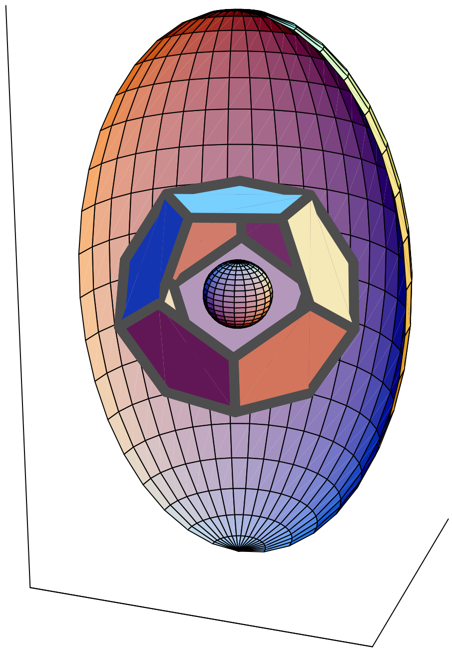
◇ Tests ◇ Tests ◇
◇ Algebra 1 ◇ Agèbre 1 ◇
◇ Diplom ◇ 1989 – 2000 ◇ *Diplôme* ◇



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2000

Ausgabe vom 15. September 2007, Version 1.0.1 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lines cliquables*

WIR1 /2007/LaTex/BuchTestsAlgebra2000Dipl_1.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

• *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

• *L'homme a trois occasions pour apprendre:*
Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

Kapitel • Chapitre 1

Einführung — Introduction

1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den Jahren vor 2000 verwendet worden sind.
• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les années avant 2000.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur in Papierform vorhanden. An eine gesamthafte Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale.*

1.2 Gliederung — Disposition

Bemerkung: • Remarque: Da nur noch wenige Sérien auch in französischer Übersetzung vorliegen, wird im weiteren Text aus Kapazitätsgründen auf Übersetzungen verzichtet.

(1) Vektorrechnung, Vektorgeometrie

(2) Matrizenrechnung, Determinanten

(3) Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

(4) Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme

(5) Lineare Abbildungen mit Matrizen

(6) Eigenwerttheorie mit Matrizen

(7) Algebra und elementare Zahlentheorie

(8) Komplexe Zahlen

Kapitel • Chapitre 2

Serien mit „Vektorrechnung, Vektorgeometrie“

2.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

2.2 Test: Funktionen, Vektorgeometrie I/05

Abschrift • *Copie*

(1) $\ln(3) - \ln(2) + \ln(6) - \ln(4) + \ln(9) - \ln(6) + \ln(12) - \ln(8) + \ldots + \ln(300) - \ln(200) = \,?$

(2) $6\,x^2 - 2\,x + 1 + \ln(5^x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \,?$

(3) $(\ln(x^4) - \ln(x^2) + 2)^3 - 126 = 0 \;\Rightarrow\; x = \,?$

(4) Gegeben sind die Punkte $P_1(0;2)$, $P_2(3;1)$, $P_3(5;-4)$, $P_4(8;3)$, $P_5(3.5;5)$. Weiter ist $a_1 = |\overline{P_1P_2}|$, $a_2 = |\overline{P_2P_3}|$, $a_3 = |\overline{P_3P_4}|$, $a_4 = |\overline{P_4P_5}|$, $a_5 = |\overline{P_5P_1}|$ und $A =$ Flächeninhalt von $\triangle P_2P_3P_5$

(a) $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \,?$

(b) $A = \,?$

(5) Gegeben sind die Punkte $A(1;1)$, $B(7;0)$, $C(7;6)$, $D(3;5)$.
Weiter ist $P(x;y) = \overline{AC} \cap \overline{BD}$.
Berechne x und y.

(6) $\vec{c} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$
Berechne λ und μ.

(7) Gegeben sind die Punkte $A(1;2;3)$, $B(2;4;6)$, $C(-1;3;6)$. Bei B gilt $\beta = \angle(\overline{BA}, \overline{BC})$.
Untersuche, ob $\beta = \perp$ gilt!

Viel Glück!

2.3 Test: Funktionen, Vektorgeometrie I/06

Abschrift • *Copie*

(1)
$$f(x) = \frac{x^2 + 2\,x - 3}{3\,x - 1}$$
(a) Pole? • *Pôles?*

(b) Asymptoten? • *Asymptotes?*

(2) $\arcsin(x) = \cos(x) \;\Rightarrow\; x \approx\, ?$ (Zeichnung) • *(Dessin)*

(3) $r(\varphi) = |\cos(\frac{\varphi}{2})| + 1 \;\leadsto$ Graph? • *Graphe?*

(4) $y(x) = (e^{x+4})^2 \;\leadsto$ Graph? • *Graphe?*

(5) $2\,\log_5(10) - \log_{10}(x) = 0 \;\Rightarrow\; x =\, ?$

(6) $\ln(1) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(6) + \ln(4) - \ln(8) + \ln(5) - \ln(10) + \ln(6) - \ln(12) + \ldots - \ldots =\, ?$

(7) $(\ln(x)) + 1 + e^x - 3 \;\Rightarrow\; x =\, ?$ (Zeichnung) • *(Dessin)*

(8) $2\,\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{x} + 2\,\vec{u} - 3\,\vec{c}) = \frac{1}{3}(2\,\vec{x} - \vec{u} + \vec{c}) \;\Rightarrow\; \vec{x} =\, ?$

(9) Gegeben: Konvexes Viereck $Fig(ABCD)$. • *Donné: quadrilatère convexe* $Fig(ABCD)$.
M_1 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de* $\overline{AB}$,
M_2 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de* $\overline{BC}$,
M_3 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de* $\overline{CD}$,
M_4 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de* $\overline{DA}$.
Weiter gilt: • *En outre on sait:* $E = \overline{M_1M_3} \cap \overline{M_2M_4}$.
$\leadsto$ Berechne E! • *Calculer* E *!*

(10) Gegeben: Punkte A, B, (allgemeine Lage). • *Donné: Points* A, B, *(position générale).*
Zudem gilt: • *En outre on sait:* $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BF} = \lambda\,\overrightarrow{BD}$.
$\leadsto$ Berechne λ! • *Calculer* λ *!*

Viel Glück! — Bonne chance!

2.4 Test: Vektorgeometrie I/07

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind zwei Ebenen Φ und Ψ mit $\varphi = \angle(\Phi, \Psi)$:

$$\Phi:\ 3\,x + 2\,y - 5\,z + 8 = 0, \quad \Psi:\ \vec{\ } = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad \varphi = ?$$

(2)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \lambda \cdot \vec{b}$$

(a) Berechne x so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt.

(b) Berechne λ so, dass (falls möglich) $\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle = 7$ gilt.

(3) Eine Gerade g ist gegeben durch den Stützvektor $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und den Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiter ist der Punkt $P(-4; 4)$ bekannt.

(a) Berechne die Distanz d der Geraden vom Ursprung.

(b) Berechne die Distanz d_1 der Geraden von P.

(4) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit die Ebene $\Phi:\ \vec{r} = \vec{a} + \lambda\,\vec{b} + \mu\,\vec{c}$ sowie $P_0(5; 5; 5)$.

(a) Berechne die Distanz von P_0 zu Φ.

(b) Berechne das Volumen des Tetraeders, welches durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in seiner Grösse definiert ist.

Viel Glück!

2.5 Test: Gleichungssysteme, Vektorgeometrie I/08

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist das Dreieck $\triangle OP_1P_2$ mit der Fläche F und $P_1(5;2)$, $P_2(2;3)$, $\vec{a} = \overrightarrow{OP_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OP_2}$, $\varphi = \angle(\vec{a},\vec{b})$ sowie $h =$ Höhe von P_2 auf $\overline{OP_1}$. Hebe diese Situation in den 3–dimensionalen Raum mit $z = 0$ und berechne folgende Werte:

(a) $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = ?$

(b) $\langle\vec{a},(\vec{a}+\vec{b})\rangle = ?$

(c) $\vec{a}\times\vec{b}$

(d) $|F| = ?$

(e) $h = ?$

(f) $\varphi = ?$

(2) Gegeben ist eine Gerade g, welche den Kreis mit dem Ursprung als Zentrum im Punkte $P(1;2)$ tangiert. g schneidet die x–Achse in A und die y–Achse in B. g soll durch die Form $g:\ \vec{r}_g = \vec{r}_0 + t\,\vec{a}$ dargestellt werden, $\vec{a}$ normiert.

(a) $A(x_1;y_1) = ?$

(b) $B(x_2;y_2) = ?$

(d) $\vec{a} = ?$

(e) Fläche von $\triangle OAB = ?$

(3) Gegeben sind $P_1(x_0 = 3;0;0)$, $P_1(0;y_0 = 4;0)$, $P_1(0;0;z_0 = 12)$, $P(x_0;y_0;z_0)$ und O (Ursprung). O, P_1, P_2 und P_3 definieren einen Quader. Durch P_1, P_2 und P_3 ist eine Ebene $\Phi = \Phi(x_0,y_0,z_0)$ gegeben. Φ soll durch die Koordinatengleichung $\Phi:\ A\,x + B\,y + C\,z + D$ mit $D = -144$ dargestellt werden.

(a) Berechne A, B, C!

(b) Berechne die Distanz von Φ zu O!

(c) Berechne die Distanz von Φ zu P!

(4) $\vec{r}_0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ definieren ein Parallelepiped (auch Spat, Parallelflach, Parallelotop) mit dem Stützpunkt P_0, $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$, und dem Volumeninhalt V. Weiter ist durch $\Phi:\ \vec{r}_\Phi = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$ eine Ebene definiert und durch $g:\ \vec{r}_g = \vec{r}_0 + t\,\vec{c}$ eine Gerade. φ ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$, φ_1 der Winkel zwischen Φ und der Ebene, welche durch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildet wird. Es gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) $V = ?$

(b) $\varphi = ?$

(c) $\varphi_1 = ?$

(5)
$$\left|\begin{array}{rcl} 2\,x + y + z + w & = & 5 \\ x + 2\,y + z + w & = & k\cdot 5 \\ x + y + 2\,z + w & = & u\cdot 5 \\ x + y + z + 2\,w & = & 5 \end{array}\right|$$

Berechne nachvollziehbar $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$.

Viel Glück! WIR

2.6 Test: Algebra, Zahlentheorie, Gleichungen, Grundlagen, Vektorgeometrie I/23

Abschrift • *Copie*

(1) Einer Kugel mit Radius r ist ein Drehzylinder mit Radius ρ und der Höhe h eingeschrieben worden, dessen Mantelfläche gleich der halben Kugeloberfläche ist. Berechne das Zylindervolumen.

(2)

$$(\frac{10-3\,x}{5}-\frac{2\,x-12}{3}+2)\cdot(\frac{2\,x-1}{4\,x+11}-\frac{5}{21})$$

Bestimme die Werte von x, für die dieses Produkt null ist.

(3)

$$\frac{5\,x-11}{4-3\,y}=\frac{10\,x-19}{7-6\,y}$$

Suche die ganzzahlingen Lösungen (x, y) dieser Gleichung!

(4) In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge 6 sind die Seitenmittelpunkte mit $M_a,\ M_b,\ M_c$ bezeichnet (z.B. $a=\overline{BC}$). Mit dem Mittelpunkt A wird ein Kreisbogen von M_c nach M_b geschlagen und ebenso mit dem Mittelpunkt B ein Kreisbogen von M_c nach M_a. Über den halben Dreieckseiten $\overline{CM_a}$ und $\overline{CM_b}$ wird je ein Halbkreis nach aussen errichtet. Berechne nun den Umfang und den Inhalt der von den Kreisbogen begrenzen Figur $CM_bM_cM_aC$.

Viel Glück!

WIR

2.7 Test: Funktionen, nichtlineare Ungleichungen, Vektorgeometrie I/38

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f(x) = a\,x + b, \quad g(x) = c\,x + d, \quad (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

Was gelten zwischen a, b, c, d für Beziehungen?

(2) Entwerfe von Hand den Graphen von $\sin(\tan(|x|))$ in $[-\pi,\ \pi]$. Mache dazu eine vernüfntige Wertetabelle.

(3) Löse: $\dfrac{1}{4}\,x^2 - 2\,x - 5 > \dfrac{1}{3}\,x + 6$.

(4)

$$f(x) = \frac{2\,x^3 - 5\,x^2 + 8\,x}{-x^2 + 5\,x + 7}$$

(a) *Polstellen*?

(b) Asymptoten?

(c) Funktionsgleichung(en) der Asymptoten?

(d) Graph?

(5) Gegeben ist die Gerade g durch $P(-1; 4)$ und $Q(3; 7)$ sowie die Gerade h mit $h \perp g$ und $P \in h$.

(a) Bestimme die Funktionsgleichung $g:\ x \longmapsto g(x)$.

(b) Bestimme die Funktionsgleichung $h:\ x \longmapsto h(x)$.

(c) Wo ist $h(x) = 0$?

Viel Glück!

2.8 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/52

Abschrift • *Copie*

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte von C.

(b) Berechne die Eigenvektoren von C.

(c) Was hat B mit C zu tun?

(d) Berechne die Inverse von C.

(2)

$$f(x) = \frac{x^3 + 3\,x^2 - x - 2}{x^2 + 2\,x}$$

(a) $\int f(x)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_{-3}^{\infty} f(x)\,dx = \,?$

(c) $\int\limits_{-3}^{\infty} \frac{f(x)}{x^k}\,dx \leadsto$ Wie gross muss k mindestens sein, damit das Integral existiert? (Begründung!)

(d) $\int\limits_{-3}^{\infty} \frac{f(x)}{x^4}\,dx = \,? \leadsto$ Exakt!

(3) $g(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ hat Nullstellen bei $x = 0$ und bei $x = 3$ sowie einen Wendepunkt in $(x, y) = (1, 1)$. Weiter sei $M(x_m, y_m)$ derjenige Punkt mit $0 \leq x_m \leq 3$, in dem der Funktionswert ein lokales Maximum annimmt. R sei das achsenparallele Rechteck, das durch den Urspung O und M gebildet wird.
Berechne $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx$ und entscheide, ob $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx \geq$ (Inhalt von R) richtig ist.

(4) Gegeben sind die Gerade g und die Ebene Φ:

$$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi : x - y + 2\,z + 2 = 0$$

Unter welchem Winkel (α) trifft g auf Φ auf?

Viel Glück!

WIR

2.9 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/59

Abschrift • *Copie*

(1) In welchem Verhältnis teilt die durch $f(x) = x^3$ beschriebene Kurve das im 1. Quadranten liegende Flächenstück, welches begrenzt ist durch $g(x) = a\,x - x^3$ und die x–Achse? Für welche a–Werte ist die Aufgabe sinnvoll?

(2) In einem kartesischen Koordinatensystem wird ein durch den Punkt $P(1; 11; 2)$ gehender, parallell zur x–Achse laufender Lichtstrahl an einer Kugel mit Zentrum im Ursprung und dem Radius 3 reflektiert. In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet der reflektierte Strahl die (x, z)–Ebene?
Kontrollangabe: Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind ganzzahlig.

