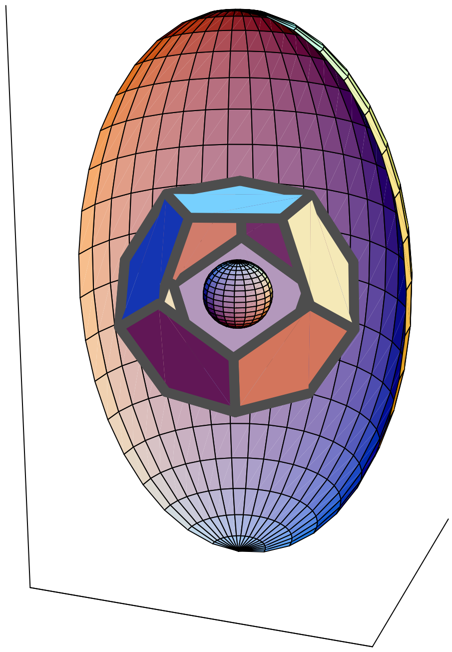
◇ Tests ◇ Tests ◇
◇ Algebra 2 ◇ Agèbre 2 ◇
◇ Diplom ◇ 1989 – 2000 ◇ *Diplôme* ◇



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2000

Ausgabe vom 15. September 2007, Version 1.0.1 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lines cliquables*

WIR1 /2007/LaTex/BuchTestsAlgebra2000Dipl_2.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

• *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

• *L'homme a trois occasions pour apprendre:*
Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

Kapitel • Chapitre 1

Einführung — Introduction

1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den Jahren vor 2000 verwendet worden sind.
• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les années avant 2000.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur in Papierform vorhanden. An eine gesamthafte Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale.*

1.2 Gliederung — Disposition

Bemerkung: • Remarque: Da nur noch wenige Sérien auch in französischer Übersetzung vorliegen, wird im weiteren Text aus Kapazitätsgründen auf Übersetzungen verzichtet.

(1) Vektorrechnung, Vektorgeometrie

(2) Matrizenrechnung, Determinanten

(3) Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

(4) Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme

(5) Lineare Abbildungen mit Matrizen

(6) Eigenwerttheorie mit Matrizen

(7) Algebra und elementare Zahlentheorie

(8) Komplexe Zahlen

Kapitel • Chapitre 2

Serien mit „Vektorrechnung, Vektorgeometrie“

2.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\leadsto$ Siehe Skript Teil 1

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 3

Serien mit „Matrizenrechnung, Determinanten“

3.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\rightsquigarrow$ Siehe Skript Teil 1

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 4

Serien mit „Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme“

4.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\leadsto$ Siehe Skript Teil 1

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 5

Serien mit „Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme“

5.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

⇝ Siehe Skript Teil 1

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 6

Serien mit „Lineare Abbildungen mit Matrizen“

6.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

6.2 Test: Lineare Abbildungen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen, Reihen I/53

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(-1)\,A^{-1}\cdot\vec{x}\,' = (\vec{x}-\vec{b}),\quad A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad y=4\,x-3$$

$\leadsto$ Bild $\vec{x}\,'$ des Geradenvektors $\vec{x}$? • *Image $\vec{x}\,'$ du vecteur de la droite $\vec{x}$?*

(2) Miovre: $\sin(5\,\varphi)=\cos^5(\varphi)-\ldots=\,?$

(3)

$$f(z)=\frac{2}{z-1}$$

Bild von • *Image de* $\gamma_1 : z_1(t)=e^{i\,t}$
Bild von • *Image de* $\gamma_2 : z_2(t)=3\,i\,t$

(4) Gesucht: Polynom $f(x)$ mit • *Chercher: Polynôme $f(x)$ avec*

$$f(1)=0,\;\; f(-1)=0,\;\; f(-2)=0,\;\; f\,'(2)=38.$$

(5) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:
• *Démontrer la convergence ou la divergence des séries suivantes:*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\,\sin(n\,x)}{n^6}+\frac{1}{n^3}\right)$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\,n^3}{2\,n^3+7}\right)^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\,n^2}{4\,n^4+2\,n^2+3}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sin(\frac{1}{n})+1}$

Viel Glück!

