ und $\overrightarrow{OP'_3}$ wieder mit M_1 zurück ab in $\overrightarrow{OP_2}$ und $\overrightarrow{OP_3}$. Damit erhält man eine Dreieckspyramide $OP_1P_2P_3$ mit der Spitze in O. (P_2, P_3 = ?)

(f) Berechne das Volumen der Pyramide.

Probl. 2 Gegeben ist die Ebene $\Phi: \quad \vec{r} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(a) Konstruiere eine Matrix M_2, welche den Ortsvektor irgend eines Punktes P in Richtung $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf Φ projiziert.

(b) Projiziere das Dreieck $\triangle(ABC)$ auf Φ. Das heisst: Berechne die Koordinaten der projizierten Punkte A', B', C'. $A = A(1; 0; 0)$, $B = B(0; 1; 0)$, $C = C(0; 0; 1)$.

(c) Berechne den Flächeninhalt von $\triangle(ABC)$ und vergleiche diesen mit dem Inhalt von $\triangle(A'\,B'\,C')$.

Probl. 3 $M_3 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von M_3

(b) Finde ein Polynom $P_2(X)$ mit $X = M_3$, dessen Wert $P_2(M_3)$ gerade M_3^{-1} ist: $P_2(M_3) = c_2\, M_3^2 + c_1\, M_3 + c_0\, E$. *Hinweis: Caley–Hamilton.*

Probl. 4 $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Berechne $M_4^2,\ M_4^3,\ M_4^4$. Was fällt auf?

(b) Berechne $M_4^2 \cdot M_4^2,\ M_4^3 \cdot M_4$ und $M_4 \cdot M_4^4$. Was fällt auf?

Probl. 5 Gegeben sind die Gleichungssysteme $M_5 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ und $M_5 \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix},\ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob eines der beiden Systeme lösbar ist und berechne dann allenfalls die Lösung(en).

(b) Berechne die Ordnung (= Dimension(Urbildraum)) der beiden Systeme.

(c) Berechne in allfälligen Fällen, dann wenn Lösungen vorhanden sind, die Dimension des Lösungsraumes (=Dimension(Kern)).

(d) Berechne den Rang der Matrix M_5.
(*Hinweis:* Den Rang kann man entweder direkt berechen. Man kann aber auch obige Resultate zur Hilfe nehmen und den Rangsatz anwenden.)

Probl. 6 Zusatzaufgabe:

Gegeben ist die Gleichung $\quad -2\, x_1^2 + \frac{4\, x_2\, x_1}{\sqrt{3}} + 2\, x_2^2 = 52$.

(a) Untersuche ob man hier das Muster $a\, x_1^2 + b\, x_1\, x_2 + c\, x_2^2$ in der Form $\vec{x^T} \cdot S \cdot \vec{x}$ mit Hilfe von $S = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$ und $X^{-1} = X^T$ schreiben kann.

(b) Schreibe, falls das möglich ist, die eingangs gegebene Gleichung in der Form $\vec{x^T} \cdot S \cdot \vec{x} = \vec{x^T} \cdot X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} \cdot \vec{x}$ mit $X^{-1} \cdot \vec{x} = \vec{y}$ etc. Was ist die einfachste Form der entstehenden Gleichung und was stellt sie geometrisch dar?

Viel Glück!

WIR1

34.17 Test ◇ E+M1p–11/12–S2–01 ◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Zu einer Aufgabe gehört immer auch eine Skizze! Numerische Genauigkeit: 4 Ziffern (ab der 1. Ziffer ungleich 0).*

Vektoralgebra– und Geometrie, Determinanten

Probl. 1 Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(6, 5)$ und dem Radius $r = 4$. Dazu kennt man den Punkt $P(-1, 0)$. Von P aus zieht man die beiden Tangenten an den Kreis mit den Tangentialpunkten T_1 und T_2. Dabei hat T_1 eine kleinere y–Koordinate als T_2. Auf der Geraden $\overline{T_1T_2}$ liegt zwischen T_1 und T_2 ein Punkt Q, welcher durch das Streckenverhältnis $|\overline{T_1Q}| : |\overline{T_2Q}| = 2 : 1$ genau definiert ist. Die Gerade $\overline{PQ}$ schneidet den Kreis in den Punkten H_1 und H_2.

(a) Erstelle eine möglichst genaue Skizze von der Situation.

(b) Berechne nachvollziehbar numerisch die Koordinaten von T_1 und T_2.

(c) Berechne nachvollziehbar numerisch die Koordinaten von H_1 und H_2.

(d) Berechne nachvollziehbar numerisch die Werte $|\overline{PT_1}|^2$ resp. $|\overline{PT_2}|^2$ sowie $|\overline{PH_1}|\cdot|\overline{PH_2}|$. Was stellt man fest?

Probl. 2 (a) Berechne $B^{-1}(r) = \begin{pmatrix} r & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ nachvollziehbar von Hand.

(b) $A(r) = \begin{pmatrix} r & 2 & 3\,r \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ Berechne $\det(A(r))$ nach Sarrus.

(c) Entscheide, für welche r die Inverse $A(r)^{-1}$ nicht existiert

(d) Es gilt: $A(1) \cdot X \cdot A^{-1}(1) + E = A(0) - A(r) \cdot X \cdot A^{-1}(1)$. Berechne X formal (ohne Zahlen zu verwenden).

(e) Berechne X in der letzten Aufgabe für $r = 2$ und $r = -3$ in Zahlen, falls dies möglich ist.

Probl. 3 Gegeben sind die Punkte $A(16; y; 0)$, $B(13; 7; 12)$, $C(2; 2; 8)$.

(a) Bestimme y so, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

(b) Untersuche, ob das eben bestimmte Dreieck auch gleichschenklig ist.

(c) Suche einen Punkt D so, dass ein Rechteck $ABCD$ entsteht.