(3)

$$f(x) := \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot ln(\frac{x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1}{x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \arctan(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{1 - x^2})$$

Berechne $f\,'(x)$. Stelle das Resultat möglichst einfach dar.

(4) Integration:

(a) Zeige zuerst, dass die Funktion $f(x) = \cos(\sin(x))$ eine $2\,\pi$–periodische Funktion ist.

(b) Wir nehmen an, dass mit Hilfe der eben definierten Funktion $A(a) = \int\limits_0^{2\pi} e^{a \cdot x} \cdot f(x)\,dx$ berechnet sei. Berechne daraus $\int\limits_0^{n \cdot 2\pi} e^{a \cdot x} \cdot f(x)\,dx,\ \ n \in \mathbb{N}$.

(c) Für welchen a–Wert existiert das obige Integral bei $n \to \infty$? Berechne in diesem Fall dieses uneigentliche Integral wieder unter Verwendung von $A(a)$.

Viel Glück!

2.10 Test: Boolsche Algebra, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/59

Abschrift • *Copie*

(1) Vereinfache den Boolschen Ausdruck $z = x \cdot y + [(x + y') \cdot y]'$.
Dabei bedeutet „$\cdot$" $\hat{=}$ AND, „+" $\hat{=}$ OR, „$'$ " $\hat{=}$ NOT.
Verlangt ist Analyse und Graphik.

(2) Berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2\,x^2 + 9\,x + 12}{x^2 + 6\,x + 10}\,dx.$$

(3) Durch ein unbekanntes Polynom f 3. Grades ist eine Kurve gegeben, von der man weiss: $f(-p) = 0,\ \ f(0) = 3\,p,\ \ f(2\,p) = 3\,p$. Zudem befindet sich in $(0; f(0))$ ein lokales Maximum.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Berechne die Koeffizienten als Funktion des Parameters p.

(c) A_1 sei das Flächenstück unter der Kurve zwischen $-p$ und 0. A_2 dasjenige zwischen 0 und $2\,p$. Bestimme das Verhältnis $A_1\ : A_2$.

(4) Von einem Punkt $P(3; 3; 5)$ aus fällt ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{a} = (-1, -1, -2)^T$ auf einen Planspiegel, der durch die Ebene $\Phi:\ x+2\,x+3\,z = 6$ beschrieben wird. Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden, auf der der reflektierte Strahl liegt.

Viel Glück!

2.11 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/61

Abschrift • *Copie*

(1) $f(x) = \frac{1}{10}\,(\cos(x))^2 + \frac{1}{2} - x. \leadsto$ Löse $f(x) = 0$ mit $x > 0\,!$

Approximiere die kleinste Nullstelle dieser Gleichung wie folgt:

(a) Newton–Methode

(b) Fixpunktmethode

(c) Regula falsi (sofern einfach möglich)

Wähle als Startwert $x_1 = 0.1$ und für die Regula falsi noch $x_2 = 0.5$.
Vergleiche die Anzahl Rechenschritte bis zu einer Genauigkeit von 6 Stellen hinter dem Komma bei den verschiedenen Methoden.

(2) Die Ebene Φ ist gegeben durch $A(2;1;3)$, $B(-1;4;6)$, $C(1;-1;-2)$, $P(5;5;5)$.

(a) Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle(ABC)$.

(b) In welchen Punkten schneidet Φ die Koordinatenachsen?

(c) Wo durchstösst die Gerade $\overline{PS}$ die (x,y)–Ebene?

(3)

$$\{(x_i;y_i)\} = \{(1;0.5),(3;0.9),(2;-0.7),(5;0.8),(4;0.4)\}$$

(a) Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit minimalem Grad durch die gegebenen Stützstellen.

(b) Sei f die wirkliche Funktion mit ihrem Graphen durch die Stützstellen. Berechne eine Näherung von $\int\limits_1^5 f(x)\,dx$ mit Hilfe des Simpson–Verfahrens.

Viel Glück!

WIR

2.12 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie II/13

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{a} + 2\,\vec{b},\ \ \vec{v}_2 = \vec{a} - \vec{b} + 4\,\vec{c},\ \ \vec{v}_3 = \vec{a} - \vec{c},\ \ \vec{v}_4 = 2\,\vec{c} + 3\,\vec{b}$$

(a) Löse damit die Gleichung $4\,\vec{x} - 3\,\vec{v}_1 + 2\,\vec{v}_2 = -\vec{v}_3$ numerisch nach $\vec{x}$ auf.

(b) Untersuche, ob $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linear abhängig ist (Begründung!).

(2)

$$\left| \begin{array}{lcl} \vec{a} & = & 3\,\vec{x} - 2\,\vec{y} + 5\,\vec{z} \\ \vec{b} & = & \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} \\ \vec{c} & = & \vec{x} - \vec{y} \end{array} \right|$$

(a) Drücke $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ durch $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ aus.

(b) Setze dann für $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ die Werte aus der obigen Aufgabe ein und berechne $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$.

(3) Zeige: „Die Seitenmittelpunkte eines beliebigen räumlichen Vierecks $ABCD$ bilden ein Parallelogramm“.

(4) Gegeben: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ P = P(2; 4; 8)$.
Berechne den Abstand des Punktes P vom Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle(ABC)$.

(5) Die aus der vorangegangenen Aufgabe bekannten Punkt $A,\ B,\ C$ und P liegen auf der Oberfläche einer Kugel.

(a) Berechne den Kugelmittelpunkt M sowie den Radius R.

(b) Entscheide rechnerisch, ob $O(0; 0; 0)$ im Kugelinnern liegt oder nicht.

Viel Glück!

2.13 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie II/14

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = -\vec{b} + 2\,\vec{a}, \ \ \vec{v}_2 = -\vec{a} + \vec{b}, \ \ \vec{v}_3 = \vec{a} - \vec{c}, \ \ \vec{v}_4 = 3\,\vec{c} + 4\,\vec{b}$$

(a) Löse damit die Gleichung $2\,\vec{x} - 5\,\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = -\vec{v}_3 - \vec{x}$ numerisch nach $\vec{x}$ auf.

(b) Untersuche, ob $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linear abhängig ist (Begründung!).

(2)

$$\left| \begin{array}{rcl} \vec{a} & = & \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \\ \vec{b} & = & \vec{x} - 2\,\vec{y} + 3\,\vec{z} \\ \vec{c} & = & \vec{x} - 10\,\vec{y} \end{array} \right|$$

(a) Drücke $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ durch $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aus.

(b) Setze dann für $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ die Werte aus der obigen Aufgabe ein und berechne $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

(3) Gegeben ist ein Dreiecks $\triangle(ABC)$ mit $A(1;1)$, $B(9;2)$, $C(4;5)$.
D und E sind definiert durch $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AC}$. Zudem ist $F = \overline{BD} \cap \overline{CE}$.
In welchem Verhältnis teilt F die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$?

(4) Gegeben ist ein Dreieck $\triangle(ABC)$ wie in der vorangegangenen Aufgabe. Durch Spiegelung am Schwerpunkt S geht $\triangle(ABC)$ in $\triangle(A'B'C')$ über. Berechne die Koordinaten von A', B' und C'.

(5) $P_1(1;1)$, $P_2(9;2)$ und $P_3(4;5)$ bestimmen einen Kreis K_1 mit dem Mittelpunkt M_1. Ebenso bestimmen $Q_1(10;2)$, $Q_2(18;3)$ und $Q_3(14;6)$ einen Kreis K_2 mit dem Mittelpunkt M_2.

(a) Berechne den Abstand $|\overline{M_1 M_2}|$.

(b) Entscheide rechnerisch, ob sich die Kreise schneiden oder nicht.

Viel Glück!

2.14 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie II/15

Abschrift • *Copie*

(1) Zerlege $\vec{d}$ nach $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

(2) Berechne den Umfang des Dreiecks $\triangle(ABC)$ mit

$$A = A(-20; 9; 17),\;\; B = B(36; 1; -3),\;\; C = C(-6; 16; 3).$$

(3) Gegeben sind $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Sei $\vec{a} = -3\,\vec{r} + 3\,\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + 2\,\vec{w}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Bestimme t so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind!

(4) Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt E. Spiegelt man E an D, so entsteht G. Spiegelt man A an D, so entsteht F. Man kennt folgende Koordinaten: $A(10; 8; -8)$, $B(18; 12; 6)$, $C(12; -2; 0)$.
Berechne C, D, G und G!

(5) Gegeben sind $R(12; 12; -6)$ und $S(15; 6; 3)$. Welche Punkte der x–Achse haben von R den doppelt so grossen Abstand wie von S?

(6) Gegeben sind die Punkte A, B, C mit allgemeinen Koordinaten. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB}\,,\;\; \vec{b} = \overrightarrow{AC}\,,\;\; \vec{c} = \overrightarrow{BA}\,,\;\; \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\,\vec{a},\;\; \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\,\vec{c},\;\; S := \overline{AA_1} \cap \overline{CC_1}$$

(a) Skizziere die Situation.

(b) Zeige, dass S die Schwerlinien im Verhältnis $1 : 2$ teilt.
Hinweis: Lineare Unabhängigkeit verwenden.

(c) Gegeben sind $A(6; -1)$, $B(-2; 6)$, $S(3; -4)$. Berechne C!

Viel Glück!

2.15 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie II/16

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne die Winkel des Dreiecks $\triangle(ABC)$ mit Hilfe des Skalarprodukts.
$A = A(2;1;-3)$, $B = B(7;-1;-1)$, $C = C(-3;0;1)$.

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c} \leadsto \quad a = ?,\ b = ?$

(3) Gegeben: $g: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $P = P(16;10;-6)$.
Gesucht: Koordinatengleichung der Normalenebenen zu g durch P!

(4) Berechne den Abstand des Punktes $P(7;0;-8)$ von der Ebene $-2\,x + y + 2\,z + 6 = 0$.

(5) Gegeben: Tetraeder $ABCD$ mit $A(-3;-6;1)$, $B(6;-2;0)$, $C(3;2;3)$, $D(0;5;2)$.

(a) Berechne die Höhe des Tetraeders von D aus.

(b) Berechne die Koordinaten des Höhenfusspunktes.

Viel Glück!

2.16 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie II/17

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben: $\triangle(ABC)$, $A = A(4;3;-5)$, $B = B(-5;-4;6)$, $C = C(3;7;-1)$.
Berechne die Winkel im Dreieck!

(2) Beweise mit Hilfe des Skalarprodukts, dass die Diagonalen im Rhombus senkrecht aufeinander stehen!

(3) Sei $A = A(2;-2;-1)$, $B = B(3;7;2)$, $\Phi: \ -2\,x + 4\,y + 5\,z - 10 = 0$.

Stelle die Koordinatengleichung der Ebene auf, welche durch A und B geht und senkrecht auf Φ steht!

(4) Berechne die Koordinaten des Punktes S, der auf $g: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegt und von $A(4;2;1)$ sowie von $P(4;0;3)$ den gleichen Abstand hat.

(5) Gegeben ist ein Tetraeder $ABCD$ mit den Punkten
$A(6;-2;0)$, $B(-3;-6;1)$, $C(3;2;3)$, $D(0;5;2)$.

(a) Berechne die Höhe des Tetraeders von D aus.

(b) Berechne die Koordinaten des Höhenfusspunktes.

Viel Glück!

2.17 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Gleichungssysteme II/20

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) $$\left|\begin{array}{lcl} y-z+w & = & -1 \\ x-y+z & = & 1 \\ x-y+z-w & = & 2 \\ 2\,x+y+2\,z+w & = & 0 \end{array}\right|$$

(a) Berechne die Determinanten D_0, D_x, D_y, D_z, D_w.

(b) Berechne x, y, z, w.

(2) Gegeben sind der Kreis $K : (x-2)^2+(y-1)^2 = 25$ und die Gerade $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. M ist der Kreismittelpunkt, $g_1 \cap K = \{T_1(u_1; v_1), T_2(u_2; v_2) \mid u_1 \geq u_2\}$. Weiter ist $g_n = \overline{MT_1}$, $g_2 =$ Kreistangente in T_1. Setze dabei $g_n : \vec{x}_n = \vec{b}_0 + \lambda\,\vec{b}_1$, $g_2 : \vec{x}_2 = \vec{c}_0 + \lambda\,\vec{c}_1$.

(a) Berechne exakt T_1 und T_2.

(b) Berechne exakt g_n: $\vec{b}_1 = \,?$ ($\vec{b}_1$ normieren!)

(c) Berechne exakt g_2: $\vec{c}_1 = \,?$ ($\vec{c}_1$ normieren!)

(d) Berechne exakt den Inhalt des Dreiecks $\triangle(MT_1T_2)$.

(e) Berechne exakt den Abstand d von T_2 zu g_2

Exakt $\rightsquigarrow$ *keine Dezimalbrüche!*

Viel Glück!

2.18 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme II/22

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left|\begin{array}{lcl} x+2\,y+3\,z & = & 4 \\ x+4\,y+9\,z & = & 16 \\ \lambda\,x+6\,y+12\,z & = & \mu \end{array}\right|$$

(a) Wie gross müsste man λ wählen, damit das System für $\mu = 20$ keine Lösung hat? (Untersuche erst, ob dieser Fall möglich ist!)

(b) Setze $\mu = 1$. Existiert jetzt ein λ, sodass das System keine Lösung hat? Berechne allenfalls λ.

(c) $x = y = 1$ sei Lösung. Berechne, falls möglich, z, λ, μ.

(2) (a) $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC_\lambda} = \vec{c}(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden mit O zusammen ein Tetraeder mit dem Volumen $|V| = 10$. Dazu sein $\lambda > 0$. Berechne λ!

(b) Sei M der Schwerpunkt von $\triangle(ABC_\lambda)$. Sei P definiert durch $\overrightarrow{OP} = 3\ \overrightarrow{OM}$. Berechne den Inhalt des Körpers mit den Eckpunkten O, A, B, C, P.

(3) Gegeben seien ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2;-1)$ und dem Radius $r = 3$ sowie der Punkt $P(10;6)$.

(a) Von P aus werden die beiden Tangenten mit den Berührungspunkten T_1 und T_2 an den Kreis gezogen. Berechne T_1 und T_2.

(b) Berechne den Inhalt von $\triangle(PT_1T_2)$.

(c) Berechne denjenigen Punkt des Kreises, welcher dem Punkt P am nächsten liegt. (Punkt Q.)

(4) Gegeben sind die Geraden $g_1:\ \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $g_2:\ \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dazu ist P gegeben durch $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Entscheide durch Rechnung, welche der beiden Geraden P am nächsten liegt.

(b) Berechne den kürzesten Abstand von g_1 zu g_2.

(c) Berechne den Mittelpunkt der kleinsten Kugel, die zwischen g_1 und g_2 passt.

Viel Glück!

WIR

2.19 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie, Gleichungssysteme

II/23

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Mit $A(-2;0;0)$, $B(4;2;0)$, $C(6;-1;1)$, $D(3;1;6)$ soll eine vermutlich nicht reguläre Dreieckspyramide gebildet werden. M_1 ist der Mittelpunkt von $\overline{AC}$, M_2 derjenige von $\overline{AB}$, M_3 derjenige von $\overline{BD}$ und M_4 derjenige von $\overline{CD}$.