6.3 Test: Lineare Abbildungen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen, Reihen I/54

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(-1)\,A^{-1}\cdot\vec{x}\,' = (\vec{x}+\vec{b}),\;\; A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\;\; \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\ -1\end{pmatrix},\;\; \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\;\; y=2\,x-5$$

$\leadsto$ Bild $\vec{x}\,'$ des Geradenvektors $\vec{x}$? • *Image $\vec{x}\,'$ du vecteur de la droite $\vec{x}$?*

(2) Miovre: $\sin(5\,\varphi)=\ldots\sin(\varphi)-\ldots=\,?$

(3)

$$f(z)=\frac{3}{z+1}$$

Bild von • *Image de* $\gamma_1 : z_1(t)=e^{i\,t}$

Bild von • *Image de* $\gamma_2 : z_2(t)=2\,i\,t$

(4) Gesucht: Polynom $f(x)$ mit • *Chercher: Polynôme $f(x)$ avec*

$$f(1)=0,\;\; f(3)=0,\;\; f(-1)=0,\;\; f\,'(-2)=\frac{19}{2}.$$

(5) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:
• *Démontrer la convergence ou la divergence des séries suivantes:*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\,\cos(-2\,n\,x)}{n^5}+\frac{2}{n^4}\right)$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5\,n^4}{8+4\,n^4}\right)^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\,n^3}{2\,n^6+4\,n^2-2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{\frac{1}{n}}+1}$

Viel Glück!

6.4 Test: Determinanten und Matrizen, lineare Abbildungen, Eigenwerttheorie I/56

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Spur und die Determinante von A.

(b) Berechne die Eigenwerte von A.

(c) Berechne die Eigenvektoren von A.

(d) Berechne allenfalls weitere existierende Hauptvektoren von A.

(2) Sei $A = B + k \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}$.

Berechne die Eigenwerte und untersuche, wie diese von k abhängen.

(3) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

(a) Stelle A dar in der Form $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$ mit $\det(U) = 1$.

(b) Berechne $A^{100} := A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$

(c) Berechne das Bild der Geraden $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter A.
Was ist daran speziell auffallend?

Viel Glück!

6.5 Test: Lineare Abbildungen, Reihen, Potenzreihen, komplexe Zahlen I/57

Abschrift • *Copie*

(1) Kreis: • *Cercle:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(y-3)^2 + (x+1)^2 = 2 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{\ldots - (x+1)^2} + \ldots = \ldots$

Bild $\vec{x}\,'$ des Kreises? • *Image $\vec{x}\,'$ du cercle?*

$$A^{-1} \cdot \vec{x}\,' = A \cdot (\vec{x} + \vec{b}),\;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$f(z) = \frac{\bar{z} \cdot 2 \cdot z}{|z|^2 \cdot (z-i)}$$

(a) Bild von • *Image de* $z(t) = e^{i\,t}$?

(b) Bild von • *Image de* $z(t) = 2\,i$?

(3) (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n^3+n^4}{n^5+n^6+n^7} \cdot x^n \rightsquigarrow$ Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4\,n^2\,(x-4)^n}{n^4} \rightsquigarrow$ Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos(\frac{1}{n}) - 1} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{n+\frac{1}{2}} + \frac{(n \cdot x)^n}{n!} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{\cos(x)}{(2\,n+1)(2\,n-1)} + (\frac{1}{4})^n) \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

Berechne im Falle der Konvergenz den Grenzwert.
• *Calculer la valeur limite dans le cas de la convergence.*

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{3})^3 \rightsquigarrow$ „Vernünftige Näherung". • *"Approximation raisonable".*

Viel Glück!

6.6 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen, komplexe Zahlen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/21

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left|\begin{array}{lcl} 2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & 4 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 & = & 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4\,x_4 + 2\,x_5 & = & 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 + 2\,x_5 & = & -2 \end{array}\right|$$

(a) Gesucht ist der Lösungsraum mit Hilfe von Gauss–Jordan. (Die Schritte müssen sichtbar sein.)