(d) Suche einen Punkt S so, dass die Figur $ABCDS$ eine Pyramide (Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke) mit rechteckigem Grundriss wird mit dem Volumen $V = 1944$ und der Spitze S (2 Lösungen, S liegt senkrecht über der Flächenmitte.)

Probl. 4 Gegeben sind die Punkte $P_1(5;\,0)$, $P_2(4;\,1)$, $P_3(3.5;\,2)$, $P_4(2;\,6)$, $P_5(-1;\,5)$. Die Paare $(P_1,\,P_2)$, $(P_2,\,P_3)$, $(P_3,\,P_4)$, $(P_4,\,P_5)$ definieren zusammen mit O jeweils ein Dreieck.

(a) Erstelle eine Skizze und berechne den Flächeninhalt des Gebildes.

(b) Wenn man den Punkte P_5 um $\varphi = 34.7^o$ dreht, erhält man den Punkt P_6. Erstelle die Drehmatrix D_φ numerisch.

(c) Berechne P_6 mit Hilfe von D_φ.

Probl. 5 Gegeben sind die Punkte $A(2,\,1,\,0)$, $B(3,\,8,\,0)$, $C(-1,\,-3,\,5)$, $D(6,\,-9,\,4)$.

(a) Stelle die vier Punkte in einer Skizze dar und ermittle, ob diese Punkte ein nicht reguläres Tetraeder bilden, oder ob alle Punkte in einer Ebene liegen (Begründung).

(b) Berechne den Oberflächeninhalt des Tetraeders, falls es existiert.

Probl. 6 Gegeben sind zwei Matrizen: $M_1 = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Eigenwerte von M_1.

(b) Berechne die Eigenvektoren von M_1 in der normierten Form (dezimal).

(c) Berechne die Eigenwerte von M_2.

(d) Berechne die Eigenvektoren von M_2 in der normierten Form (dezimal).

(e) Was stellt man fest, wenn man die Resultate von M_1 und M_2 vergleicht?

(f) Berechne $M_1 \cdot M_2$ und $M_2 \cdot M_1$. Was stellt man fest?

(g) Berechne die Eigenwerte von $M_1 \cdot M_2$. Was stellt man fest?

(h) Berechne die Eigenvektoren von $M_1 \cdot M_2$ in der normierten Form. Feststellung?

(i) Berechne die EW und EV von $M_1 \cdot M_2 \cdot M_1$. Was stellt man fest?

(j) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ definieren zusammen mit dem Ursprung O ein Parallelogramm PG. Diese Figur PG wird nun punktweise durch M_1 in eine Figur PG' abgebildet. Berechne den die Flächeninhalte F von PG sowie F' von PG' und untersuche, ob das Verhältnis $F_1' : F$ etwas mit den Eigenwerten von M_1 zu tun hat.

Viel Glück!

WIR1

34.18 Testvorbereitung ◇ E+M1p–11/12–02 Vorb ◇

Wichtig am Test:
♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 $M = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 4 \\ 8 & -11 & 4 \\ 8 & -10 & 3 \end{pmatrix},\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne die Eigenwerte von M.
(b) Berechne die Eigenvektoren von M. Erkläre die Eindeutigkeit.
(c) Berechne die Eigenwerte von M^{-1}.
(d) Berechne die Eigenvektoren von M^{-1}. Erkläre die Eindeutigkeit.
(e) Berechne die Eigenwerte von M^T.
(f) Berechne die Eigenvektoren von M^T. Erkläre die Eindeutigkeit.
(g) $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ definieren zusammen mit O ein Parallelogramm „Par". Berechne den Inhalt „$Inh(Par)$" und auch denjenigen des Bildparallelogramms „$Inh(M \cdot Par)$".
(h) Berechne die Determinante von M und vergleiche das Resultat mit $\dfrac{Inh(M \cdot Par)}{Inh(Par)}$.

Probl. 2 Die Matrix A definiert eine Abbildung, welche die Fixgerade $g:\ \vec{x}(t) = t \cdot \vec{v}_1$ hat ($\vec{v}_1$ wie in der letzten Aufgabe) und welche den Vektor $\vec{v}_2$ ($\vec{v}_2$ wie in der letzten Aufgabe) in $\vec{v}_2\,' = -2\,\vec{v}_2$ sowie $\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ in $\vec{w}\,' = 3\,(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ abbildet.

(a) Berechne die Matrix A.
(b) Sei $\overrightarrow{OQ} = 2\,\vec{v}_1 - 3\,\vec{v}_2$. Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,'$ von $\overrightarrow{OQ}$ bei der Abbildung mit A.
(c) Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,''$ von $\overrightarrow{OQ}\,'$ bei der Abbildung mit A.

Probl. 3 Gesucht ist eine Matrix B, welche einen Vektor an der durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie O gegebenen Ebene orthogonal spiegelt.

(a) Berechne B.
(b) Bilde mit B den Punkt $P(5; 4, 2)$ ab.
(c) Sei $B^2 = B \cdot B,\ \ B^{k+1} = B^k \cdot B$. Berechne B^{100}.

Probl. 4 Löse die Matrixgleichung nach X auf und vereinfache, falls dies möglich ist.

$$(U^{-1} \cdot W)^{-1} \cdot (U^{-1} \cdot W) \cdot X \cdot W^T - E = (((U^{-1})^T \cdot W^T)^{-1})^T$$

%

Probl. 5 Gegeben sind die Punkte

$$P_1(5;\,0;\,1),\ \ P_2(4;\,1;\,-1),\ \ P_3(3.5;\,2;\,10),\ \ P_4(2;\,6;\,1),\ \ P_5(-1;\,5;\,8),\ \ P_6(-2;\,12;\,0).$$

(a) Berechne eine Matrix G, welche P_1 in P_4 und P_2 in P_5 und P_3 in P_6 abbildet.