(a) Volumeninhalt $(ABCD) = ?$

(b) Flächeninhalt $(M_1M_2M_3M_4) = ?$

(2)

$$\Phi_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne den Richtungsvektor der Schnittgeraden $s = \Phi_1 \cap \Phi_2$.

(b) Für welche $P \in s$ ist $|\overline{OP}|$ minimal?

Hinweis: Normalenvektoren!

(3)
$$\left|\begin{array}{lcl} 3\,x + y - 20\,w & = & 11 \\ 2\,x - 2\,y + z - w & = & 2 \\ x + y + 11\,z & = & 7 \\ -x - 8\,z + 16\,w & = & -1 \\ 4\,x + 2\,y + 11\,z - 20\,w & = & 18 \end{array}\right| \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = ?$$

(4) Gegeben ist ein Kreis $K : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 10^2$ sowie eine Gerade $g_1 : \vec{x} = \binom{2}{1} + t\binom{-2}{1}$ mit $g_1 \cap K = T(u,v)$, $u \geq 0$ und $\angle(g_1, \overline{MT}) = \alpha$, $M =$ Kreismittelpunkt.
Berechne den Richtungsvektor der zweiten Geraden g_2 durch T mit $\angle(g_2, \overline{MT}) = \alpha$.

(5)

$$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Berechne die minimale Distanz zwischen h_1 und h_2.

(6) Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ mit $P \in \overline{AB}$, $M \in \overline{BC}$, $Q \in \overline{CA}$ und $\overline{AM} \cap \overline{BQ} \cap \overline{CP} = S$. Wähle dabei $A = A(0;0)$, $B = B(b;0)$, $C = C(r;s)$.
Zudem gilt: $|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{BP}| = 1:2$, $|\overrightarrow{BM}| : |\overrightarrow{MC}| = 1:1$, $|\overrightarrow{AQ}| : |\overrightarrow{QC}| = 1:x$
Gesucht $\rightsquigarrow$ $x = ?$ (Rechnung!)

Viel Glück!

WIR

2.20 Test: Vektorrechnung

II/24

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

Gesucht: Darstellung von $\vec{w}$ als LK von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. ($\leadsto$ $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ Basis.)

(2) Gegeben: $A(5; -6; 2)$, $B(-7; -3; 1)$, $C(x; 5; z)$, $C \in \overline{AB}$.

Gesucht: $x = ?$, $z = ?$, $\overline{AC} = ?$

(3) Gegeben: $A(3; 2)$, $B(-1; 4)$, $C(1; -3)$, $|\overline{AQ}| = |\overline{BQ}| = |\overline{CQ}|$.

Gesucht: $Q = ?$

(4) Gegeben: $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $P(0; 1)$

$S =$ Schwerkunkt von $\triangle ABC$.

Gesucht: $A = ?$, $B = ?$, $C = ?$, $S = ?$

Viel Glück!

2.21 Test: Vektorgeometrie, Vektorrechnung

II/25

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

(a) Berechne das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

(b) Berechne $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

(c) Berechne γ in rad.

(d) Berechne $\vec{a} \times \vec{b}$.

(2) Gegeben sind: $g: \ \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \ P_0 = P_0(2; -1; 3)$.
Durch P_0 wird die Ebene $\Phi \perp g$ gelegt.

(a) Berechne den Abstand von Φ zum Ursprung.

(b) Berechne den Durchstosspunkt von Φ mit der x–Achse.

(3) Gegeben ist eine Kugel K um $M(1; 1; 1)$ mit $R = 5$ sowie der Punkt $Q(10; 0; 2)$ und die Gerade $g_1: \ \vec{r}_{g_1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $P = K \cap g_1$ (diejenige Lösung mit der grössten x–Koordinate).

(b) Ein Lichtstrahl geht von Q aus und wird in P an der Tangentialebene an die Kugel reflektiert. Berechne den Winkel zwischen dem ein– und dem ausfallenden Strahl.

Viel Glück!

WIR

2.22 Test: Vektorgeometrie, Vektorrechnung

II/26

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

(a) Berechne das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

(b) Berechne $|\vec{a} - \vec{b}|$.

(c) Berechne γ in rad.

(d) Berechne $(-\vec{b}) \times (-\vec{a})$.

(2) Gegeben sind: $g: \ \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \ h: \ \vec{r}_h = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Berechne den kürzesten Abstand zwischen g und h.
Hinweis: Arbeite z.B. mit einer Hilfsebene Φ durch g.

(3) Gegeben ist eine Kugel K um $M(-1;-1;-1)$ mit $R = 5$ sowie der Punkt $Q(-10;0;-2)$ und die Gerade $g_1: \ \vec{r}_{g_1} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne $P = K \cap g_1$ (diejenige Lösung mit der kleinsten x–Koordinate).

(b) Ein Lichtstrahl geht von Q aus und wird in P an der Tangentialebene an die Kugel reflektiert. Berechne den Winkel zwischen dem ein– und dem ausfallenden Strahl.

Viel Glück!

WIR

2.23 Test: Nichtlineare Gleichungen, Vektorgeometrie, Vektorrechnung II/29

Abschrift • *Copie*

(1) Hat diese Gleichung Lösungen? Wenn ja, dann welche Lösungen? *Graphisch!*

$$\arcsin(x) = e^{\cos(x)}$$

(2) Löse diese Gleichung: $\log_5(7) - \log_{10}(x) = 7\, e^{\log_5(7)}$

(3) (a) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(1;1)$, $(5;2)$, $(4;4)$. Berechne den Schwerpunkt S_a.

(b) Gegeben ist ein konvexes Viereck mit den Eckpunkten $(1;1)$, $(5;2)$, $(4;4)$, $(1.5;3)$. Berechne den Schwerpunkt S_b.

(4) Gegeben sind die Punkte $A(1;1)$, $B(7;3)$, $C(3;0)$, $D(6;5)$. Berechne $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$.

(5) Gegeben sind die Vektoren und Beziehungen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{e} = 3\,\vec{d} - 3\,\vec{a}, \ \vec{c} = 2.5 \cdot \vec{b}$$

Löse die Gleichung $4 \cdot \vec{a} - \vec{c} + \vec{e} + (-1) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ rechnerisch und skizziere die Situation!

Viel Glück!

2.24 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/31

Abschrift • *Copie*

(1) $\left|\begin{array}{rcl} 4\,x-2\,y+3\,z & = & 2 \\ 4\,x-2\,y-2\,z & = & 1 \end{array}\right|$ Was ist der Abstand der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $(0;0;0)$?

(2) $M=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Die folgenden Rechnungen sind von Hand auszuführen (der Weg wird bewertet):

(a) Berechne $M\cdot(B\cdot\vec{a})$.

(b) $M\cdot(B\cdot\vec{x})=\vec{a}\ \rightsquigarrow\ \vec{x}=\,?$ (Falls lösbar.)

(c) Berechne $\det(M\cdot B)$.

(d) Berechne $\det(M\cdot B^{-1})$. (Falls lösbar.)

(e) Berechne die Eigenwerte von $(M\cdot B)$.

(f) Berechne die Eigenvektoren von $(M\cdot B)$ (numerisch).

(3)

$$f(x)=3\,x^4\,y^3+2\,x^2\,y^4.$$

Untersuche f auf Minima, Maxima und Sattelpunkte!
(Kreativ!)

(4) Gegeben: $f(a,b)=a^2+b^2,\ \ a=\dfrac{2}{x^2+y^2},\ \ b=2\,x+y,\ \ r=\sqrt{x^2+y^2}.$

Bilde damit $F(x,y):=f(a(x,y),b(x,y))$

(a) Berechne $\dfrac{\partial F}{\partial r}$.

(b) Berechne das totale Differential $d(a(x,y)\cdot b(x,y))$ von $(a(x,y)\cdot b(x,y)$.

(5) Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius R und auf der Kreislinie verteilt vier Punkte, welche die Ecken eines konvexen Vierecks bilden. Bestimme die Viereckwinkel so, dass der Viereckumfang maximal wird!

Viel Glück!

WIR

2.25 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme II/32

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Punkte $A(-2;0;0)$, $B(4;2;0)$, $C(6;-1;1)$, $A(3;1;6)$.
M_1, M_2, M_3, M_4 sind die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$.

(a) Mache eine Skizze der Situation!

(b) Wie gross ist der Flächeninhalt der Figur $M_1M_2M_3M_4$, falls dieser Flächeninhalt definiert ist?

(c) Wie gross ist der Volumeninhalt des Körpers $AM_1M_2M_3M_4D$, falls dieser Volumeninhalt definiert ist?

(2)

$$\left|\begin{array}{lcl} 3\,x-20\,w+y & = & 11 \\ x+y+11\,z & = & 7 \\ 2\,x-2\,y+z-v & = & 2 \\ -x-8\,z+16\,w & = & -1 \\ 4\,x+2\,y+11\,z-20\,v & = & 18 \end{array}\right|$$

Löse dieses System nach den Regeln von Cramer.
(Die Art der Determinantenberechnung ist freigestellt, jedoch müssen die einzelnen Zwischenresultate resp. Determinanten angegeben werden.)

(3) Gegeben sind die Geraden h_1 und h_2:

$$h_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Was ist die kürzeste Distanz zwischen h_1 und h_2?

(4) Gegeben sind die Ebenen Φ_1 und Φ_2:

$$\Phi_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Für welchen Punkt P der Schnittgeraden ist die Distanz zum Ursprung minimal?

(b) Wie gross ist diese Distanz?

Viel Glück!

WIR

2.26 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme II/33

Abschrift • *Copie*

(1) In einem zweidimensionalen Koordinatensystem ist durch den Streckenzug $\overline{OABCO}$ ein Viereck gegeben mit $O(0;0)$, $A(10;1)$, $B(7;5)$, $C(1;3)$. Weiter sind S_1 und S_2 durch die folgenden Gleichungen definiert: $\overrightarrow{OS_1} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OS_2} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OB}$.

(a) Berechne den Punkt $P = \overline{OS_2} \cap \overline{AS_1}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks, welches durch den Streckenzug $\overline{PABS_2P}$ festgelegt ist.

(2) Gegeben sind die Punkte $A(1;1;1)$, $B(1;6;2)$, $C(-6;5;3)$, $D(1;y;2)$ und $P(2;2;3)$. A, B, C und D sind die Eckpunkte der Grundfläche einer vermutlich nicht regulären Pyramide $Py(ABCDE)$. Dabei liegt der Eckpunkt E auf der Geraden $\overline{AP}$ derart, dass $\overline{AE} \perp \overline{EC}$ gilt.

(a) Berechne y und damit D.

(b) Berechne E.

(c) Berechne den Volumeninhalt von $Py(ABCDE)$.

(3)

$$\left| \begin{array}{lcl} x + y + 3\,z & = & \cos(\varphi) \\ x + y + 3\,z & = & \sin(\varphi) \\ x + y + z & = & 1 \end{array} \right|$$

Kann φ so gewählt werden, dass eine Lösung mit $x = 1$ existiert? Falls ja, so ist φ zu berechnen!

(4)

$$\left| \begin{array}{lcl} (1-\lambda)\,x + 2\,y + 3\,z & = & 1 \\ 1 + (1-\lambda)\,y + 3\,z & = & 2 \\ 1 + 2\,y + (1-\lambda)\,z & = & 3 \end{array} \right|$$

Kann λ so gewählt werden, dass keine Lösung existiert? Wie gross wäre andernfalls λ?

Viel Glück!

WIR

2.27 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/34

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 i m Raum:

$$g_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auf g_2 rollt eine Kugel, welche an g_2 haftet. Gesucht ist der Radius R der minimalst möglichen Kugel, die beim Vorbeirollen g_1 gerade noch berührt.

(2)

$$\left| \begin{array}{lcr} x+y+z+w & = & 0 \\ x-y-z+w & = & 1 \\ x+2\,y+3\,z-2\,w & = & -1 \end{array} \right|$$

(a) $Dim(\mathbb{L}) = ?$

(b) $Rang = ?$

(c) $\mathbb{L} = ?$ (Dabei sei w Parameter!)

(d) Geometrische Struktur von $\mathbb{L}$?

(3)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\det(M) = ?$ (Rechnung sichtbar!)

(b) Ist M regulär?

(c) $M^T = ?$

(d) $M^{-1} = ?$ (Rechnung sichtbar!)

(e) Eigenwerte von M?

(f) Ist $(M - x\,E) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ lösbar?

(g) Bedeutung von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich M ?

%

(4) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -0.367692 & -1.11477 & 1 \\ 0.928667 & 0.700131 & 1 \end{pmatrix}$

(a) $A^T = \,?$

(b) $(A^T)^{-1} = \,?$ (Methode frei!)

(c) $S = (A^T)^{-1} \cdot M \cdot A^T = \,?$ (Gerundet!)

(d) Was lässt sich aus dem letzten Resultat über die Eigenwerte von M ableiten?

(e) Was hat A mit den Eigenvektoren von M zu tun?

Viel Glück!

2.28 Test: Vektorgeometrie, Goniometrie II/35

Abschrift • *Copie*

(1) Bezüglich der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis bilden.

(b) Stelle, falls möglich, $\vec{d}$ bezüglich $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

(c) Berechne die Länge von $3\,\vec{a} - 2\,\vec{b} + 4\,\vec{c} - \vec{d}$.

(2) Durch $A(3; 3; 3)$ und $B(5; -2; 6)$ ist eine Gerade gegeben.
Bestimme den Punkt $C(18; y; z)$ so, dass $C \in g$ gilt.

(3) Gesucht ist die kleinste Zahl a, so dass $|\sin(x) + \cos(x)| \leq a$ ist.

(4) Zwei Kreise mit dem Radius r haben den Mittelpunktabstand $\frac{r}{2}$.
Berechne den Flächeninhalt einer der so entstehenden Mondsicheln.

(5) Vereinfache: $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta))}$

(6) Gegeben sind $g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_3 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Eckpunkte des entstehenden Dreiecks.

(b) Berechne den Flächeninhalt des entstehenden Dreiecks.

(c) Berechne die Innenwinkel des entstehenden Dreiecks.

(d) Entscheide rechnerisch, ob der Punkt $P(2; 3)$ im Innern des Dreiecks liegt.

Viel Glück!

2.29 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie, Gleichungssysteme Goniometrie II/38

Abschrift • *Copie*

(1) Zeige rechnerisch: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den Seiten.

(2) Seien $A = A(1; 2)$, $B = B(4; -1)$, $C = C(x; 8)$.

(a) Bestimme C so, dass A, B, C auf einer Geraden liegen.

(b) Bestimme alsdann D so, dass (A, B) und (C, D) harmonische Punktepaare bilden.

(3) Seien $A = A(1; 2)$, $B = B(4; -1)$, $C = C(6; 8)$.

(a) Berechne den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$.

(b) Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

(c) Berechne den Umkreisradius des Dreiecks $\triangle ABC$.

(4) Löse möglichst exakt:

$$\begin{aligned} \sin^2(x) - 3\,cos^2(x) &= 0 \\ \sin(x) + 2\,sin(2\,x) &= 0 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} g:\ 10\,x + 7\,y + 16 &= 0 \\ h:\ 12\,x - 17\,y - 14 &= 0 \end{aligned}$$

Kleinster Schnittwinkel der Geraden ≥ 0 ?