(b) Wie gross ist der Rang des Systems?

(2) Gegeben: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{D}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 \\ x \\ 3 \end{pmatrix}$. Dabei ist D eine Drehung um die z–Achse. $\leadsto$ Berechne x.

(3) Berechne die Summe aller verschiedenen 437–ten Einheitswurzeln! (Die Rechnung bzw. die Begründung wird bewertet!)

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $B \cdot A = ?$

(b) $(A \cdot B - 2\,E)\,\vec{u} = \vec{v} = ?$

(c) Berechne $\vec{x}$ mit $\vec{v} \times \vec{x} = \vec{u}$ und $\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = 5$

(5)

$$\int \frac{5\,x + 12}{\sqrt{-x^2 - 7\,x}}\,dx = ?$$

(6) Beweise: $\forall_{n\in\mathbb{N}} : \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = +\dfrac{n}{n+1}$

Viel Glück!

6.7 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen II/27

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) i. Berechne A^{-1} (λ beliebig, jedoch A regulär.)
   ii. Berechne B^{-1} für $\lambda = 1$. (Rechnung sichtbar!)

(b) i. Löse $C \cdot \vec{x} = \vec{e}_1$ (Gauss–Jordan) für $\lambda = 1$.
   ii. Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_1$ (mit A^{-1}) für $\lambda = 2$.

(2) Die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ bestimmen zusammen mit dem Ursprung O den Einheitswürfel, genannt $Fig.1$. Darin ist $\overrightarrow{OP} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ sowie $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$. Weiter gelten die Bezeichnungen $\overrightarrow{OF_1} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OF_2} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\overrightarrow{OF_3} = \vec{e}_3 + \vec{e}_1$. Dazu ist:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun die Abbildung:

$$Fig.1 \overset{G}{\longmapsto} Fig.2 \overset{H}{\longmapsto} Fig.3$$

(a) Berechne nachvollziehbar alle Eckpunkte von $Fig.3$.

(b) $Fig.3$ wird um $+\frac{\pi}{6}$ um die $\vec{e}_3$–Achse (z–Achse) gedreht. Wohin kommt das Bild von P zu liegen?

(3) B und C sind die Matrizen wie oben angegeben. Berechne λ aus $\det(B) = \det(C)$.

Viel Glück!

WIR

6.8 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen II/28

Abschrift • *Copie*

(1) Die Vektoren $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ bestimmen zusammen mit dem Ursprung O den Einheitswürfel, genannt $Fig.1$. Darin ist $\overrightarrow{OP}= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ sowie $\overrightarrow{OE_1}= \vec{e}_1,\ \ \overrightarrow{OE_2}= \vec{e}_2,\ \ \overrightarrow{OE_3}= \vec{e}_3$.
Sei nun $D_{\varphi,x}$ eine Drehmatrix für eine Drehung um den Winkel φ um die x–Achse, $D_{\varphi,y}$ eine solche Matrix entsprechend für die y–Achse u.s.w.
Wir betrachten nun die Abbildung:

$$Fig.1 \overset{D_{15^o,x}}{\longmapsto} Fig.2 \overset{D_{30^o,z}}{\longmapsto} Fig.3$$

(a) Berechne die Lage der Bilder von $E_1,\ E_2,\ E_3$ und P in $Fig.3$.

(b) Berechne die Determinante von $(D_{30^o,z} \cdot D_{15^o,x})$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ y^0 & y^1 & y^2 \\ z^0 & z^1 & z^2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante $\det(A^{-1} \cdot B^{-1})$. Für welche λ existiert diese Determinante nicht?

(b) Löse die Gleichung $\det(A) = \det(B)$ für die Unbekannte λ.

(c) Berechne $\det(C)$.

(3)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Löse die Gleichung $G \cdot \vec{x} = \vec{e}_2$ nach Gauss–Jordan.

(a) Für $\lambda = 1$.

(b) Für $\lambda = -1$.

Viel Glück!