(b) Wenn man den Punkte P_1 um $\varphi = +12^o$ um die x–Achse dreht, erhält man den Punkt P_7. (Durch die Drehung wird die positive y–Achse in Richtung positive z–Achse bewegt.) Erstelle die Drehmatrix D_φ. numerisch.

(c) Berechne P_7 mit Hilfe von D_φ.

(d) Bilde mit Hilfe von G den Punkt P_7 ab.

Probl. 6 Gegeben ist die Matrix $S = H+H^T,\ \ H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, sowie der Vektor $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Um welchen Typ Matrix handelt es sich bei S?

(b) Berechne die Eigenwerte von H und vergleiche diese mit denjenigen von S. Sieht man einen Zusammenhang?

(c) Berechne $\vec{a}_2 = H \cdot \vec{a}_1,\ \ \vec{a}_3 = H^T \cdot \vec{a}_1,\ \ \vec{a}_4 = S \cdot \vec{a}_1$. Zusammenhang?

(d) Sei $A = H + H^{-1}$. Berechne $A \cdot \vec{a}_1$.

Probl. 7 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor einer Geraden g durch O. Der Punkt $Q(-1,\,4,\,2)$ wird um $\varphi = +\frac{\pi}{8}$ um die Achse g gedreht (im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung $\vec{a}$). Berechne die Drehmatrix sowie den Bildpunkt $Q\,'$.

WIR1-12

Viel Glück!

34.19 Test ◇ E+M1p–11/12–S2–02 ◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Zu einer Aufgabe gehört immer auch eine Skizze! Numerische Genauigkeit: 4 Ziffern (ab der 1. Ziffer ungleich 0).*

Matrizen, Abbildungen, Eigenwerte. Zeit: 1 Std.

Probl. 1 $$M = \begin{pmatrix} -27 & 24 & -20 & 2 \\ -32 & 29 & -24 & 2 \\ -6 & 6 & -5 & 0 \\ -40 & 36 & -32 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Eigenwerte von M.

(b) Berechne die Eigenvektoren von M und ermittle, welche der folgenden Vektoren sich durch maximal 2 Eigenvektoren linear kombinieren lassen:
$\vec{h}_1 = \{0, 1, 1, -2\}^T$, $\vec{h}_2 = \{1, 2, 1, 0\}^T$, $\vec{h}_3 = \{-2, 0, 3, 4\}^T$, $\vec{h}_4 = \{1, 1, 0, 1\}^T$.

(c) Berechne die Eigenwerte von M^{-1}.

(d) Berechne die Eigenvektoren von M^{-1} und ermittle wiederum, welche der obigen Vektoren $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$, $\vec{h}_4$ sich durch maximal 2 Eigenvektoren linear kombinieren lassen.

(e) Berechne die Eigenwerte von M^T.

(f) Berechne die Eigenvektoren von M^T und ermittle wiederum, welche der obigen Vektoren $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$, $\vec{h}_4$ sich durch maximal 2 Eigenvektoren linear kombinieren lassen.

(g) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ definieren zusammen eine Matrix „W“, welche mit O zusammen einen Spat definiert. Berechne den Inhalt „$Inh(W)$“ und auch denjenigen des Bildspats „$Inh(M \cdot W)$“.

(h) Berechne die Determinante von M und vergleiche das Resultat mit $\dfrac{Inh(M \cdot W)}{Inh(W)}$.

Probl. 2 Die Matrix A definiert eine Abbildung, welche die Fixgerade $g: \ \vec{x}(t) = t \cdot \vec{v}_1$ hat ($\vec{v}_1$ wie in der letzten Aufgabe) und welche den Vektor $\vec{v}_2$ (ebenso $\vec{v}_2$ wie in der letzten Aufgabe usw.) in $\vec{v}_2{}' = -\vec{v}_2$ sowie $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_3{}' = -2\,\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ in $\vec{v}_4{}' = \vec{v}_4 + \vec{v}_4$ abbildet.

(a) Berechne die Matrix A.

(b) Sei $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,'$ von $\overrightarrow{OQ}$ bei der Abbildung mit A.

(c) Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,''$ von $\overrightarrow{OQ}\,'$ bei der Abbildung mit $A + A^T$.

%

Probl. 3 Gesucht ist eine Matrix B, welche einen Vektor an der durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ sowie O gegebenen Ebene Φ in Richtung $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spiegelt resp. abbildet.

(a) Berechne B.

(b) Bilde mit B den Punkt $P(2; 4, 5)$ ab.

(c) Sei $B^2 = B \cdot B,\ \ B^{k+1} = B^k \cdot B$. Berechne B^{100}.

Probl. 4 Löse die Matrixgleichung nach X auf und vereinfache, falls dies möglich ist.

$$U = \begin{pmatrix} -37 & 32 \\ 20 & -19 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 57 & -5 \\ 32 & -28 \end{pmatrix}.$$

$$(U \cdot W^{-1}) \cdot (U \cdot W^{-1})^{-1} \cdot (-X) \cdot U^T + E = (((W^{-1})^T \cdot U^T)^{-1})^T.$$

Probl. 5 Gegeben sind die Punkte

$$P_1(0;\,1;\,1),\ \ P_2(1;\,0;\,-1),\ \ P_3(2;\,1;\,0),\ \ P_4(2;\,6;\,1),\ \ P_5(-1;\,5;\,8),\ \ P_6(-2;\,12;\,0).$$

(a) Berechne eine Matrix G, welche P_1 in P_4 und P_2 in P_5 und P_3 in P_6 abbildet.

(b) Wenn man den Punkte P_1 um $\varphi = +30^o$ um die z–Achse dreht, erhält man den Punkt P_7. (Durch die Drehung wird die positive x–Achse in Richtung positive y–Achse bewegt.) Erstelle die Drehmatrix D_φ. numerisch.