(6) Seien $A = A(0; 0; 1)$, $B = B(2; -2; 4)$, $C = C(5; 1; 2)$, Ebene $\Phi = \Phi(A, B, C)$.

(a) Berechne die Durchstosspunkge der Achsen durch Φ.

(b) Berechne den kürzesten Abstand von C auf $\overline{AB}$ auf zwei Stellen hinter dem Komma genau.

Viel Glück!

WIR

2.30 Test: Vektorgeometrie, Goniometrie II/39

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Punkte $A(0;5;2)$, $B(3;2;3)$, $C(6;-2;0)$, $B(-3;-6;1)$.

(a) Berechne im Tetraeder $ABCD$ die Länge der Höhe durch A.

(b) Bestimme den Höhenfusspunkt.

(2) Gegeben sind die Punkte A, B, C, D mit denselben Koordinaten wie in der Aufgabe oben.
M_1, M_2, M_3, M_4 seien die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Berechne die Winkel zwischen den Kanten im Viereck $M_1M_2M_3M_4$.

(3) Bestimme die Lösungen der Gleichungen $\cos^2(x) + \cos(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$.

(4) Gegeben sind die Geraden $g:\ 3\,x-4\,y+12=0$ und $h:\ 5\,x+12\,y-1=0$ sowie die Distanz $d=8$. Seien w_1 die Winkelhalbierende von g und h zum kleineren Winkel und w_2 die zum grösseren Winkel. Sei S der Schnittpunkt von g und h. Zu h wird im Abstand d von S eine Parallele gezogen. h_1 schneidet w_1 in P und w_2 in Q. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks SPQ.

Viel Glück!

2.31 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen II/42

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Punkte $A(7;5;-2)$, $B(11;6;6)$, $C(3;13;6)$, $D(16;4;12)$, $E(9;11;-2)$. Berechne die Punkte auf der Geraden $h(D,E)$, die von $g_1(A,B)$ und $g_2(A,C)$ den gleichen Abstand haben.

(2) (a)

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1-\sin(\varphi) & 1 & 1+\cos(\varphi) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+\cos(\varphi) & 1 & 1+\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Bestimme φ so, dass M regulär ist.

(b)

$$D = \frac{1}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ z & z^2 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} \lambda-1 & x & x^2 \\ \lambda-1 & y & y^2 \\ \lambda-1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

i. Wann ist $D=0$?

ii. Wann existiert D nicht?

(c)

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & x & 0 \\ 0 & y & 1 \\ z^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Gegeben ist ein Würfel, der bestimmt ist durch die Eckpunkte $O(0;0;0)$, $R(1;0;0)$, $P(0;1;0)$, $Q(0;0;1)$. Weitere verwendete Eckpunkte sind $S(1;0;1)$, $U(1;1;0)$, $T(1;1;1)$.
Wir verwenden die Geraden: $g_1 = g(O,S)$, $g_2 = g(Q,R)$, $g_3 = g(O,U)$, $g_4 = g(R,P)$. Damit erhalten wir die Seitenmittelpunkte $N = g_1 \cap g_2$ und $M = g_3 \cap g_4$. Dazu ist $g_5 = g(T,M)$.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle(RMN)$

(c) Berechne die Abstände von g_1 und g_2 zu g_5.

Viel Glück!

WIR

2.32 Test: Kombinatorik, Potenzreihen, Vektorgeometrie II/53

Abschrift • *Copie*

(1) Entwickle in eine Potenzreihe unter Benutzung der Potenzreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

(a) $f_1(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

(b) $f_2(x) = \sin(\cos(x))$

(2) Bilde die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a(n) \cdot b(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n} \cdot e^x \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} \cdot e^{-n}$.

(a) Konvergiert diese Reihe?

(b) Falls ja, was ist dann der Konvergenzbereich?

(3) Gegeben ist ein Dreieck $A(1;-1)$, $B(3;6)$, $C(4;-3)$. Durch die Seitenmittelpunkte wird ein Kreis gelegt. Berechne diesen Kreis auf 6 Stellen genau:

(a) Radius?

(b) Mittelpunkt?

(4) Mit Hilfe der Zeichen $\{+,-,0,1\}$ werden immer neue 7–stellige Zeichenfolgen kombiniert, wobei das mittlere Zeichen immer eine 1 ist. Alle so entstandenen Zeichenfolgen werden fortlaufend hintereinander geschrieben. Wieviele mögliche, auf diese Weise entstehenden Zeichenketten gibt es? (Es genügt eine „wissenschaftliche Zahlendarstellung" $a \cdot 10^b$ anzugeben.)

Viel Glück!

WIR

2.33 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen, Diff'rechn. im $\mathbb{R}^n$, Vektorgeom. III/14

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left| \begin{array}{lcl} y'' - g\,y' + 8\,y & = & 4 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\,\pi) \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{array} \right|$$

Beschreibe die Lösung!

Was passiert?

(2) Gegeben ist die Ebene $\Phi:\ x - 2\,y + 4\,z - 3 = 0$. Eine Gerade g' liegt in der (x, y)–Ebene H_1 und geht durch den Ursprung. Sie schliesst mit der x–Achse den Winkel $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$ ein.

(a) Wie gross ist die Steigung in (z–Richtung bezüglich H_1) der Geraden $g \subset \Phi$, deren Projektion in H_1 die Gerade g' ist? (Skizze!)

(b) Wie gross ist die Steigung in (z–Richtung bezüglich H_1) der Geraden g, welche über dem Punkte $(1; 2) \in H_1$ Tangente ist an die Fläche $x^2 - 2\,y^2 + 4\,z - 3 = 0$? (Skizze!)

(3)

$$f(x, y) = 2\,x^2 + 3\,x\,y - 2\,y^2 + 3 - 3\,y + 4$$

(a) Extrema?

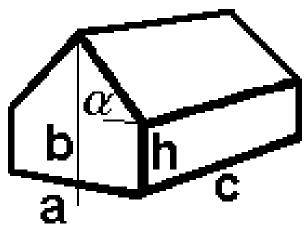
(b) Berechne die Tangentialebene in $P(x; y; f(x, y)) = (2; 3; f(2; 3))$.

(c) Liegt $(3; 2; 5)$ in der Tangentialebene?

(4) Löse: Haus mit symmetrischem Satteldach:

$V = 500\ m^3,\ \ \alpha = 45^o$

Bestimme a, b, c, h so, dass die Oberfläche minimal ist!



(a) Für den Fall $a = c$.

(b) Für den Fall, dass keine Bedingung gestellt ist.

Viel Glück!

WIR

2.34 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Vektorgeometrie III/43

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Spur der Determinante.

(b) Berechne die Eigenwerte.

(c) Berechne die Eigenvektoren.

(d) Berechne allenfalls weitere existierende Hauptvektoren.

(2) Sei $A = B + k \cdot E = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}$.

Berechne die Eigenwerte und untersuche, wie diese von h abhängen.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Stelle A in der Form $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$ dar (mit $\det(U) = 1$).

(b) Berechne $(A^{-1})^{100}$

(c) Berechne das Bild der Geraden $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Was fällt an diesem Resultat auf?

Viel Glück!

WIR

2.35 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Vektorgeometrie III/42

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von $A(s)$.
(b) Berechne die Spur von $A(s)$.
(c) Berechne die Eigenwerte von $A(s)$.
(d) Berechne die Eigenwerte von $A(1)$.
(e) $A(s)^{-1} = \,?$
(f) Berechne die Eigenwerte von $A(3)$.
(g) Berechne die Eigenvektoren von $A(3)$.

(2)

$$B(x) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von $B(s)$.
(b) Berechne die Eigenwerte von $B(s)$.
(c) $B(s)^{-1} = \,?$
(d) Berechne die Eigenwerte von $B(2)$.
(e) Berechne die Eigenvektoren von $B(2)$.
(f) $B(2) = X \cdot D \cdot X^{-1}$, $D =$ Diagonalmatrix, $X =$ Matrix der Eigenvektoren.
   i. $X, D = \,?$
   ii. $X^{-1} = \,?$
(g) $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B(x) \cdot \vec{y}(t) = \vec{w}(t)$ (Gerade!).
   Bestimme s so, dass die Bildgerade durch den Ursprung geht.

(3)

$$A(s) \cdot \begin{pmatrix} s \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gibt es eine Lösung (s, y, z, w)?

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 3

Serien mit „Matrizenrechnung, Determinanten“

3.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

3.2 Test: Determinanten und Matrizen, Differentialgleichungen, Statistik I/18

Abschrift • *Copie*

(1) Eine Gruppe von Studenten hat die Körpergrösse von Mitstudenten gemessen. Hier sind die Messdaten (in cm):
Un groupe d'étudiants a mesuré la taille d'un nombre d'étudiants de l'école. Voici les données (en cm):

173	178	177	173	184	161	162	169	154	188
177	177	169	183	185	183	173	192	182	181
176	177	169	177	173	163	192	165	156	159
175	173	179	178	177	168	158	183	187	175
174	173	179	169	179	168	174	194	160	187

(a) Teilen Sie die Daten in Klassen ein mit den Klassenmitten $152, 157, 162, \ldots$ (Klassenbreite 5).
Classifier les données en classes dont les millieus sont $152, 157, 162, \ldots$ *(largeur des classes* 5*).*

(b) Berechnen Sie Mittelwert sowie Standardabweichung der Klassen.
Calculer la valeur moyenne et la déviation standard.

(c) Stellen Sie die Klassen in einem Balkendiagramm oder Histogramm dar.
Représenter ces classes à l'aide d'un diagramme de barre ou bien histogramme.

(2) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:
Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a)

$$y(x)\, y\,'(x) - x = 1, \qquad y(1) = 2$$

(b)

$$y\,'(x) = e^{-x}\, y(x)$$

%

(3) Gegeben sind die folgenden Matrizen. *Soient données les matrices suivantes*:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M_4 sei die Inverse von M_3 — *soit M_4 l'inverse de M_3*,
$M_5 = M_4 \cdot M_2$.
Die Gerade g ist gegeben durch — *la droite g soit donnée par*

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbf{R}).$$

(a) Berechnen Sie / *Calculer* M_4 und / *et* M_5.

(b) Berechnen Sie das Bild g' von g unter M_5 / *Calculer l'image g' de g :* $\vec{v} = M_5 \cdot \vec{r}$.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g' mit der Geraden $y = x$.
Calculer le point d'intersection de g' avec la droite $y = x$.

(d) Bestimmen Sie das Volumen des Spats, der aufgespannt wird durch die Ortsvektoren zu den Punkten $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.
Vergleichen Sie das Resultat mit der Determinante von M_1.
Calculer le volume du parallélépipède étendu par les vecteurs liés aux points suivants: $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.
Comparez le résultat avec la valeur de la déterminante de M_1.

Viel Glück!

3.3 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/52

Abschrift • *Copie*

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte von C.

(b) Berechne die Eigenvektoren von C.

(c) Was hat B mit C zu tun?

(d) Berechne die Inverse von C.

(2)

$$f(x) = \frac{x^3 + 3\,x^2 - x - 2}{x^2 + 2\,x}$$

(a) $\int f(x)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_{-3}^{\infty} f(x)\,dx = \,?$

(c) $\int\limits_{-3}^{\infty} \frac{f(x)}{x^k}\,dx \rightsquigarrow$ Wie gross muss k mindestens sein, damit das Integral existiert? (Begründung!)

(d) $\int\limits_{-3}^{\infty} \frac{f(x)}{x^4}\,dx = \,? \rightsquigarrow$ Exakt!

(3) $g(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ hat Nullstellen bei $x = 0$ und bei $x = 3$ sowie einen Wendepunkt in $(x, y) = (1, 1)$. Weiter sei $M(x_m, y_m)$ derjenige Punkt mit $0 \leq x_m \leq 3$, in dem der Funktionswert ein lokales Maximum annimmt. R sei das achsenparallele Rechteck, das durch den Urspung O und M gebildet wird.
Berechne $\int\limits_0^3 f(x)\,dx$ und entscheide, ob $\int\limits_0^3 f(x)\,dx \geq$ (Inhalt von R) richtig ist.

(4) Gegeben sind die Gerade g und die Ebene Φ:

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi : x - y + 2\,z + 2 = 0$$

Unter welchem Winkel (α) trifft g auf Φ auf?

Viel Glück!

WIR

3.4 Test: Determinanten und Matrizen, Gleichungssysteme, komplexe Zahlen I/55

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Löse $\dfrac{\sqrt{2}\,(z-i)^5-\sqrt{2}}{1+i}=1-i$ und skizziere die Lösung.

(b) Sei $z=e^{i\,\varphi}=\cos(\varphi)+i\,\sin(\varphi)$.
Leite aus $z^n=e^{i\,n\,\varphi}=\cos(n\,\varphi)+i\,\sin(n\,\varphi)$ eine Formel für $\cos(n\,\varphi)$ ab!

(c) Beschreibe eine geometrische Kosntrunktion für den Punkt $\dfrac{1}{z}$ zu einem beliebigen gegebenen $z\in\mathbb{C}$.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&\alpha&1&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&\beta\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$ Wie hängt $\det(A)$ von α und β ab? Erkläre das Resultat!

(3)

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&\alpha&1\\0&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(a) Für welches α hat das Gleichungssystem allenfalls keine Lösung?

(b) Wie gross muss α gewählt werden, damit $x=\dfrac{1}{8}$ wird?
Berechne dazu auch y und z!

(4)

$$B=\begin{pmatrix}-1&4\\-4&\lambda\end{pmatrix},\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

(a) Berechne $B^2=B\cdot B$ sowie $B\cdot(B\cdot\vec{u})$.

(b) Sei $B\cdot((2\,B)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$. Berechne λ so, dass die Gleichung richtig ist.

(5)

$$M\cdot X=X\cdot M\ \text{ mit } M=\begin{pmatrix}-1&4\\-4&-2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$$

Löse dieses Gleichungssystem (Unbekannte $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.)
Wähle bei Bedarf $t=\gamma$ als Parameter. Suche dazu $Dim(\mathbb{L})$, den Rang und die Ordnung.

Viel Glück!

WIR

3.5 Test: Determinanten und Matrizen, lineare Abbildungen, Eigenwerttheorie I/56

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Spur und die Determinante von A.

(b) Berechne die Eigenwerte von A.

(c) Berechne die Eigenvektoren von A.

(d) Berechne allenfalls weitere existierende Hauptvektoren von A.

(2) Sei $A = B + k \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}.$

Berechne die Eigenwerte und untersuche, wie diese von k abhängen.

(3) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

(a) Stelle A dar in der Form $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$ mit $\det(U) = 1$.

(b) Berechne $A^{100} := A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$

(c) Berechne das Bild der Geraden $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter A.
Was ist daran speziell auffallend?

Viel Glück!

3.6 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Gleichungssysteme II/20

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1)
$$\left|\begin{array}{lcl} y-z+w & = & -1 \\ x-y+z & = & 1 \\ x-y+z-w & = & 2 \\ 2\,x+y+2\,z+w & = & 0 \end{array}\right|$$

(a) Berechne die Determinanten D_0, D_x, D_y, D_z, D_w.

(b) Berechne x, y, z, w.