WIR

6.9 Test: Determinanten und Matrizen, lineare Abbildungen II/30

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) i. Berechne $\det(A)$.
ii. Berechne $\det(A^T)$.
iii. Berechne $\det(B)$.
iv. Berechne $\det(C)$.

(b) i. Berechne A^{-1}.
ii. Berechne B^{-1}.
iii. Berechne C^{-1}.

(2) Sei $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Löse $A\,\vec{x} = \vec{v}_1$ mit A von oben.

(3) Löse falls möglich $B \cdot X = C^2 = C \cdot C$ mit B und C von oben.

(4) Löse falls möglich $C\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit C von oben.

(5)

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sei $D : \vec{v}_2 \longmapsto \vec{W}_2 = D \cdot \vec{v}_2$
und $D : \vec{v}_0 \longmapsto \vec{W}_0 = D \cdot \vec{v}_0$

$\vec{v}_0$ und $\vec{v}_2$ definieren ein Parallelogramm P_v. Ebenso definieren $\vec{w}_0$ und $\vec{w}_2$ ein Parallelogramm P_w.

(a) Wie gross ist der Flächeninhalt von P_w.
(b) Wieviel mal ist der Flächeninhalt von P_w grösser oder kleiner als der von P_v?

Viel Glück!

WIR

6.10 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/36

Abschrift • *Copie*

(1) $A = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Stelle A in Diagonalform dar!

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^3 \\ 1 & 0 & -3\,q^2 \\ 0 & 1 & 3\,q \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren!

(3) Eine lineare Abbildung ist durch die Matrix A gegeben. Zudem weiss man:

$$\vec{0} \overset{A}{\longmapsto} \vec{0},\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{A}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{A}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne, falls möglich, die Matrix A.

(b) Suche das Bild von $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(4) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne für A das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 + c_2\,\lambda^2 + c_1\,\lambda + c_0$.

(b) Berechne die Matrix $P(A) = A^3 + c_2\,A^2 + c_1\,A + c_0\,E$

Viel Glück!

WIR

6.11 Test: Komplexe Zahlen u. Funktionen, Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen II/44

Abschrift • *Copie*

(1) Komplexe Zahlen und Funktionen

(a) Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y),\ \ z = x + i\,y$. Sei weiter $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.
Berechne formal $\triangle\, f$. *Hinweis: Cauchy–Riemann.*

(b) Berechne exakt $(-i)^{1-i}$.

(c) Löse vollständig und exakt $\sin(\pi \cdot t + i \cdot t) = 0,\ \ t \in \mathbb{R}$.

(d) Skizziere alle Lösungen von $(z+2)^3 = 1 + i$.

(e) Sei $f(z) = \dfrac{a\,z+b}{c\,z+d} = w,\ \ a,b,c,d \in \mathbb{C}$ (Möbiustransformation). Sei weiter
$f:\ -1 \longmapsto 1,\ \ f:\ 1 \longmapsto -1,\ \ f:\ -i \longmapsto 0.$ $\rightsquigarrow$ Bestimme f.

(f) Untersuche, ob $f(z) = \dfrac{z}{|z|^2}$ holomorph ist!

(2) Gleichungssysteme,Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen

(a)
$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Berechne von Hand $M^{-1} = ?$ (Rechnung kommentieren!)

ii. Für welche α existiert M^{-1} nicht?

(b) $A \cdot X = A^T \cdot B^2,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix},\ \ \gamma \neq 0.\ \ \rightsquigarrow\ \ X = ?$

(c) $\left| \begin{array}{lcr} 2\,x + 4\,y + 6\,z & = & 12 \\ 3\,x + 3\,y - 2\,z & = & -9 \\ x + 3\,y + 7\,z & = & 16 \end{array} \right|$ Löse das Gleichungssystem. (Zeige dabei das Gauss–Verfahren.)

(d) $\left| \begin{array}{lcr} 2\,x + 4\,y + 6\,z & = & 12 \\ x + 3\,y - 2\,z & = & 16 \\ x + y + 8\,z & = & 0 \end{array} \right|$ Was ist die Dimension des Lösungsraumes $\mathbb{L}$?