(c) Berechne P_7 mit Hilfe von D_φ.

(d) Bilde mit Hilfe von G den Punkt P_7 ab.

Probl. 6 Gegeben ist die Matrix $S = H + H^T$, $H = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, sowie der Vektor $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Um welchen Typ Matrix handelt es sich bei S?

(b) Berechne die Eigenwerte von H und vergleiche diese mit denjenigen von S. Sieht man einen Zusammenhang?

(c) Berechne $\vec{a}_2 = H \cdot \vec{a}_1,\ \ \vec{a}_3 = H^T \cdot \vec{a}_1,\ \ \vec{a}_4 = S \cdot \vec{a}_1$. Zusammenhang?

(d) Sei $A = H + H^{-1}$. Berechne $A \cdot \vec{a}_1$.

Probl. 7 $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor einer Geraden g durch O. Der Punkt $Q(-1,\,0,\,4)$ wird um $\varphi = +\dfrac{\pi}{6}$ um die Achse g gedreht (im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung $\vec{a}$). Berechne die Drehmatrix sowie den Bildpunkt $Q\,'$.

WIR1-12

Viel Glück!

34.19.1 Lösungen

Siehe unter

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/ProblemsSolutBachelor.html#LinAlg.

Kapitel 35

Modulprüfungen Semester 1

Modulprüfung
2006
Klasse M+E 05 / M+E 1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2006/ 22 /Burgdorf/M 15
Mo 13.3.06/16.00-18.00

Bedingungen:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- ⊘ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

13. März 2006

35.1 Modulprüfung in Mathematik 2006 M+E 05 / M+E 1

Viel Glück !

Löse die folgenden 4 Aufgaben: (Alle Teilaufgaben geben werden gleich bewertet.)

Probl. 1 **(12 Punkte)**

Sei $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

(a) Berechne $P^2 := P \cdot P,\ \ P^3 := P \cdot P^2,\ \ P^4 := P \cdot P^3$. Schliesse daraus allgemein auf eine Formel für P^n.

(b) Berechne $Q := P^{-1},\ \ \beta \neq 0$. Setze zur Vereinfachung $q := \dfrac{1}{\beta}$. Berechne damit wie oben $Q^2 := Q \cdot Q,\ \ Q^3 := Q \cdot Q^2,\ \ \ldots$. Schliesse daraus allgemein auf eine Formel für Q^n.

(c) Bestimme eine obere Dreiecksmatrix $R = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$ (wenn möglich mit positiv besetzten Zellen), für die $R \cdot R^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$ gilt.

Probl. 2 **(15 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Gleichung $A \cdot \vec{a} = \vec{b}$ oder $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ \gamma \end{pmatrix}$

i. Berechne α für den Fall, dass $\gamma = 5$ gilt.

ii. Wähle nun umgekehrt $\alpha = 5$ und berechne für diesen Fall jetzt γ

iii. Untersuche, für welche α die Matrix A keine Inverse hat.

(b) i. Gegeben ist die Gleichung

$B \cdot \vec{k}(t) = \vec{m}(t)$ oder $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4\,t \\ t \\ 7\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Dabei ist definiert $\vec{k}(t) = \begin{pmatrix} -4\,t \\ t \\ 7\,t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ eine Gerade. Berechne das Bild dieser Gerade, d.h. berechne den Vektor $\vec{m}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Was ist am Resultat auffallend?

ii. Benütze den Gauss-Algorithmus, um B in eine Dreiecksmatrix zu verwandeln, in der unterhalb der Hauptdiagonalen nur noch die Zahl 0 vorkommt. Wieviele linear unabhängige Zeilen kommen in dieser Dreiecksmatrix vor? Und was bedeutet das für die Dimension der Lösungsmenge von $B \cdot \vec{x} = \vec{b}$?

Probl. 3 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Gleichung in $\mathbb{C}$: $z^6 = i$.

(a) Stelle alle Lösungen mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion dar. *(Hinweis: Form $z = e^{i\,\varphi\cdots}$.)*

(b) Stelle die Lösungen mit Hilfe einer Skizze dar und entscheide, wieviele Lösungen im 1. Quadranten liegen.

(c) Berechne die Summe aller möglichen verschiedenen Lösungen: $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \,?$

(d) Sei z_1 diejenige Lösung $e^{i\,\varphi\cdots}$ mit dem kleinsten positiven φ im Exponenten. Berechne z_1^5, $\dfrac{1}{z_1}$, $\bar{z}_1$ sowie $z_1 + \dfrac{1}{z_1}$ numerisch. Was fällt auf?

Probl. 4 **(15 Punkte)**

Die folgenden Probleme sind voneinander unabhängig:

(a) i. Sei $z = a + i$, $a \in \mathbb{R}$. Gegeben ist die Gleichung: $z + \dfrac{1}{z} = 0$. Untersuche, für welche $a \in \mathbb{R}$ diese Gleichung eine Lösung hat. Berechne allenfalls a und z exakt.

ii. Ersetze nun die Gleichung $z + \dfrac{1}{z} = 0$ durch $z + \dfrac{r}{z} = 0$ mit $r \in \mathbb{R}$. Untersuche, für welche $r \in \mathbb{R}$ diese Gleichung allenfalls jetzt auch eine reelle Lösung $z \in \mathbb{R}$ hat.

(b) Gegeben sind im Raum 4 Punkte $P_1(4, 1, -1)$, $P_2(3, -4, 8)$ und $Q_1(5, 15, 2)$, $Q_2(8, -11, z)$. Diese Punkte sollen durch Stangen verbunden werden, die jeweils über die Punkte hinaus weiterlaufen. Die Stangen können für die Rechnung als unendlich dünn, d.h. als Geraden angenommen.

i. Bestimme z so, dass sich die Stangen (Geraden) berühren.
Hinweis: Das Spatprodukt könnte hier nützlich sein — und wie immer bei geometrischen Problemen könnte auch eine Skizze Nutzen bringen.

ii. Berechne den Berührungspunkt S.

iii. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle P_1 Q_1 S$.