(2) Gegeben sind der Kreis $K : (x-2)^2+(y-1)^2 = 25$ und die Gerade $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. M ist der Kreismittelpunkt, $g_1 \cap K = \{T_1(u_1; v_1), T_2(u_2; v_2) \mid u_1 \geq u_2\}$. Weiter ist $g_n = \overline{MT_1}$, $g_2 =$ Kreistangente in T_1. Setze dabei $g_n : \vec{x}_n = \vec{b}_0+\lambda\,\vec{b}_1$, $g_2 : \vec{x}_2 = \vec{c}_0+\lambda\,\vec{c}_1$.

(a) Berechne exakt T_1 und T_2.

(b) Berechne exakt g_n: $\vec{b}_1 =$? ($\vec{b}_1$ normieren!)

(c) Berechne exakt g_2: $\vec{c}_1 =$? ($\vec{c}_1$ normieren!)

(d) Berechne exakt den Inhalt des Dreiecks $\triangle(MT_1T_2)$.

(e) Berechne exakt den Abstand d von T_2 zu g_2

Exakt $\rightsquigarrow$ *keine Dezimalbrüche!*

Viel Glück!

3.7 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen, komplexe Zahlen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/21

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left| \begin{array}{lcl} 2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & 4 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 & = & 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4\,x_4 + 2\,x_5 & = & 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 + 2\,x_5 & = & -2 \end{array} \right|$$

(a) Gesucht ist der Lösungsraum mit Hilfe von Gauss–Jordan. (Die Schritte müssen sichtbar sein.)

(b) Wie gross ist der Rang des Systems?

(2) Gegeben: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{D}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 \\ x \\ 3 \end{pmatrix}$. Dabei ist D eine Drehung um die z–Achse. $\leadsto$ Berechne x.

(3) Berechne die Summe aller verschiedenen 437–ten Einheitswurzeln!
(Die Rechnung bzw. die Begründung wird bewertet!)

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $B \cdot A = \,?$

(b) $(A \cdot B - 2\,E)\,\vec{u} = \vec{v} = \,?$

(c) Berechne $\vec{x}$ mit $\vec{v} \times \vec{x} = \vec{u}$ und $\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = 5$

(5)

$$\int \frac{5\,x + 12}{\sqrt{-x^2 - 7\,x}}\,dx = \,?$$

(6) Beweise: $\quad \forall_{n \in \mathbb{N}} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = +\frac{n}{n+1}$

Viel Glück!

WIR

3.8 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen II/27

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) i. Berechne A^{-1} (λ beliebig, jedoch A regulär.)

ii. Berechne B^{-1} für $\lambda = 1$. (Rechnung sichtbar!)

(b) i. Löse $C \cdot \vec{x} = \vec{e}_1$ (Gauss–Jordan) für $\lambda = 1$.

ii. Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_1$ (mit A^{-1}) für $\lambda = 2$.

(2) Die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ bestimmen zusammen mit dem Ursprung O den Einheitswürfel, genannt $Fig.1$. Darin ist $\overrightarrow{OP} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ sowie $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$. Weiter gelten die Bezeichnungen $\overrightarrow{OF_1} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OF_2} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\overrightarrow{OF_3} = \vec{e}_3 + \vec{e}_1$. Dazu ist:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun die Abbildung:

$$Fig.1 \overset{G}{\longmapsto} Fig.2 \overset{H}{\longmapsto} Fig.3$$

(a) Berechne nachvollziehbar alle Eckpunkte von $Fig.3$.

(b) $Fig.3$ wird um $+\frac{\pi}{6}$ um die $\vec{e}_3$–Achse (z–Achse) gedreht. Wohin kommt das Bild von P zu liegen?

(3) B und C sind die Matrizen wie oben angegeben. Berechne λ aus $\det(B) = \det(C)$.

Viel Glück!

3.9 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen II/28

Abschrift • *Copie*

(1) Die Vektoren $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ bestimmen zusammen mit dem Ursprung O den Einheitswürfel, genannt $Fig.1$. Darin ist $\overrightarrow{OP}= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ sowie $\overrightarrow{OE_1}= \vec{e}_1,\quad \overrightarrow{OE_2}= \vec{e}_2,\quad \overrightarrow{OE_3}= \vec{e}_3$.
Sei nun $D_{\varphi,x}$ eine Drehmatrix für eine Drehung um den Winkel φ um die x–Achse, $D_{\varphi,y}$ eine solche Matrix entsprechend für die y–Achse u.s.w.
Wir betrachten nun die Abbildung:

$$Fig.1 \overset{D_{15^o,x}}{\longmapsto} Fig.2 \overset{D_{30^o,z}}{\longmapsto} Fig.3$$

(a) Berechne die Lage der Bilder von $E_1,\ E_2,\ E_3$ und P in $Fig.3$.

(b) Berechne die Determinante von $(D_{30^o,z} \cdot D_{15^o,x})$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ y^0 & y^1 & y^2 \\ z^0 & z^1 & z^2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante $\det(A^{-1} \cdot B^{-1})$. Für welche λ existiert diese Determinante nicht?

(b) Löse die Gleichung $\det(A) = \det(B)$ für die Unbekannte λ.

(c) Berechne $\det(C)$.

(3)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Löse die Gleichung $G \cdot \vec{x} = \vec{e}_2$ nach Gauss–Jordan.

(a) Für $\lambda = 1$.

(b) Für $\lambda = -1$.

Viel Glück!

WIR

3.10 Test: Determinanten und Matrizen, lineare Abbildungen II/30

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) i. Berechne $\det(A)$.
ii. Berechne $\det(A^T)$.
iii. Berechne $\det(B)$.
iv. Berechne $\det(C)$.

(b) i. Berechne A^{-1}.
ii. Berechne B^{-1}.
iii. Berechne C^{-1}.

(2) Sei $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Löse $A\,\vec{x} = \vec{v}_1$ mit A von oben.

(3) Löse falls möglich $B \cdot X = C^2 = C \cdot C$ mit B und C von oben.

(4) Löse falls möglich $C\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit C von oben.

(5)

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sei $D : \vec{v}_2 \longmapsto \vec{W}_2 = D \cdot \vec{v}_2$
und $D : \vec{v}_0 \longmapsto \vec{W}_0 = D \cdot \vec{v}_0$

$\vec{v}_0$ und $\vec{v}_2$ definieren ein Parallelogramm P_v. Ebenso definieren $\vec{w}_0$ und $\vec{w}_2$ ein Parallelogramm P_w.

(a) Wie gross ist der Flächeninhalt von P_w.

(b) Wieviel mal ist der Flächeninhalt von P_w grösser oder kleiner als der von P_v?

Viel Glück!

WIR

3.11 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/34

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 i m Raum:

$$g_1 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auf g_2 rollt eine Kugel, welche an g_2 haftet. Gesucht ist der Radius R der minimalst möglichen Kugel, die beim Vorbeirollen g_1 gerade noch berührt.

(2)

$$\left| \begin{array}{lcr} x+y+z+w & = & 0 \\ x-y-z+w & = & 1 \\ x+2\,y+3\,z-2\,w & = & -1 \end{array} \right|$$

(a) $Dim(\mathbb{L}\,) = ?$

(b) $Rang = ?$

(c) $\mathbb{L}\ = ?$ (Dabei sei w Parameter!)

(d) Geometrische Struktur von $\mathbb{L}$?

(3)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\det(M) = ?$ (Rechnung sichtbar!)

(b) Ist M regulär?

(c) $M^T = ?$

(d) $M^{-1} = ?$ (Rechnung sichtbar!)

(e) Eigenwerte von M?

(f) Ist $(M - x\,E) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ lösbar?

(g) Bedeutung von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich M ?

%

(4) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -0.367692 & -1.11477 & 1 \\ 0.928667 & 0.700131 & 1 \end{pmatrix}$

(a) $A^T = ?$

(b) $(A^T)^{-1} = ?$ (Methode frei!)

(c) $S = (A^T)^{-1} \cdot M \cdot A^T = ?$ (Gerundet!)

(d) Was lässt sich aus dem letzten Resultat über die Eigenwerte von M ableiten?

(e) Was hat A mit den Eigenvektoren von M zu tun?

Viel Glück!

3.12 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/36

Abschrift • *Copie*

(1) $A = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Stelle A in Diagonalform dar!

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^3 \\ 1 & 0 & -3\,q^2 \\ 0 & 1 & 3\,q \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren!

(3) Eine lineare Abbildung ist durch die Matrix A gegeben. Zudem weiss man:

$$\vec{0} \xmapsto{A} \vec{0}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xmapsto{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \xmapsto{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne, falls möglich, die Matrix A.

(b) Suche das Bild von $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(4) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne für A das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 + c_2\,\lambda^2 + c_1\,\lambda + c_0$.

(b) Berechne die Matrix $P(A) = A^3 + c_2\,A^2 + c_1\,A + c_0\,E$

Viel Glück!

WIR

3.13 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/37

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(A\,\vec{x})^T\,A^{-1} - \vec{v}^{\,T}\,M\,A^{-1} = \vec{x}^{\,T}\,A,\;\; A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix},\;\; M = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix},\;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix},\;\; \vec{x} = ?$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Löse das Eigenwertproblem $C\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}$.

(b) Bestimme die Fixgeraden (Skizze!).

(3)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechne B^{-1} von Hand, falls möglich.

(4) Löse das Gleichungssystem $B\,\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b}^{\,T} = (6, 9, 12, 24)$, B wie oben.

Viel Glück!

3.14 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/40

Abschrift • *Copie*

(1) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & k \\ 1 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$ Für welche k ist $\det(M_1) = 0$?

(2)

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

(a) $(M_2)^{-1} = ?$

(b) $k = 1 \rightsquigarrow$ Was ist das geometrische Bild von $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ bei $\vec{x} \longmapsto M_2 \cdot \vec{x}$

(c) Berechne die Eigenwerte von M_2.

(d) Berechne die Eigenwerte von M_2 für $k = 1$.

(e) Berechne die Eigenvektoren von M_2.

(3)

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob M_3 eine Ähnlichkeitsabbildung stiftet (Begründung!).

(b) $M_3 = U \cdot D \cdot U^T$. Konstruiere U und D.

Viel Glück!

WIR

3.15 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen II/42

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Punkte $A(7;5;-2)$, $B(11;6;6)$, $C(3;13;6)$, $D(16;4;12)$, $E(9;11;-2)$. Berechne die Punkte auf der Geraden $h(D,E)$, die von $g_1(A,B)$ und $g_2(A,C)$ den gleichen Abstand haben.

(2) (a)

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1-\sin(\varphi) & 1 & 1+\cos(\varphi) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+\cos(\varphi) & 1 & 1+\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Bestimme φ so, dass M regulär ist.

(b)

$$D = \frac{1}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ z & z^2 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} \lambda-1 & x & x^2 \\ \lambda-1 & y & y^2 \\ \lambda-1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

i. Wann ist $D = 0$?

ii. Wann existiert D nicht?

(c)

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & x & 0 \\ 0 & y & 1 \\ z^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Gegeben ist ein Würfel, der bestimmt ist durch die Eckpunkte $O(0;0;0)$, $R(1;0;0)$, $P(0;1;0)$, $Q(0;0;1)$. Weitere verwendete Eckpunkte sind $S(1;0;1)$, $U(1;1;0)$, $T(1;1;1)$.
Wir verwenden die Geraden: $g_1 = g(O,S)$, $g_2 = g(Q,R)$, $g_3 = g(O,U)$, $g_4 = g(R,P)$. Damit erhalten wir die Seitenmittelpunkte $N = g_1 \cap g_2$ und $M = g_3 \cap g_4$. Dazu ist $g_5 = g(T,M)$.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle(RMN)$

(c) Berechne die Abstände von g_1 und g_2 zu g_5.

Viel Glück!

3.16 Test: Komplexe Zahlen u. Funktionen, Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen II/44

Abschrift • *Copie*

(1) Komplexe Zahlen und Funktionen

(a) Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y),\;\; z = x + i\,y$. Sei weiter $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.
Berechne formal $\triangle\, f$. *Hinweis: Cauchy–Riemann.*

(b) Berechne exakt $(-i)^{1-i}$.

(c) Löse vollständig und exakt $\sin(\pi \cdot t + i \cdot t) = 0,\;\; t \in \mathbb{R}$.

(d) Skizziere alle Lösungen von $(z+2)^3 = 1 + i$.

(e) Sei $f(z) = \dfrac{a\,z+b}{c\,z+d} = w,\;\; a,b,c,d \in \mathbb{C}$ (Möbiustransformation). Sei weiter
$f:\; -1 \longmapsto 1,\;\; f:\; 1 \longmapsto -1,\;\; f:\; -i \longmapsto 0.\; \leadsto$ Bestimme f.

(f) Untersuche, ob $f(z) = \dfrac{z}{|z|^2}$ holomorph ist!

(2) Gleichungssysteme,Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen

(a)
$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
i. Berechne von Hand $M^{-1} = ?$ (Rechnung kommentieren!)

ii. Für welche α existiert M^{-1} nicht?

(b) $A \cdot X = A^T \cdot B^2,\;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix},\;\; \gamma \neq 0.\;\; \leadsto\;\; X = ?$

(c)
$$\left|\begin{array}{lcr} 2\,x + 4\,y + 6\,z & = & 12 \\ 3\,x + 3\,y - 2\,z & = & -9 \\ x + 3\,y + 7\,z & = & 16 \end{array}\right|$$
Löse das Gleichungssystem.
(Zeige dabei das Gauss–Verfahren.)

(d)
$$\left|\begin{array}{lcr} 2\,x + 4\,y + 6\,z & = & 12 \\ x + 3\,y - 2\,z & = & 16 \\ x + y + 8\,z & = & 0 \end{array}\right|$$
Was ist die Dimension des Lösungsraumes $\mathbb{L}$?

(e) $\mathcal{A} : \vec{x} \longmapsto \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \vec{x} \leadsto$ Suche eine mögliche Matrix A mit $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{v} = A \cdot \vec{x}$

(f) Eine lineare Abbildung stiftet die Zuordnungen $0 \longmapsto 0$,
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Berechne eine mögliche Matrix, die das Gewünschte leistet und bestimme damit das Bild von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Viel Glück!

WIR

3.17 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, komplexe Zahlen III/41

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von A.

(b) Berechne die Spur von A.

(c) Berechne die Eigenwerte von A.

(d) Berechne die Eigenvektoren von A.

(e) Berechne, falls vorhanden, die Hauptvektoren $\vec{y}$ von A.
Hinweis: Eigenvektoren $\rightsquigarrow$ $A \cdot \vec{x} = \lambda \, \vec{x}$ oder $(A - \lambda E) \, \vec{y} = \vec{0}$.
Hauptvektoren $\rightsquigarrow$ $(A - \lambda E)^2 \, \vec{x} = \vec{0}$.

(2)

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von A.

(b) Kann α so gewählt werden, dass $\mathbb{L} = \{\}$ ist? — ($\alpha = ?$)

(c) Wie gross ist z für $x = \frac{1}{8}$? (Falls lösbar.)

(3)

$$\frac{\sqrt{2}\,(z-i)^5 - \sqrt{2}}{1+i} = 1 - i$$

Leite die Lösungen her und skizziere die Lösungsmenge!