(e) $\mathcal{A} : \vec{x} \longmapsto \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \vec{x} \rightsquigarrow$ Suche eine mögliche Matrix A mit $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{v} = A \cdot \vec{x}$

(f) Eine lineare Abbildung stiftet die Zuordnungen $0 \longmapsto 0$,
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Berechne eine mögliche Matrix, die das Gewünschte leistet und bestimme damit das Bild von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Viel Glück!

WIR

6.12 Test: Lineare Abbildungen und Matrizen, Differentialgeometrie und Kurven, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gleichungssysteme II/57

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

(1) $x^2\,(2-y) = y^2\,(2+y) \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(2) $x^2 - 2\,x\,y + x^2 - y^3 = \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(3) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 5\,t\cdot\cos(t)+\cos(10\,t) \\ 5\,t\cdot\sin(t)+\sin(10\,t) \\ t \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Tangente, Normalebene für $t = \frac{\pi}{2}$!
• *Tangente, plan normal pour* $t = \frac{\pi}{2}$*!*

(4)

$$\begin{array}{rcl} w + x - y + 2\,z + 2 & = & 0 \\ 2\,y - 2\,x - 2\,w - 4\,z - 4 & = & 0 \end{array}$$

Lösungsmenge • *Ensemble des solutions* $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = ?$

(5) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Lineare Abbildung • *Application linéaire* $\begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix} \longmapsto ?$

(6) $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x} + \vec{b},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Bild der Geraden • *Image de la droite* $y = 4\,x + 1$?

%

(7) Geg.: • **Donné:** $KS(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}) \xmapsto{f_1} \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\} \xmapsto{f_2} \{\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}''\} \xmapsto{f_3} \{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$

KS = Koordinatensystem • KS = *système de coordonnées*

f_1 = Verschiebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ • f_1 = *déplacement de* $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

f_2 = Drehung um $\alpha = +\frac{\pi}{2}$ • f_1 = *rotation avec* $\alpha = +\frac{\pi}{2}$

$f_3 \rightsquigarrow \vec{e}_1{}'' \longmapsto \vec{e}_1{}''' = -\vec{e}_1{}''$

Fragen: • *Problèmes:*

a) $P = (4; 5) \longmapsto ?$ Im neuen System $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$?
• *Dans le nouveau système* $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$*?*

b) $\{(x, y) \mid y = \frac{1}{2}\,x+3\} \longmapsto ?$

Viel Glück!

6.13 Test: Lineare Abbildungen und Matrizen, Differentialgeometrie und Kurven, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gleichungssysteme II/58

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

(1) $4\,x^2\,(2+y) = y^2\,(2-y) \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(2) $x^3 + 2\,x\,y - x^2 - y^2 = \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(3) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 10\,t\cdot\sin(t) - \cos(10\,t) \\ 10\,t\cdot\cos(t) + \sin(10\,t) \\ t \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Tangente, Normalebene für $t = \pi$!
• *Tangente, plan normal pour $t = \pi$!*

(4)

$$\begin{aligned} w + x + 4\,y - z + 4 &= 0 \\ 4\,z - 4\,x + 4\,w - 16\,y - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsmenge • *Ensemble des solutions*
$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = ?$

(5) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Lineare Abbildung • *Application linéaire* $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix} \longmapsto ?$

(6) $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x} + \vec{b},\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Bild der Geraden • *Image de la droite $y = 3\,x - 1$?*

%

(7) Geg.: • **Donné:** $KS(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}) \xmapsto{f_1} \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\} \xmapsto{f_2} \{\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}''\} \xmapsto{f_3} \{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$

KS = Koordinatensystem • KS = *système de coordonnées*

f_1 = Verschiebung um $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ • f_1 = *déplacement de* $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f_2 = Drehung um $\alpha = +\dfrac{3\,\pi}{2}$ • f_1 = *rotation avec* $\alpha = +\dfrac{3\,\pi}{2}$

$f_3 \rightsquigarrow \ \vec{e}_2{}'' \longmapsto \vec{e}_2{}''' = -\vec{e}_2{}''$

<u>Fragen:</u> • <u>*Problèmes:*</u>

a) $P = (5; 2) \longmapsto$? Im neuen System $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$?
• *Dans le nouveau système* $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$*?*

b) $\{(x, y) \mid y = 2\,x+1\} \longmapsto$?