— ENDE —

Modulprüfung
2008
Klasse M+E 07 / M+E 1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

Teil 1: 30 Minuten, dann Abgabe
Teil 2: 90 Minuten

WIR1-2008/ 19 /Burgdorf/M 15
Do 31.1..08/15.00-17.00

Bedingungen:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- ⊘ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

31. Januar 2008

Modulprüfung in Mathematik 2008 M+E 07 / M+E 1

Teil 1: Ohne Hilfsmittel, Zeitrahmen 30 Minuten, dann Abgabe

Viel Glück !

Löse die nachfolgenden Kurzaufgaben. (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Hinweis: Erwartet wird, dass man in der gegebenen Zeit ca. 3/4 der Teilaufgaben richtig lösen kann. Es können auch mehr sein. Wähle daher mit Bedacht diejenigen Aufgaben, die du am schnellsten lösen kannst.

Probl. 1 Angaben:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$z_1 = 3 + 2\,i, \;\; z_2 = 1 - i$$

(a) **(3 Punkte)**

Berechne $\det(M_1)$

(b) **(3 Punkte)**

Berechne $\det(M_2)$

(c) **(3 Punkte)**

Berechne $\det(M_1 \cdot M_2)$

(d) **(3 Punkte)**

Berechne $M_1 \cdot M_2$

(e) **(3 Punkte)**

Berechne $M_2 \cdot M_1$

(f) **(3 Punkte)**

Löse $M_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{b}_1$ (Gauss!)

(g) **(3 Punkte)**

Löse $M_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{b}_2$

(h) **(3 Punkte)**

Löse $(M_2 \cdot M_1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\vec{b}_2^T \cdot M_2^T)^T$

(i) **(3 Punkte)**

Berechne M_3^{-1}

(j) **(3 Punkte)**

Berechne $\dfrac{1}{z_1\, z_2}$

(k) **(3 Punkte)**

Berechne $\dfrac{1}{\bar{z}_1\, \bar{z}_2}$

(l) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl?

```
4*(1:5)+10
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(m) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl?

```
rem(70,12)
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(n) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für die folgende Befehlsequenz?

```
g=j+3; imag(g)*conj(g)
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(o) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für die folgende Befehlsequenz?