(4)

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untersuche die Abhängigkeit der Eigenwerte von k !

(5)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = X \cdot D \cdot X^{-1} \quad \text{(Diagonalisierung)}$$

(a) Berechne D und $X = (\vec{x_1} x_2)$, $\vec{x_1}$ und $\vec{x_2}$ normiert.

(b) Berechne A^{100}.

(c) Berechne $A \cdot \vec{y}(t)$, $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Viel Glück!

WIR

3.18 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Vektorgeometrie III/42

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von $A(s)$.
(b) Berechne die Spur von $A(s)$.
(c) Berechne die Eigenwerte von $A(s)$.
(d) Berechne die Eigenwerte von $A(1)$.
(e) $A(s)^{-1} = ?$
(f) Berechne die Eigenwerte von $A(3)$.
(g) Berechne die Eigenvektoren von $A(3)$.

(2)

$$B(x) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von $B(s)$.
(b) Berechne die Eigenwerte von $B(s)$.
(c) $B(s)^{-1} = ?$
(d) Berechne die Eigenwerte von $B(2)$.
(e) Berechne die Eigenvektoren von $B(2)$.
(f) $B(2) = X \cdot D \cdot X^{-1}$, $D =$ Diagonalmatrix, $X =$ Matrix der Eigenvektoren.
  i. $X, D = ?$
  ii. $X^{-1} = ?$
(g) $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B(x) \cdot \vec{y}(t) = \vec{w}(t)$ (Gerade!).
Bestimme s so, dass die Bildgerade durch den Ursprung geht.

(3)

$$A(s) \cdot \begin{pmatrix} s \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gibt es eine Lösung (s, y, z, w)?

Viel Glück!

WIR

3.19 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Vektorgeometrie III/43

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Spur der Determinante.

(b) Berechne die Eigenwerte.

(c) Berechne die Eigenvektoren.

(d) Berechne allenfalls weitere existierende Hauptvektoren.

(2) Sei $A = B + k \cdot E = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}$.

Berechne die Eigenwerte und untersuche, wie diese von h abhängen.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Stelle A in der Form $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$ dar (mit $\det(U) = 1$).

(b) Berechne $(A^{-1})^{100}$

(c) Berechne das Bild der Geraden $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Was fällt an diesem Resultat auf?

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 4

Serien mit „Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme“

4.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

4.2 Test: Funktionen im $\mathbb{R}^1$, Gleichungssysteme, Ungleichungssysteme, Zahlentheorie I/02

Abschrift • *Copie*

(1) Löse: • *Résoudre:* $\left|\begin{array}{lll} x-y & \leq & 1 \\ x+y & \geq & 1 \\ y & \geq & 2\,x-6 \end{array}\right|$

(2) (a) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$: $\rightsquigarrow$ Algebraische Struktur? • *Structure algébrique?*

(b) $a+b=10,\ \ a^2=10\,b \ \rightsquigarrow\ \ a=?,\ \ b=?,\ \ a\in\mathbb{Q}\,?$

(3) (a) Löse: • *Résoudre:* $x^2-4\,x+5=0$

(b) Skizziere: • *Esquisse:* $y=x^2-4\,x+5$

(4) (a) Exakt: • *Exacte:* $\tan(60^o)=\,?$

(b) Löse: • *Résoudre:* $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ ($\rightsquigarrow$ alle Lösungen!) • *Toutes les solutions!*

(5) Löse: • *Résoudre:* $\left|\begin{array}{lll} -2\,x-y+12 & = & 0 \\ x+y & = & 2 \\ x-2\,y & = & 8 \\ 2\,x+y & = & 12 \end{array}\right|$

(6) $\log_{10}(3)+3\,\log_{10}(2)=\log_{10}(x)\ \Rightarrow\ x=\,?$

(7) $\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin(x)\cdot\cos(\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{\pi}{3})\cdot\cos(\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{4})})\ \Rightarrow\ x=\,?$

(8) Auf wieviele verschiedene Arten kann man sechs Häuser mit sechs verschiedenen Farben kolorieren?
• *De combien de manières différentes est–ce qu'on peut colorer six maisons de manières différentes?*

(9) *kgV'ppmc*$(1376528024,1376528026)=\,?$

(10) $0.0123456789\overline{0123456789}\ldots=\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ \dfrac{a}{b}=\,?$

Viel Glück! — Bonne chance!

4.3 Test: Gleichungssysteme, Vektorgeometrie I/08

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist das Dreieck $\triangle OP_1P_2$ mit der Fläche F und $P_1(5;2)$, $P_2(2;3)$, $\vec{a} = \overrightarrow{OP_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OP_2}$, $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ sowie $h =$ Höhe von P_2 auf $\overline{OP_1}$. Hebe diese Situation in den 3–dimensionalen Raum mit $z = 0$ und berechne folgende Werte:

(a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ?$

(b) $\langle \vec{a}, (\vec{a} + \vec{b}) \rangle = ?$

(c) $\vec{a} \times \vec{b}$

(d) $|F| = ?$

(e) $h = ?$

(f) $\varphi = ?$

(2) Gegeben ist eine Gerade g, welche den Kreis mit dem Ursprung als Zentrum im Punkte $P(1;2)$ tangiert. g schneidet die x–Achse in A und die y–Achse in B. g soll durch die Form $g: \ \vec{r}_g = \vec{r}_0 + t\,\vec{a}$ dargestellt werden, $\vec{a}$ normiert.

(a) $A(x_1; y_1) = ?$

(b) $B(x_2; y_2) = ?$

(d) $\vec{a} = ?$

(e) Fläche von $\triangle OAB = ?$

(3) Gegeben sind $P_1(x_0 = 3; 0; 0)$, $P_1(0; y_0 = 4; 0)$, $P_1(0; 0; z_0 = 12)$, $P(x_0; y_0; z_0)$ und O (Ursprung). O, P_1, P_2 und P_3 definieren einen Quader. Durch P_1, P_2 und P_3 ist eine Ebene $\Phi = \Phi(x_0, y_0, z_0)$ gegeben. Φ soll durch die Koordinatengleichung $\Phi: \ A\,x + B\,y + C\,z + D$ mit $D = -144$ dargestellt werden.

(a) Berechne A, B, C!

(b) Berechne die Distanz von Φ zu O!

(c) Berechne die Distanz von Φ zu P!

(4) $\vec{r}_0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ definieren ein Parallelepiped (auch Spat, Parallelflach, Parallelotop) mit dem Stützpunkt P_0, $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$, und dem Volumeninhalt V. Weiter ist durch $\Phi: \ \vec{r}_\Phi = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$ eine Ebene definiert und durch $g: \ \vec{r}_g = \vec{r}_0 + t\,\vec{c}$ eine Gerade. φ ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$, φ_1 der Winkel zwischen Φ und der Ebene, welche durch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildet wird. Es gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) $V = ?$

(b) $\varphi = ?$

(c) $\varphi_1 = ?$

(5)
$$\left| \begin{array}{rcl} 2\,x + y + z + w & = & 5 \\ x + 2\,y + z + w & = & k \cdot 5 \\ x + y + 2\,z + w & = & u \cdot 5 \\ x + y + z + 2\,w & = & 5 \end{array} \right|$$

Berechne nachvollziehbar $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$.

Viel Glück! WIR

4.4 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, nichtlineare Gleichungen, Gleichungssysteme I/17

Abschrift • *Copie*

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, nichtlineare Gleichungen, Gleichungssysteme
I18 Differentialgleichungen

(1) Gegeben ist die Funktion — *Soit donnée la fonction* $f(x) = x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x + 2$.

(a) Kontrollieren Sie, ob diese Funktion bei $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$ eine Nullstelle hat.
Controller si cette fonction a un zéro à $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$.

(b) Skizzieren Sie die Funktionskurve.
Dessiner une esquisse de la courbe de cette fonction.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Kurve.
Trouver tous les zéros, les points extrêmes et les points d'infléxion de cette fonction.

(2) Gegeben ist das Gleichungssystem — *Soit donné le système d'équations*:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ r\,x - y - z &= 1 \\ 2\,x + y - 4\,z &= -3\,q \end{aligned} \tag{4.1}$$

(a) Für $z = 3$ und $q = 1$ existiert eine Lösung. Berechne x, y und r.
Pour $z = 3$ *et* $q = 1$ *il existe une solution. Calculer* x, y *et* r.

(b) Sei $q = -2$. Für welche r existieren keine resp. unendlich viele Lösungen?
Soit $q = -2$. *Decider pour quels* r *il n'y a pas de solution resp. infiniment de solutions.*

Viel Glück!

WIR

4.5 Test: Algebra, Zahlentheorie, Gleichungen, Grundlagen, Vektorgeometrie I/23

Abschrift • *Copie*

(1) Einer Kugel mit Radius r ist ein Drehzylinder mit Radius ρ und der Höhe h eingeschrieben worden, dessen Mantelfläche gleich der halben Kugeloberfläche ist. Berechne das Zylindervolumen.

(2)

$$(\frac{10-3\,x}{5}-\frac{2\,x-12}{3}+2)\cdot(\frac{2\,x-1}{4\,x+11}-\frac{5}{21})$$

Bestimme die Werte von x, für die dieses Produkt null ist.

(3)

$$\frac{5\,x-11}{4-3\,y}=\frac{10\,x-19}{7-6\,y}$$

Suche die ganzzahlingen Lösungen (x, y) dieser Gleichung!

(4) In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge 6 sind die Seitenmittelpunkte mit $M_a,\ M_b,\ M_c$ bezeichnet (z.B. $a=\overline{BC}$). Mit dem Mittelpunkt A wird ein Kreisbogen von M_c nach M_b geschlagen und ebenso mit dem Mittelpunkt B ein Kreisbogen von M_c nach M_a. Über den halben Dreieckseiten $\overline{CM_a}$ und $\overline{CM_b}$ wird je ein Halbkreis nach aussen errichtet. Berechne nun den Umfang und den Inhalt der von den Kreisbogen begrenzen Figur $CM_bM_cM_aC$.

Viel Glück!

WIR

4.6 Test: Determinanten und Matrizen, Gleichungssysteme, komplexe Zahlen I/55

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Löse $\dfrac{\sqrt{2}\,(z-i)^5-\sqrt{2}}{1+i}=1-i$ und skizziere die Lösung.

(b) Sei $z=e^{i\,\varphi}=\cos(\varphi)+i\,\sin(\varphi)$.
Leite aus $z^n=e^{i\,n\,\varphi}=\cos(n\,\varphi)+i\,\sin(n\,\varphi)$ eine Formel für $\cos(n\,\varphi)$ ab!

(c) Beschreibe eine geometrische Kosntrunktion für den Punkt $\dfrac{1}{z}$ zu einem beliebigen gegebenen $z\in\mathbb{C}$.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&\alpha&1&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&\beta\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$ Wie hängt $\det(A)$ von α und β ab? Erkläre das Resultat!

(3)

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&\alpha&1\\0&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(a) Für welches α hat das Gleichungssystem allenfalls keine Lösung?

(b) Wie gross muss α gewählt werden, damit $x=\dfrac{1}{8}$ wird?
Berechne dazu auch y und z!

(4)

$$B=\begin{pmatrix}-1&4\\-4&\lambda\end{pmatrix},\ \ \vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

(a) Berechne $B^2=B\cdot B$ sowie $B\cdot(B\cdot\vec{u})$.

(b) Sei $B\cdot((2\,B)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$. Berechne λ so, dass die Gleichung richtig ist.

(5)

$$M\cdot X=X\cdot M\ \text{ mit } M=\begin{pmatrix}-1&4\\-4&-2\end{pmatrix},\ \ X=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$$

Löse dieses Gleichungssystem (Unbekannte $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.)
Wähle bei Bedarf $t=\gamma$ als Parameter. Suche dazu $Dim(\mathbb{L})$, den Rang und die Ordnung.

Viel Glück!

WIR

4.7 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Gleichungssysteme II/20

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1)

$$\left| \begin{array}{lcl} y - z + w & = & -1 \\ x - y + z & = & 1 \\ x - y + z - w & = & 2 \\ 2\,x + y + 2\,z + w & = & 0 \end{array} \right|$$

(a) Berechne die Determinanten D_0, D_x, D_y, D_z, D_w.

(b) Berechne x, y, z, w.

(2) Gegeben sind der Kreis $K : (x-2)^2+(y-1)^2 = 25$ und die Gerade $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. M ist der Kreismittelpunkt, $g_1 \cap K = \{T_1(u_1; v_1), T_2(u_2; v_2) \mid u_1 \geq u_2\}$. Weiter ist $g_n = \overline{MT_1}$, $g_2 =$ Kreistangente in T_1. Setze dabei $g_n : \vec{x}_n = \vec{b}_0 + \lambda\, \vec{b}_1$, $g_2 : \vec{x}_2 = \vec{c}_0 + \lambda\, \vec{c}_1$.

(a) Berechne exakt T_1 und T_2.

(b) Berechne exakt g_n: $\vec{b}_1 = \,?$ ($\vec{b}_1$ normieren!)

(c) Berechne exakt g_2: $\vec{c}_1 = \,?$ ($\vec{c}_1$ normieren!)

(d) Berechne exakt den Inhalt des Dreiecks $\triangle(MT_1T_2)$.

(e) Berechne exakt den Abstand d von T_2 zu g_2

Exakt $\leadsto$ *keine Dezimalbrüche!*

Viel Glück!

4.8 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme II/22

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left| \begin{array}{lcl} x+2\,y+3\,z & = & 4 \\ x+4\,y+9\,z & = & 16 \\ \lambda\,x+6\,y+12\,z & = & \mu \end{array} \right|$$

(a) Wie gross müsste man λ wählen, damit das System für $\mu = 20$ keine Lösung hat? (Untersuche erst, ob dieser Fall möglich ist!)

(b) Setze $\mu = 1$. Existiert jetzt ein λ, sodass das System keine Lösung hat? Berechne allenfalls λ.

(c) $x = y = 1$ sei Lösung. Berechne, falls möglich, z, λ, μ.

(2) (a) $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC_\lambda} = \vec{c}(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden mit O zusammen ein Tetraeder mit dem Volumen $|V| = 10$. Dazu sein $\lambda > 0$. Berechne λ!

(b) Sei M der Schwerpunkt von $\triangle(ABC_\lambda)$. Sei P definiert durch $\overrightarrow{OP} = 3\ \overrightarrow{OM}$. Berechne den Inhalt des Körpers mit den Eckpunkten O, A, B, C, P.

(3) Gegeben seien ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2;-1)$ und dem Radius $r = 3$ sowie der Punkt $P(10;6)$.

(a) Von P aus werden die beiden Tangenten mit den Berührungspunkten T_1 und T_2 an den Kreis gezogen. Berechne T_1 und T_2.

(b) Berechne den Inhalt von $\triangle(PT_1T_2)$.

(c) Berechne denjenigen Punkt des Kreises, welcher dem Punkt P am nächsten liegt. (Punkt Q.)

(4) Gegeben sind die Geraden $g_1 : \ \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad g_2 : \ \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dazu ist P gegeben durch $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Entscheide durch Rechnung, welche der beiden Geraden P am nächsten liegt.

(b) Berechne den kürzesten Abstand von g_1 zu g_2.