Viel Glück!

WIR

6.14 Test: Lineare Abbildungen, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektoranalysis III/38

Abschrift • *Copie*

(1) Eine lineare Abbildung des 3–dimensionalen Raumes in sich besitzt die Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Man weiss, dass alle Punkte der Geraden, die durch den Origo und den Punkt $P(1/1/1)$ geht, durch diese Abbildung unverändert gelassen werden, während der Punkt $A(4/-3/2)$ in $B(-6/1/2)$ übergeführt wird. Bestimme die fehlenden Elemente der Abbildungsmatrix und berechne den Bildpunkt D von $C(18/11/36)$!

(2) Gegeben sei ein 3–dimensionales Vektorfeld $\vec{X}$:

$$\vec{X} = \vec{X}(x, y, z) = x\,z\,\vec{e}_1 + x\,\sin(y)\,\vec{e}_2 + (z + e^x)\,\vec{e}_3.$$

Berechne das Linienintegral dieses Vektorfeldes längs des lückenlosen Weges $C = C_1 \cup C_2$, wobei C_1 ein Stück Parabel $z = x^3$ mit $x \in [0,\ 1]$ ist. C_2 verläuft parallel zur y–Achse mit $y \in [0,\ \pi],\ \ x = 1,\ \ z = 1$.

(3) Der Kaffee in einer zylinderförmigen Tasse mit Radius r wurde längere Zeit gleichmässig umgerührt. Die resultierende Kaffeeoberfläche (Querschnitt oben) ist durch ein quadratisches Polynom $y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$ bestimmt. In der Mitte steigt der Kaffee bis zur Höhe c, am Rand bis zur Höhe d. Um wieviel Kaffee handelt es sich? (D.h. $V = ?$)

(4) Gegeben sei die folgende Raumfläche im $\mathbb{R}^3$:

$$3\,x^2\,z - 4\,x\,y\,z - 7\,x + 4\,y = 5$$

(a) Man bestimme den einzigen Punkt der Raumfläche mit horizontaler Tangentialebene.

(b) Man bestimme die Tangentialebene in der Funktionsform $z = z(x, y)$.

(c) In dieser horizontalen Tangentialebene liegt das Dreieck, welches gegeben ist durch $A(10/0/z)$, $B(5/5/z)$ und $C(2/1/z)$. Man berechne das Volumen des Körpers der entsteht, wenn man das Dreieck rotieren lässt um die Parallele zur x–Achse in der horizontalen Tangentialebene.

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 7

Serien mit „Eigenwerttheorie mit Matrizen“

7.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

7.2 Test: Determinanten und Matrizen, lineare Abbildungen, Eigenwerttheorie I/56

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Spur und die Determinante von A.

(b) Berechne die Eigenwerte von A.

(c) Berechne die Eigenvektoren von A.

(d) Berechne allenfalls weitere existierende Hauptvektoren von A.

(2) Sei $A = B + k \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}$.

Berechne die Eigenwerte und untersuche, wie diese von k abhängen.

(3) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

(a) Stelle A dar in der Form $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$ mit $\det(U) = 1$.

(b) Berechne $A^{100} := A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$

(c) Berechne das Bild der Geraden $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter A.
Was ist daran speziell auffallend?

Viel Glück!

7.3 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/34

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 i m Raum:

$$g_1 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auf g_2 rollt eine Kugel, welche an g_2 haftet. Gesucht ist der Radius R der minimalst möglichen Kugel, die beim Vorbeirollen g_1 gerade noch berührt.

(2)

$$\left| \begin{array}{lcr} x + y + z + w & = & 0 \\ x - y - z + w & = & 1 \\ x + 2\,y + 3\,z - 2\,w & = & -1 \end{array} \right|$$

(a) $Dim(\mathbb{L}) = ?$

(b) $Rang = ?$

(c) $\mathbb{L} = ?$ (Dabei sei w Parameter!)