```
a=[1 2 3 4];b=[a',2*a']
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(p) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für die folgende Befehlsequenz?

```
a=[1 2 3 4];b=[a',2*a'];b*b'
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

31. Januar 2008

Modulprüfung in Mathematik 2008 — M+E 07 / M+E 1

Teil 2: Zeitrahmen 90 Minuten

Viel Glück !

Löse die nachfolgenden Aufgaben. (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Probl. 2 **(18 Punkte)**

Eine Ebene Φ ist gegeben durch den Normalenvektor $\vec{n}$, $\vec{n}^T = (2, 5, 1)$. Die Ebene geht zudem durch den Punkt $P_0(1, 1, -1)$. Weiter kennt man die Punkte $P_1(2, 0, 2)$ und $P_2(3, 2, 1)$.

(a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle P_0P_1P_2$

(b) Bestimme die Hess'sche Normalform von Φ.

(c) Untersuche, welcher der Punkte P_1, P_2 in Φ liegt.

(d) Bestimme allenfalls den Abstand von P_2 zu Φ.

(e) Bestimme den Schnittpunkt S der Gerade $g = \overline{OP_2}$ mit Φ.

(f) Man drehe die Gerade g um die z–Achse um den Winkel φ. Die gedrehte Gerade nennen wir g_φ. Bestimme φ so, dass der Abstand von $S_\varphi = g_\varphi \cap \Phi$ zu O minimal ist. (Skizze!)

Probl. 3 **(18 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $A \cdot A$ und $B \cdot B$. Versuche daraus allgemeine Gesetze für derartige $n \times n$–Matrizen abzulesen.

(b) Berechne $A \cdot A \cdot A$ und $B \cdot B \cdot B$. Versuche daraus allgemeine Gesetze für entsprechende $n \times n$–Matrizen abzulesen.

(c) Berechne $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A \cdot B \cdot B$ und $A \cdot A \cdot A \cdot B \cdot B \cdot B$. Versuche daraus allgemeine Gesetze für entsprechende $n \times n$–Matrizen abzulesen.

(d) Berechne $A^{-1} \cdot B^{-1}$ und $B^{-1} \cdot A^{-1}$. Ist die Formel $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ hier richtig?

(e) Löse die Gleichung (d.h. berechne X):

$$A \cdot B \cdot A = B \cdot X \cdot B$$

(f) Löse die Gleichung (d.h. berechne X):

$$(B^{-1} - A^{-1}) \cdot X = A + B$$

Probl. 4 **(20 Punkte)**

(a) i. Berechne die 3. komplexen Einheitswurzeln z_1, z_2 und z_3 exakt. D.h. bestimme die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$. Skizziere die Löungen in einem Diagramm in $\mathbb{C}$.

ii. Sei $w_i = z_i + k,\;\; k = const.$ Berechne das Polynom $p(z) = (z - w_1)(z - w_2)(z - w_3)$.

iii. Setze $k = 2$ und berechne das Polynom $p(z) = (z - w_1)(z - w_2)(z - w_3)$ für dieses spezielle k. Trage w_1, w_2, w_3 ebenfalls in das Diagramm ein.

iv. Setze $k = 2 + 4\,i$ und berechne das Polynom $p(z) = (z - w_1)(z - w_2)(z - w_3)$ für dieses spezielle k. Trage w_1, w_2, w_3 ebenfalls in das Diagramm ein.

v. Worin unterscheiden sich die Koeffizienten bezüglich ihrer Zahlenart, wenn man einerseits $k = 2$ und andererseits $k = 2 + 4\,i$ setzt?

(b) i. Berechne die Partialbruchzerlegung von $q(x) = \dfrac{4\,x^4 + 3\,x^3 + 2\,x^2 + x}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{d(x)}{n(x)}$

ii. Die Nullstellen von $n(x) = (x-1)(x^2+1) = x^3 - x^2 + x - 1$ definieren in $\mathbb{C}$ ein Dreieck $\triangle_1$. Berechne diese Nullstellen und skizziere das Dreieck $\triangle_1$.

iii. Berechne das Vehältnis von Dreiecksinhalt zu Umfang.

iv. Berechne die Inversen der vorhin berechneten Nullstellen. Diese definieren wieder Dreieck $\triangle_2$. Was ist das Verhältnis des Inhalts von $\triangle_1$ zu Inhalt von $\triangle_2$?

v. Zwei der eben berechneten Nullstellen haben einen nicht negativen Imaginäranteil. Wenn man zu diesen Nullstellen $k = 2$ addiert, erhält man die Zahlen w_1 und w_2. Durch w_1 und w_2 geht eine Gerade (in die Skizze eintragen!). Diese Gerade kann man um den Ursprung um einen positiven Winkel φ soweit drehen, dass das Bild parallel zur reellen Achse zu liegen kommt. Berechne den dazu notwendigen Winkel φ.

Probl. 5 Zusatzaufgabe (wenn alle andern Aufgaben gelöst sind) **(9 Punkte)**

(a) An den Stelle 10 und -10 auf der x–, der y– und z–Achse eines kartesischen Koordinatensystems wird je ein Punkt gesetzt. Diese Punkte bestimmen ein Oktaeder. In dieses Oktaeder wird achsenparallel der grösste mögliche Würfel hineingesetzt. Bei diesem Würfel wird eine Ecke P_0 ausgewählt. Von P_0 aus werden drei Strahlen durch die Mittelpunkte P_1, $P_2\,P_3$ der drei zu P_0 gegenüberliegenden Würfelseiten gezogen. P_0, P_1, $P_2\,P_3$ bilden ein nichtreguläres Tetraeder. Wieviele Prozent des Würfelvolumens werden vom Tetraeder eingenommen?

(b) Wieviele Prozent der Würfeloberfläche macht die Tetraederoberfläche aus?

(c) Sei k_1 das Verhältnis vom gesamten Würfelvolumen zum Tetraedervolumen, k_2 das Verhältnis der Würfeloberfläche zur Tetraederoberfläche. Berechne $k_1 : k_2$.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

26. Januar 2009

35.2 Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2009 M+E 08–09 p / M+E 1p

Teil 1: Ohne Hilfsmittel, Zeitrahmen 30 Minuten, dann Abgabe

Viel Glück !

Löse die nachfolgenden Kurzaufgaben. (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Probl. 1 Angaben: Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = -i, \;\; z_2 = \frac{1}{2} - 2\,i, \;\; z_3 = 2 - 4\,i$$

(a) **(3 Punkte)**

Zeige von Hand die Berechnung von $\det(A)$

(b) **(3 Punkte)**

Zeige von Hand die Berechnung von $\det(B)$

(c) **(3 Punkte)**

Wie oft kann das Volumen des durch A definierten Spats im Volumen des durch B definierten Spats eingefüllt werden?

(d) **(3 Punkte)**

Zeige von Hand die Berechnung von $A \cdot B$

(e) **(3 Punkte)**

Zeige von Hand die Berechnung von $B \cdot A$

(f) **(3 Punkte)**

Man vermutet, dass $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & u \end{pmatrix}$ gilt.

Überprüfe die Vermutung und berechne allenfalls u.

(g) **(3 Punkte)**

Berechne von Hand $A^{-1} \cdot \vec{b}_1$

(h) **(3 Punkte)**

Berechne von Hand $A^{-1} \cdot \vec{b}_2$

(i) **(3 Punkte)**

Berechne von Hand $A^{-1} \cdot \vec{b}_3$

(j) **(3 Punkte)**

Löse von Hand $((A \cdot B^{-1}) \cdot (A^{-1})^T) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{b}_1$

(k) **(3 Punkte)**

Berechne exakt von Hand $\dfrac{\bar{z}_3}{z_2}$

(l) **(3 Punkte)**

Berechne von Hand $(z_2)^2 - z_2 \cdot z_3$

(m) **(3 Punkte)**

Skizziere die Lösungen von $z^4 = z_1$

(n) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl?

```
x=0:0.1:pi;y=2*cos(x);plot(x,y)
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(o) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl?

```
(0:4)*10+12
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(p) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für die folgende Befehlsequenz?

```
u=[3,2,1];v=[u',-u',u']
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(q) **(3 Punkte)**

Beschreibe, was Matlab hier für eine Operation ausführt:

```
matpro=v*v'
```

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

26. Januar 2009

Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2009 M+E 09–09 / M+E 1p

Teil 2: Zeitrahmen 90 Minuten

Viel Glück !

Löse die nachfolgenden Aufgaben. (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Probl. 2 **(15 Punkte)**

Gegeben ist eine Ebene Φ durch die Punkte $P_1(1,2,1)$, $P_2(-1,3,1)$ und $P_3(0,-1,2)$. Zudem kennt man einen Punkt $Q(-1,0,8)$. O ist der Urprung.

(a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle OP_1Q$

(b) Berechne den Normalvektor auf Φ mit der Länge 1.

(c) Von Q wird das Lot auf Φ gefällt. Berechne den Lotfusspunkt S auf Φ.