(c) Berechne den Mittelpunkt der kleinsten Kugel, die zwischen g_1 und g_2 passt.

Viel Glück!

WIR

4.9 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie, Gleichungssysteme II/23

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Mit $A(-2;0;0)$, $B(4;2;0)$, $C(6;-1;1)$, $D(3;1;6)$ soll eine vermutlich nicht reguläre Dreieckspyramide gebildet werden. M_1 ist der Mittelpunkt von $\overline{AC}$, M_2 derjenige von $\overline{AB}$, M_3 derjenige von $\overline{BD}$ und M_4 derjenige von $\overline{CD}$.

(a) Volumeninhalt $(ABCD) = ?$

(b) Flächeninhalt $(M_1M_2M_3M_4) = ?$

(2)

$$\Phi_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne den Richtungsvektor der Schnittgeraden $s = \Phi_1 \cap \Phi_2$.

(b) Für welche $P \in s$ ist $|\overline{OP}|$ minimal?

Hinweis: Normalenvektoren!

(3)
$$\left| \begin{array}{lcl} 3\,x + y - 20\,w & = & 11 \\ 2\,x - 2\,y + z - w & = & 2 \\ x + y + 11\,z & = & 7 \\ -x - 8\,z + 16\,w & = & -1 \\ 4\,x + 2\,y + 11\,z - 20\,w & = & 18 \end{array} \right| \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = ?$$

(4) Gegeben ist ein Kreis $K:\ (x-3)^2+(y-4)^2 = 10^2$ sowie eine Gerade $g_1:\ \vec{x} = \binom{2}{1} + t\binom{-2}{1}$ mit $g_1 \cap K = T(u,v)$, $u \geq 0$ und $\angle(g_1, \overline{MT}) = \alpha$, $M =$ Kreismittelpunkt.
Berechne den Richtungsvektor der zweiten Geraden g_2 durch T mit $\angle(g_2, \overline{MT}) = \alpha$.

(5)

$$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Berechne die minimale Distanz zwischen h_1 und h_2.

(6) Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ mit $P \in \overline{AB}$, $M \in \overline{BC}$, $Q \in \overline{CA}$ und $\overline{AM} \cap \overline{BQ} \cap \overline{CP} = S$. Wähle dabei $A = A(0;0)$, $B = B(b;0)$, $C = C(r;s)$.
Zudem gilt: $|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{BP}| = 1:2$, $|\overrightarrow{BM}| : |\overrightarrow{MC}| = 1:1$, $|\overrightarrow{AQ}| : |\overrightarrow{QC}| = 1:x$
Gesucht $\rightsquigarrow$ $x = ?$ (Rechnung!)

Viel Glück!

WIR

4.10 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/31

Abschrift • *Copie*

(1) $\left| \begin{array}{rcl} 4x - 2y + 3z & = & 2 \\ 4x - 2y - 2z & = & 1 \end{array} \right|$ Was ist der Abstand der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $(0;0;0)$?

(2) $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Die folgenden Rechnungen sind von Hand auszuführen (der Weg wird bewertet):

(a) Berechne $M \cdot (B \cdot \vec{a})$.

(b) $M \cdot (B \cdot \vec{x}) = \vec{a} \ \rightsquigarrow \ \vec{x} = ?$ (Falls lösbar.)

(c) Berechne $\det(M \cdot B)$.

(d) Berechne $\det(M \cdot B^{-1})$. (Falls lösbar.)

(e) Berechne die Eigenwerte von $(M \cdot B)$.

(f) Berechne die Eigenvektoren von $(M \cdot B)$ (numerisch).

(3)

$$f(x) = 3\,x^4\,y^3 + 2\,x^2\,y^4.$$

Untersuche f auf Minima, Maxima und Sattelpunkte!
(Kreativ!)

(4) Gegeben: $f(a,b) = a^2 + b^2, \ a = \dfrac{2}{x^2 + y^2}, \ b = 2\,x + y, \ r = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Bilde damit $F(x,y) := f(a(x,y), b(x,y))$

(a) Berechne $\dfrac{\partial F}{\partial r}$.

(b) Berechne das totale Differential $d(a(x,y) \cdot b(x,y))$ von $(a(x,y) \cdot b(x,y)$.

(5) Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius R und auf der Kreislinie verteilt vier Punkte, welche die Ecken eines konvexen Vierecks bilden. Bestimme die Viereckwinkel so, dass der Viereckumfang maximal wird!

Viel Glück!

WIR

4.11 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme II/32

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Punkte $A(-2;0;0)$, $B(4;2;0)$, $C(6;-1;1)$, $A(3;1;6)$.
M_1, M_2, M_3, M_4 sind die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$.

(a) Mache eine Skizze der Situation!

(b) Wie gross ist der Flächeninhalt der Figur $M_1M_2M_3M_4$, falls dieser Flächeninhalt definiert ist?

(c) Wie gross ist der Volumeninhalt des Körpers $AM_1M_2M_3M_4D$, falls dieser Volumeninhalt definiert ist?

(2)

$$\left|\begin{array}{lcl} 3\,x-20\,w+y & = & 11 \\ x+y+11\,z & = & 7 \\ 2\,x-2\,y+z-v & = & 2 \\ -x-8\,z+16\,w & = & -1 \\ 4\,x+2\,y+11\,z-20\,v & = & 18 \end{array}\right|$$

Löse dieses System nach den Regeln von Cramer.
(Die Art der Determinantenberechnung ist freigestellt, jedoch müssen die einzelnen Zwischenresultate resp. Determinanten angegeben werden.)

(3) Gegeben sind die Geraden h_1 und h_2:

$$h_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad h_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-5\\-4\\6\end{pmatrix}$$

Was ist die kürzeste Distanz zwischen h_1 und h_2?

(4) Gegeben sind die Ebenen Φ_1 und Φ_2:

$$\Phi_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \Phi_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

(a) Für welchen Punkt P der Schnittgeraden ist die Distanz zum Ursprung minimal?

(b) Wie gross ist diese Distanz?

Viel Glück!

WIR

4.12 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme II/33

Abschrift • *Copie*

(1) In einem zweidimensionalen Koordinatensystem ist durch den Streckenzug $\overline{OABCO}$ ein Viereck gegeben mit $O(0;0)$, $A(10;1)$, $B(7;5)$, $C(1;3)$. Weiter sind S_1 und S_2 durch die folgenden Gleichungen definiert: $\overrightarrow{OS_1}= \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OS_2}= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OB}$.

(a) Berechne den Punkt $P = \overline{OS_2} \cap \overline{AS_1}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks, welches durch den Streckenzug $\overline{PABS_2P}$ festgelegt ist.

(2) Gegeben sind die Punkte $A(1;1;1)$, $B(1;6;2)$, $C(-6;5;3)$, $D(1;y;2)$ und $P(2;2;3)$. A, B, C und D sind die Eckpunkte der Grundfläche einer vermutlich nicht regulären Pyramide $Py(ABCDE)$. Dabei liegt der Eckpunkt E auf der Geraden $\overline{AP}$ derart, dass $\overline{AE} \perp \overline{EC}$ gilt.

(a) Berechne y und damit D.

(b) Berechne E.

(c) Berechne den Volumeninhalt von $Py(ABCDE)$.

(3)

$$\left|\begin{array}{lcl} x+y+3\,z & = & \cos(\varphi) \\ x+y+3\,z & = & \sin(\varphi) \\ x+y+z & = & 1 \end{array}\right|$$

Kann φ so gewählt werden, dass eine Lösung mit $x = 1$ existiert? Falls ja, so ist φ zu berechnen!

(4)

$$\left|\begin{array}{lcl} (1-\lambda)\,x+2\,y+3\,z & = & 1 \\ 1+(1-\lambda)\,y+3\,z & = & 2 \\ 1+2\,y+(1-\lambda)\,z & = & 3 \end{array}\right|$$

Kann λ so gewählt werden, dass keine Lösung existiert? Wie gross wäre andernfalls λ ?

Viel Glück!

4.13 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie, Gleichungssysteme Goniometrie II/38

Abschrift • *Copie*

(1) Zeige rechnerisch: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den Seiten.

(2) Seien $A = A(1; 2),\; B = B(4; -1),\; C = C(x; 8)$.

(a) Bestimme C so, dass $A,\; B,\; C$ auf einer Geraden liegen.

(b) Bestimme alsdann D so, dass (A, B) und (C, D) harmonische Punktepaare bilden.

(3) Seien $A = A(1; 2),\; B = B(4; -1),\; C = C(6; 8)$.

(a) Berechne den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$.

(b) Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

(c) Berechne den Umkreisradius des Dreiecks $\triangle ABC$.

(4) Löse möglichst exakt:

$$\begin{aligned} \sin^2(x) - 3\,cos^2(x) &= 0 \\ \sin(x) + 2\,sin(2\,x) &= 0 \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} g:\; 10\,x + 7\,y + 16 &= 0 \\ h:\; 12\,x - 17\,y - 14 &= 0 \end{aligned}$$
Kleinster Schnittwinkel der Geraden ≥ 0 ?

(6) Seien $A = A(0; 0; 1),\; B = B(2; -2; 4),\; C = C(5; 1; 2)$, Ebene $\Phi = \Phi(A, B, C)$.

(a) Berechne die Durchstosspunkge der Achsen durch Φ.

(b) Berechne den kürzesten Abstand von C auf $\overline{AB}$ auf zwei Stellen hinter dem Komma genau.

Viel Glück!

4.14 Test: Lineare Abbildungen und Matrizen, Differentialgeometrie und Kurven, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gleichungssysteme II/57

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

(1) $x^2\,(2-y) = y^2\,(2+y) \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(2) $x^2 - 2\,x\,y + x^2 - y^3 = \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(3) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 5\,t\cdot\cos(t)+\cos(10\,t) \\ 5\,t\cdot\sin(t)+\sin(10\,t) \\ t \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Tangente, Normalebene für $t = \dfrac{\pi}{2}$!
• *Tangente, plan normal pour* $t = \dfrac{\pi}{2}$*!*

(4)

$$\begin{array}{rcl} w + x - y + 2\,z + 2 & = & 0 \\ 2\,y - 2\,x - 2\,w - 4\,z - 4 & = & 0 \end{array}$$

Lösungsmenge • *Ensemble des solutions*
$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = \,?$

(5) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Lineare Abbildung • *Application linéaire* $\begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix} \longmapsto\ ?$

(6) $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x} + \vec{b},\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Bild der Geraden • *Image de la droite* $y = 4\,x + 1$?

%

(7) Geg.: • **Donné:** $KS(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}) \xmapsto{f_1} \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\} \xmapsto{f_2} \{\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}''\} \xmapsto{f_3} \{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$

$KS =$ Koordinatensystem • $KS =$ *système de coordonnées*

$f_1 =$ Verschiebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ • $f_1 =$ *déplacement de* $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$f_2 =$ Drehung um $\alpha = +\frac{\pi}{2}$ • $f_1 =$ *rotation avec* $\alpha = +\frac{\pi}{2}$

$f_3 \rightsquigarrow \ \vec{e}_1{}'' \longmapsto \vec{e}_1{}''' = -\vec{e}_1{}''$

<u>Fragen:</u> • <u>*Problèmes:*</u>

a) $P = (4; 5) \longmapsto$? Im neuen System $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$?
• *Dans le nouveau système* $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$*?*

b) $\{(x, y) \mid y = \frac{1}{2}\,x+3\} \longmapsto$?

Viel Glück!

WIR

4.15 Test: Lineare Abbildungen und Matrizen, Differentialgeometrie und Kurven, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gleichungssysteme II/58

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

(1) $4\,x^2\,(2+y) = y^2\,(2-y) \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(2) $x^3 + 2\,x\,y - x^2 - y^2 = \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(3) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 10\,t \cdot \sin(t) - \cos(10\,t) \\ 10\,t \cdot \cos(t) + \sin(10\,t) \\ t \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Tangente, Normalebene für $t = \pi$!
• *Tangente, plan normal pour* $t = \pi$*!*

(4)

$$\begin{aligned} w + x + 4\,y - z + 4 &= 0 \\ 4\,z - 4\,x + 4\,w - 16\,y - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsmenge • *Ensemble des solutions* $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = ?$

(5) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Lineare Abbildung • *Application linéaire* $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix} \longmapsto ?$

(6) $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x} + \vec{b},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Bild der Geraden • *Image de la droite* $y = 3\,x - 1$?

%

(7) Geg.: • **Donné:** $KS(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}) \xmapsto{f_1} \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\} \xmapsto{f_2} \{\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}''\} \xmapsto{f_3} \{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$

KS = Koordinatensystem • KS = *système de coordonnées*

f_1 = Verschiebung um $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ • f_1 = *déplacement de* $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f_2 = Drehung um $\alpha = +\frac{3\pi}{2}$ • f_1 = *rotation avec* $\alpha = +\frac{3\pi}{2}$

$f_3 \rightsquigarrow \ \vec{e}_2{}'' \longmapsto \vec{e}_2{}''' = -\vec{e}_2{}''$

<u>Fragen:</u> • <u>*Problèmes:*</u>

a) $P = (5; 2) \longmapsto$? Im neuen System $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$?
• *Dans le nouveau système* $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$*?*

b) $\{(x, y) \mid y = 2\,x+1\} \longmapsto$?

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 5

Serien mit „Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme“

5.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srof-fgebiete war nie vorhanden.

5.2 Test: Ungleichungen, Ungleichungssysteme, Mengenlehre, Zahlentheorie, Funktionen im $\mathbb{R}^1$ I/01

Abschrift • *Copie*

(1) $x = \cfrac{-1}{2+\cfrac{-1}{2+\cfrac{-1}{2+\ddots}}}$

(a) $x = ?$

(b) $x \in \mathbb{Q}$?

(2) Skizziere $\mathbb{L}$! • *Esquisse de* $\mathbb{L}$*!* $\rightsquigarrow$ $\left|\begin{array}{rcl} 3\,x+2\,y & \geq & 6 \\ 2\,x-3\,y & \leq & 3 \end{array}\right|$

(3) $x+1 \geq \cos(x)-1 \;\rightsquigarrow\; \mathbb{L} = ?$

(4) $\left|\begin{array}{lcr} \mathbb{L}_1: \; x^2+x-2 & \leq & 0 \\ \mathbb{L}_1: \; -x^2+x+2 & \geq & 0 \end{array}\right| \;\rightsquigarrow\; \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = ?$

(5) $2\,x^2-5\,x-1 \geq x+10 \;\rightsquigarrow\; \mathbb{L} = ?$

(6) $|A| = 99,\; |B| = 98,\; |C| = 97,\; |A \cap B| = 30,\; |A \cap C| = 27,\; |B \cap C| = 28,\; |A \cap B \cap C| = 26.$

(a) $|A \cup B \cup C| = ?$

(b) $|(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = ?$

(7) $(A \cup B) \cap C = \ldots \cup \ldots \;\rightsquigarrow$ Durch eine Zeichnung erklären! • *Expliquer par un dessin!*

(8) (a) $f(x) = x^2 - |[x]| \;\rightsquigarrow$ Skizze! • *Esquisse!*

(b) Löse: • *Résoudre:* $x^2 - |[x]| = 1$

(9) (a) $g(x) = (x+1)\,\mathrm{sgn}(x) \;\rightsquigarrow$ Skizze von g ! • *Esquisse de* g *!*

(b) $(x+1)\,\mathrm{sgn}(x) = 0 \;\rightsquigarrow\; x = ?$

(c) $(x+1)\,\mathrm{sgn}(x) = -2 \;\rightsquigarrow\; x = ?$

(10) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x),\; g(x) = \sin(x)\cdot x^2$

(a) Skizze! • *Esquisse!*

(b) $f(x) = g(x) \;\rightsquigarrow\; x = ?$

Viel Glück!