(d) Bestimme den Abstand von Q zu Φ.

(e) Q soll um die x–Achse um $\pm 30^0$ in die Punkte U_1 und U_2 gedreht werden. Berechne die neuen Abstände der beiden möglichen Punkte von Φ. Was ist zu sagen betreffend der Vergrösserung und der Verkleinerung der Distanzen bezüglich der neuen Lage?

Probl. 3 **(24 Punkte)**

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $A \cdot A$.

(b) Berechne $B \cdot B$. Was stellt man fest?

(c) Berechne $A \cdot B$. Was stellt man fest?

(d) Berechne $B \cdot A$. Was stellt man fest?

(e) Berechne $A \cdot A \cdot B \cdot B$.

(f) Seien $\vec{x}_1 = \{1,2,3,4,5\}$, $\vec{x}_2 = \{2,3,4,5,6\}$, $\vec{x}_3 = \{3,4,5,6,7\}, \ldots$.
Berechne $A \cdot \vec{x}_1$, $A \cdot \vec{x}_2$, $A \cdot \vec{x}_3$, $\ldots$. Zeigt sich hier ev. ein allgemeines Gesetz?
(Anmerkung: Probiere allenfals jeweils auch für $A \cdot \vec{x}_k^{\,T}$.)

(g) $A_1 = A + 2\,B$. Berechne A_1^{-1}, falls möglich.

(h) Löse die Gleichung $A_1 \cdot A_1 + A_1 \cdot \vec{x} = A_1 + A_1^{-1}$, falls möglich.
(Anmerkung: Probiere allenfalls mit X statt $\vec{x}$.)

Probl. 4 **(18 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Gleichung

$$z^4 = -1 - i$$

i. Skizziere die Löungen in einem Diagramm in der Ebene $\mathbb{C}$ qualitativ. Zeichne zum Vergleich in die Skizze auch den Einheitskreis um den Ursprung ein.

ii. Berechne die Lösungen:

A. Exakt.

B. Numerisch auf 4 Stellen hinter dem Komma genau. (Die 5. Stelle ist gerundet.)

(b) Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion

$$q(x) = \frac{84}{p(x)}, \;\; p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 3\,x - 6$$

i. Berechne die Nullstellen von $p(x)$.
Hinweis: Man kann auch probieren. Was fällt auf?

ii. Die Nullstellen markieren die Ecken einer geradlinig begrenzten Figur in der komplexen Ebene. Berechne den Inhalt dieser Figur.

iii. Berechne die Partialbruchzerlegung von $q(x)$ in $\mathbb{R}$.

iv. Berechne eine möglichst einfache Form von $f(x) = q(x) - (\frac{7}{x-1} - \frac{3\,(x+5)}{x^2+3})$.

Probl. 5 Zusatzaufgabe (wenn alle andern Aufgaben gelöst sind) **(8 Punkte)**

Denkaufgabe: Gegeben ist ein Würfel W, der sich in Normallage befindet. Das heisst, das Zentrum liegt im Ursprung und die Ecke E_1 hat die Koordinaten $(1; 1; 1)$. Der Würfel ist in eine Kugel K eingeschrieben, deren Zentrum ebenfalls der Ursprung ist.

(a) In K wird ein Oktaeder O_1 eingeschrieben. Berechne das Volumenverhältnis vom Oktaeder O_1 zum Würfel W.

(b) der Kugel K wird ein Oktaeder O_2 umgeschrieben. Berechne jetzt ebenfalls das Volumenverhältnis vom Oktaeder O_2 zum Würfel W.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf 03.02.2010

35.3 Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2010 M 09a / M 1a

Teil 1: Ohne Hilfsmittel, Zeitrahmen 30 Minuten, anschliessend Abgabe

Viel Glück !

Löse die nachfolgenden Kurzaufgaben. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Im Falle einer unlösbaren Aufgabe ist als Resultat „unlösbar" zu schreiben.

Probl. 1 Angaben: Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -b & b & b \\ a & c & c \\ c & a & c \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b & b & c \\ a & -a & a \\ c & c & b \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} b & b & a \\ a & -b & a \\ -c & c & b \end{pmatrix}, \; \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}\,i, \;\; z_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,i, \;\; z_3 = 3 - 2\,i$$

(a) Zeige von Hand die Berechnung von $\det(A)$ und untersuche dann, für welche Werte von a, b, c die Determinante 0 ist. **(3 Punkte)**

(b) Zeige von Hand die Berechnung von $\det(B)$ und untersuche dann, für welche Werte von a, b, c die Determinante 0 ist. **(3 Punkte)**

(c) Wie gross sind $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(A \cdot B)$ sowie $\det(B \cdot A)$ für $a = 1,\; b = 0,\; c = -1$? **(3 Punkte)**

(d) Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für $a = 1,\; b = 0,\; c = -1$. **(3 Punkte)**

(e) Wie gross ist $\det(C)$ und $\det(A \cdot C)$ sowie $\det(B \cdot C)$ für $a = 1,\; b = 0,\; c = -1$? **(3 Punkte)**

(f) Es soll gelten: $\det(B \cdot C) = 16$, wobei $b = 0$ und $c = -1$ gesetzt werden. Wie gross muss dann $a \in \mathbb{R}$ sein? **(3 Punkte)**

(g) Löse für $a = 1,\; b = 0,\; c = -1$ die Gleichung $C \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$. **(3 Punkte)**

(h) Berechne die Inverse der Matrix $G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **(3 Punkte)**

(i) Löse mit G von oben die Gleichung $G^{-1} \cdot (E - X^T + G) \cdot G = G \cdot G$. **(3 Punkte)**

(j) Berechne exakt von Hand $\bar{z}_1 \cdot z_2^{-1}$. **(3 Punkte)**

(k) Skizziere die Lösungen von $z^6 = z_1$. **(3 Punkte)**

(l) Berechne von Hand $\dfrac{(z_2)^2 + z_2}{z_3}$. **(3 Punkte)**

Probl. 2 Angaben: Gegeben sind die unten folgenden Matlab–Befehle.