WIR

5.3 Test: Funktionen im $\mathbb{R}^1$, Gleichungssysteme, Ungleichungssysteme, Zahlentheorie I/02

Abschrift • *Copie*

(1) Löse: • *Résoudre:* $\left|\begin{array}{lcl} x-y & \leq & 1 \\ x+y & \geq & 1 \\ y & \geq & 2\,x-6 \end{array}\right|$

(2) (a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$: $\rightsquigarrow$ Algebraische Struktur? • *Structure algébrique?*

(b) $a+b=10,\ \ a^2=10\,b\ \rightsquigarrow\ \ a=?,\ \ b=?,\ \ a\in\mathbb{Q}\,?$

(3) (a) Löse: • *Résoudre:* $x^2-4\,x+5=0$

(b) Skizziere: • *Esquisse:* $y=x^2-4\,x+5$

(4) (a) Exakt: • *Exacte:* $\tan(60^o)=\,?$

(b) Löse: • *Résoudre:* $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ ($\rightsquigarrow$ alle Lösungen!) • *Toutes les solutions!*

(5) Löse: • *Résoudre:* $\left|\begin{array}{lcl} -2\,x-y+12 & = & 0 \\ x+y & = & 2 \\ x-2\,y & = & 8 \\ 2\,x+y & = & 12 \end{array}\right|$

(6) $\log_{10}(3)+3\,\log_{10}(2)=\log_{10}(x)\ \Rightarrow\ x=\,?$

(7) $\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin(x)\cdot\cos(\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{\pi}{3})\cdot\cos(\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{4})})\ \Rightarrow\ x=\,?$

(8) Auf wieviele verschiedene Arten kann man sechs Häuser mit sechs verschiedenen Farben kolorieren?
• *De combien de manières différentes est–ce qu'on peut colorer six maisons de manières différentes?*

(9) *kgV'ppmc*$(1376528024, 1376528026)=\,?$

(10) $0.0123456789\overline{0123456789}\ldots=\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ \dfrac{a}{b}=\,?$

Viel Glück! — Bonne chance!

5.4 Test: Funktionen im $\mathbb{R}^1$, Mengenlehre, Ungleichungssysteme I/03

Abschrift • *Copie*

(1) $A = [-11,\ 22),\ \ B = (18,\ 60],\ \ C = \mathbb{N}_0,\ \ D = (5,\ 22)\ \rightsquigarrow\ \ ((A \cup B) \cap C) \setminus (D \cap A) = ?$

(2) Gebe eine Übersicht über die Teilmengen von $\mathbb{R}$, welche in unserer Mathematik wichtig sind. • *Donner une vue d'ensemble des sous–ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont importants en mathématique.*

(3) $y^2 - 3\,y - 4 = x \rightsquigarrow$ Lässt sich y als $f(x)$ darstellen? (Wie, wo?)
• $y^2 - 3\,y - 4 = x \rightsquigarrow$ *Est–ce qu'on pout représenter y comme $f(x)$? (Comment, où?)*

(4) $\left|\begin{array}{lcl} -x+y & \leq & 3 \\ 3\,x-y & \geq & -10 \\ 2\,x+y & = & k \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right|$

Wie gross kann x maximal sein? (Skizze!)
• *Quelle valeur maximale est–ce que k peut atteindre? (Esquisse!)*

(5)

(a) $f_1(x) = x^2$

(b) $f_2(x) = e^{-x^2}$

(c) $f_3(x) = e^x$

(d) $f_4(x) = \cos\dfrac{x}{\pi} + 4$

(e) $f_5(x) = a\,x + b$

(f) $f_6(x) = 3\,\cos(2\,x - 4) + 8$

(g) $f_7(x) = \dfrac{2}{(\frac{x}{2})^2 + 3}$

Welche Funktion ist • *Quelle fonction est*

(a) monoton? • *monotone?*

(b) beschränkt? • *borneée?*

(c) periodisch? • *périodique?*

(d) gerade? • *paire?*

(e) ungerade? • *impaire?*

(6) Pole und Asymptoten? • *Donner les pôles et les asymptotes:*

(a) $h_1(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(b) $h_2(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1}$

(c) $h_3(x) = \dfrac{1}{2^x - 1} + 2\,x - 1$

(d) $h_1(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} - x^2 + 1$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x} \rightsquigarrow$ Rechteck = • *Rectangle* = $Fig.\Big((0;0), (1;1), (x; f(x)), (0; f(x))\Big)$.
$R(x) =$ Flächeninhalt von $Fig. = ?$ • $R(x) =$ *Surface de* $Fig. = ?$ %

(8) (a) $f(x) = e^x, \;\; f(x) = \ln(x)$

i. $f(g(x)) = \,?$

ii. $g(f(x)) = \,?$

iii. $f(f(x)) = \,?$

iv. $g(g(x)) = \,?$

(b) $f_1(x) = x, \;\; f_2(x) = x^2, \;\; f_2(x) = \sqrt{x}$

i. $f_1(f_2(f_3(x))) = \,?$

ii. $f_1(f_3(f_2(x))) = \,?$

iii. $f_2(f_1(f_3(x))) = \,?$

iv. $f_2(f_3(f_1(x))) = \,?$

v. $f_3(f_1(f_2(x))) = \,?$

vi. $f_3(f_2(f_1(x))) = \,?$

(9) $F(x) = \cos(2\,\sin(e^{2\,x} - 1) + 1) + e^{2\,x}, \;\; g(x) = e^{2\,x-1}, \;\; F(x) = f(g(x))$

$$\Rightarrow \;\; f(x) = \,?$$

(10) $M_1 = \{(x, y) \mid y = f_1(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - x - 4\}, \;\; M_2 = \{(x, y) \mid y = f_2(x) = 3\,x + 6\}$

$$\Rightarrow \;\; M_1 \cap M_2 = \,?$$

Viel Glück! — Bonne chance!

5.5 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Ungleichungen I/30

Abschrift • *Copie*

I30 Algebra !!!

(1)

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \longmapsto (B \Rightarrow (C \Rightarrow A))$$

(a) Ist dieser logische Schluss korrekt?

(b) Falls die letzte Frage mit nein beantwortet werden musste, so soll die eine kNF oder aNF gefunden werden (davon die einfachste Form).

(2) Der folgende Ausdruck ist so umzuformen, dass er möglichst kurz geschrieben werden kann:

$$\neg(\neg A \Rightarrow (\neg(A \wedge \neg B)))$$

(3) Gegeben sind die Intervalle $A = [2, 3]$, $B = [3, 5]$, $C = (5, 10)$. Beweise oder widerlege:

$$A \times (B \cup C)) = (A \times B) \cup A \times C)$$

(4)

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 1), (3, 4), (4, 5), (2, 1), (1, 1), (3, 3), (5, 4), (4, 4), (4, 3), (5, 5), (2, 2)\}$$

Erstelle einen Graphen und beurteile, um welchen Relationstyp es sich handelt.

(5)

$$a\mathcal{R}b :\Leftrightarrow a^2 \geq \frac{1}{2}, \ \ a, b \in (1, \infty) \leadsto \text{ Relationstyp?}$$

(6) Skizziere den Graphen und bestimme den Definitionsbereich D_f:

$$f(x) = y = \frac{2\,x}{x^2 + 2} + \frac{1}{2}\,x - 1$$

(7) Skizziere den Graphen:

$$f(x) = (\sin(|x|) + |[x]|) \cdot sgn(x), \ \ x \in [-\pi, \pi]$$

(8) Gegeben ist der Kettenbruch $x = \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \ddots}}}$. $\leadsto$ Frage: $x \in \mathbb{Q}$?

(9)

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 999 = \ ?$$

%

(10)

$$f(n) = \frac{1}{n^2+9} + 1,\ \ D_f = \mathbb{N}$$

(a) f injektiv?

(b) $W_f = ?$

(c) f bijektiv bezütlich W_f ?

(11) Löse:

$$(x-2)(x-3) \geq (x+1)(x+2)$$

(12)

$$I_1 = (0,7),\ \ I_2 = [1.5, 5],\ \ I_3 = (3,9]\ \Rightarrow\ I = I_1 \setminus (I_2 \cap I_3) = ?, \quad |I| = ?$$

Viel Glück!

5.6 Test: Relationen, Funktionen, Ungleichungen I/34

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Untersuche und begründe, ob der folgende Sachverhalt richtig ist:

$$(f \;\text{ bijektiv }) \wedge (g \;\text{ bijektiv }) \Rightarrow (f \circ g \;\text{ bijektiv })$$

(2) $f(x) = 2\,x^2 + 8\,x - 35, \qquad g(x) = x + 10.$ Wo ist dann die folgende Aussage richtig?

$$(f(x) < g(x)) \wedge (6.5\,x < 0)$$

(3) Gegeben: $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. Gesucht sind:

(a) Wertetabelle?

(b) Graph?

(c) y–Achsenabschnitt?

(d) Eventuelle Nullstellen des Graphen?

(e) Wo ist $f(x) = \sqrt{x}$?

(4) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = [x], \qquad h(x) = x^2.$

(a) Bestimme $\Phi = h \circ g \circ f$.

(b) Bestimme D_Φ.

(c) Bestimme W_Φ.

(d) Ist Φ surjektiv?

(e) Ist Φ injektiv?

(f) Ist Φ bijektiv?

Viel Glück!

5.7 Test: Nichtlineare Gleichungen, lineare Ungleichungen II/48

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • **Important:**

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein! Graphen bitte beachten! Genauigkeit: 6 Stellen hinter dem Komma.
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille! Tenir compte d'un graphe. Exactitude: 6 places apres le point décimal.*
Bei numerischen Methoden: Nur die zu 0 nächstgelegene Lösung angeben! • *Méthodes numériques: Donner seulement la solution la plus proche de* 0.

(1) $\frac{1}{10}\, e^{-\frac{x^2}{4}} = x \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Iteration! • *Itération!*

(2) $-x^5 + x^3 + 20 = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Tangentenmethode! • *Méthode de la tangente!*

(3) $2\,\cos(x) + \sin(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Sekantenmethode! • *Méthode de la sécante!*

(4) $x^4 + \frac{1}{3}\, x^3 + 2\, x^2 - 3 = x \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Methode frei! • *Méthode libre!*

(5) Lineare Programmierung: • *Programmation linéaire:*

$$\left|\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ y & \geq & -\frac{1}{4}\, x + 2 \\ 4\,x + 2\,y & \geq & 12 \\ 2\,x + 4\,y & \geq & 12 \\ z & = & x + y \to Min \end{array}\right|$$

(6) Lineare Programmierung: • *Programmation linéaire:* %

$$\left|\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x + y & \leq & 5 \\ x + y & \geq & 1 \\ x & \geq & \frac{1}{4}\, y \\ x & \leq & \frac{3}{2}\, y \\ a)\ z & = & 2\,x + y \to Max \\ b)\ z & = & 2\,x + y \to Min \end{array}\right|$$

(7) Zusatz: Lineare Programmierung: • *Supplément: Programmation linéaire:*

$$\left|\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x+y & = & 80 \\ 4\,x+6\,y & \leq & 420 \\ 7\,x & \leq & 350 \\ z & = & 2\,x+5\,y \to Min \end{array}\right|$$

(8) Zusatz: Lineare Programmierung: • *Supplément: Programmation linéaire:*

$$\left|\begin{array}{lcl} x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\ 2\,x_1+4\,x_2+x_4 & \leq & 20 \\ x_1+x_2+5\,x_3+x_4 & \leq & 30 \\ x_2+x_3+x_4 & \leq & 10 \\ z & = & 2\,x_1+x_2+3\,x_3+x_4 \to \text{Max} \end{array}\right|$$

Viel Glück!

WIR

5.8 Test: Nichtlineare Gleichungen, lineare Ungleichungen II/49

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein! Graphen bitte beachten! Genauigkeit: 6 Stellen hinter dem Komma.
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille! Tenir compte d'un graphe. Exactitude: 6 places apres le point décimal.*
Bei numerischen Methoden: Nur die zu 0 nächstgelegene Lösung angeben! • *Méthodes numériques: Donner seulement la solution la plus proche de* 0.

(1) $\frac{1}{20}\,e^{-\frac{x^2}{2}} = x \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Iteration! • *Itération!*

(2) $x^5 - x^3 + 10 = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Tangentenmethode! • *Méthode de la tangente!*

(3) $\cos(x) - 2\,\sin(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Sekantenmethode! • *Méthode de la sécante!*

(4) $x^4 + 2\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ $\leadsto$ Methode frei! • *Méthode libre!*

(5) Lineare Programmierung: • *Programmation linéaire:*

$$\left|\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ 6\,x + 2\,y & \geq & 18 \\ 2\,x + 4\,y & \geq & 16 \\ y & \geq & -\frac{1}{4}\,x + 3 \\ z & = & 3\,x + 2\,y \to Min \end{array}\right|$$

(6) Lineare Programmierung: • *Programmation linéaire:* %

$$\left|\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x + y & \leq & 6 \\ x + y & \geq & 2 \\ y & \leq & 2\,x \\ y & \geq & \frac{1}{2}\,x \\ a)\; z & = & x + 2\,y \to Max \\ b)\; z & = & x + 2\,y \to Min \end{array}\right|$$

(7) Zusatz: Lineare Programmierung: • *Supplément: Programmation linéaire:*

$$\left| \begin{array}{lll} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x+y & = & 100 \\ x+3\,y & \leq & 240 \\ 4\,x & \leq & 320 \\ z & = & x+2\,y \to Min \end{array} \right|$$

(8) Zusatz: Lineare Programmierung: • *Supplément: Programmation linéaire:*

$$\left| \begin{array}{lll} x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & \leq & 30 \\ x_2+x_3+x_4 & \leq & 10 \\ 2\,x_1+4\,x_2+x_3 & \leq & 20 \\ z & = & 2\,x_1+x_2+x_3+3\,x_4 \to Max \end{array} \right|$$

Viel Glück!

Kapitel • Chapitre 6

Serien mit „Lineare Abbildungen mit Matrizen“

6.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

⇝ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 7

Serien mit „Eigenwerttheorie mit Matrizen“

7.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

⇝ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 8

Serien mit „Algebra und elementare Zahlentheorie“

8.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\leadsto$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 9

Serien mit „Komplexe Zahlen“

9.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\leadsto$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 10

Lösungen — Solutions

10.1 Momentane Sachlage — — Situation actuelle

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur noch in Papierform vorhanden (*Mathematica*–Output und Handschriften). An eine gesamthafte oder teilweise Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier output de Mathematica et manuscrits. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale ou bien partielle.*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Fremdarbeit?

Ende • *Fin*