(a) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
x=0:0.1:pi;y=sin(x);plot(x,y)
```

(Bitte Output so darstellen, wie er etwa auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(b) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
x=3; y=2; clear; y=3; z=(x*y)^(1/2)
```

(Output sinngemäss so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(c) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
exp(1) - log10(10)
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(d) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
((0:5)-5)*5
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(e) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
u=[2*3,4,sqrt(25)]; v=[u' (4+u)' 2*u']
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(f) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
v*v
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf 03.02.2010

Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2010 M 09a / M 1a

Teil 2: Zeitrahmen 90 Minuten

Viel Glück !

Löse die nachfolgenden Aufgaben. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.
Im Falle einer unlösbaren Aufgabe ist als Resultat „unlösbar“ zu schreiben.

Probl. 3 **(15 Punkte)**

Gegeben sind vier Punkte im Raum: $P_1 = P_1(2;\, -1;\, 0)$, $P_2 = P_2(3;\, 4;\, 0)$, $P_3 = P_3(1;\, 6;\, 0)$, $Q = Q(1;\, 5;\, 7)$. Berechne die folgenden Masse numerisch auf 4 signifikante Stellen genau:

(a) Berechne den Mittelpunkt M des Kreises, auf dem P_1, P_2 und P_3 liegen.

(b) Berechne den gespiegelten Punkt M' von M bezüglich der Geraden $g = g(P_1, P_2)$.

(c) Berechne damit den Winkel $\angle(M, P_3, M')$.

(d) Berechne das Volumen des (nicht regulären) Tetraeders, das durch die Punkte P_1, P_2, P_3 und Q gebildet wird.

(e) Berechne den Abstand der Punkte M und P_3 von der Geraden g.

Probl. 4 **(9 Punkte)**

Gegeben sind $p(x) = \dfrac{-4\,x^5 - 8\,x^4 - 9\,x^3 - 5\,x^2 + x - 1}{x^2\,(x+1)}$

und $q(x) = \dfrac{-4\,x^4 - 4\,x^3 - x^2 - x + 4}{(x-1)\,(x+1)}$.

(a) Bestimme die Partialbruchzerlegung von $p(x)$.

(b) Bestimme die Partialbruchzerlegung von $q(x)$.

(c) Bestimme damit die Partialbruchzerlegung von $p(x) - q(x)$.
Untersuche damit die Frage: Worin unterscheidet sich die Partialbruchzerlegung von $(p(x) - q(x))$ von den Zerlegungen von $p(x)$ und $q(x)$?

Probl. 5 **(9 Punkte)**

Gegeben sind die 8–ten Einheitswurzeln $z_k = e^{k\,i\,\frac{2\pi}{8}}$, $k = 1, 2, 3, \ldots 8$. Diese Zahlen sind bekanntlich die Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ in $\mathbb{C}$.

(a) Skizziere die Zahlen $u_k = -z_k, k = 1, 2, 3, \ldots 8$, so exakt wie möglich in einem Diagramm. Von welcher Gleichung sind diese Zahlen u_k die Lösungen?

(b) Berechne numerisch die Zahlen $w_j = \sum\limits_{k=1}^{j} z_k$, $j = 1, 2, 3, \ldots 8$. Skizziere diese Zahlen in einem Diagramm.

(c) Was kann man anhand des Diagramms nun zur speziellen Lage der Zahlen w_j vermuten? Begründung? (*Hinweis:* Beachte die genaue Skizze der entstehenden Figur!)

Probl. 6 **(15 Punkte)**

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ sowie } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $A \cdot A$ und $A \cdot A \cdot A$. Was fällt am Resultat auf?

(b) Berechne $B \cdot B$ und $B \cdot B \cdot B$. Was fällt am Resultat auf?

(c) Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Was stellt man fest?

(d) Löse die Gleichung $A \cdot B \cdot A + A = X \cdot B \cdot B + B$.

(e) Seien $\vec{x}_1 = \vec{0}$ ($\vec{x}_2 = (1, -1, 0, 1, -1)^T$). Berechne $A \cdot \vec{x}_1$ und $A \cdot \vec{x}_2$.
Was stellt man fest?

Probl. 7 **(6 Punkte)**

Gegeben ist eine Kugel K_1 mit dem Mittelpunkt im Ursprung ($M_1 = O$) und einem Radius $R_1 = 5$. Dazu ist noch eine zweite Kugel K_2 gegeben mit dem Mittelpunkt $M_2 = M_2(5;\, 5;\, 5)$ und einem Radius $R_2 = 6$. Durch die Schnittkurve der beiden Kugeln kann man eine Ebene Φ legen. Berechne den Durchstosspunkt von Φ mit der x–Achse.

Probl. 8 **(6 Punkte)**

Durch die Punkte $P_1 = P_1(1;\, 0;\, 0)$, $P_2 = P_2(0;\, 2;\, 0)$ und $P_3 = P_3(0;\, 0;\, 3)$ ist eine verspiegelte Ebene Γ gegeben. Vom Punkte $Q_1 = Q_1(4;\, 0;\, 0)$ wird ein Lichtstrahl ausgesendet, welcher nach Reflexion in einem Punkt $L \in \Gamma$ auf den Punkt $Q_2 = Q_2(1;\, 5;\, 1)$ trifft. Berechne die Koordinaten des Punktes L.
(*Hinweis:* Mache dir eine Skizze und überlege anhand dieser, was die Spiegelung von Q_2 an Γ nützen könnte.)

— ENDE —

35.4 Link zu den Lösungen

Siehe unter dem URL

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html.

Ende