(d) Geometrische Struktur von $\mathbb{L}$?

(3)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\det(M) = ?$ (Rechnung sichtbar!)

(b) Ist M regulär?

(c) $M^T = ?$

(d) $M^{-1} = ?$ (Rechnung sichtbar!)

(e) Eigenwerte von M?

(f) Ist $(M - x\,E) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ lösbar?

(g) Bedeutung von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich M ?

%

(4) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -0.367692 & -1.11477 & 1 \\ 0.928667 & 0.700131 & 1 \end{pmatrix}$

(a) $A^T = \,?$

(b) $(A^T)^{-1} = \,?$ (Methode frei!)

(c) $S = (A^T)^{-1} \cdot M \cdot A^T = \,?$ (Gerundet!)

(d) Was lässt sich aus dem letzten Resultat über die Eigenwerte von M ableiten?

(e) Was hat A mit den Eigenvektoren von M zu tun?

Viel Glück!

7.4 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/36

Abschrift • *Copie*

(1) $A = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Stelle A in Diagonalform dar!

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^3 \\ 1 & 0 & -3\,q^2 \\ 0 & 1 & 3\,q \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren!

(3) Eine lineare Abbildung ist durch die Matrix A gegeben. Zudem weiss man:

$$\vec{0} \overset{A}{\longmapsto} \vec{0}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{A}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{A}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne, falls möglich, die Matrix A.

(b) Suche das Bild von $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(4) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne für A das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 + c_2\,\lambda^2 + c_1\,\lambda + c_0$.

(b) Berechne die Matrix $P(A) = A^3 + c_2\,A^2 + c_1\,A + c_0\,E$

Viel Glück!

7.5 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/37

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(A\,\vec{x})^T\,A^{-1} - \vec{v}^{\,T}\,M\,A^{-1} = \vec{x}^{\,T}\,A,\;\; A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix},\;\; M = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix},\;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix},\;\; \vec{x} = \,?$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Löse das Eigenwertproblem $C\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}$.

(b) Bestimme die Fixgeraden (Skizze!).

(3)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechne B^{-1} von Hand, falls möglich.

(4) Löse das Gleichungssystem $B\,\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b}^{\,T} = (6, 9, 12, 24)$, B wie oben.

Viel Glück!

7.6 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie II/40

Abschrift • *Copie*

(1) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & k \\ 1 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$ Für welche k ist $\det(M_1) = 0$?

(2)

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

(a) $(M_2)^{-1} = ?$

(b) $k = 1 \rightsquigarrow$ Was ist das geometrische Bild von $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ bei $\vec{x} \longmapsto M_2 \cdot \vec{x}$

(c) Berechne die Eigenwerte von M_2.

(d) Berechne die Eigenwerte von M_2 für $k = 1$.

(e) Berechne die Eigenvektoren von M_2.

(3)

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob M_3 eine Ähnlichkeitsabbildung stiftet (Begründung!).

(b) $M_3 = U \cdot D \cdot U^T$. Konstruiere U und D.

Viel Glück!

WIR

7.7 Test: Eigenwerttheorie mit Matrizen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ **II/62**

Abschrift • *Copie*

(1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Eigenwerte?

(b) Eigenvektoren?

(c) Bild von $\triangle ABC$, $A(0;0;0)$, $B(-1;1;1)$, $C(1;1;1)$, unter M?

(d) Flächeninhalt des Bilddreiecks?

(e) $(M^{-1})^{100} = \,?$

(2) $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Entwickle mit Hilfe des Satzes von Caley–Hamilton eine explizite Formel für A^{-1}.

(3) Ein Volumen ist begrenzt durch $z = 3\,x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ und $z + y = 6$. Berechne den Inhalt!

(4)

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

Hinweis: Geeignetes Koordinatensystem!

(5)

$$f(x, y) = h \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}) \quad \text{mit} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

G ist das Gebiet in der Grundebene mit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (elliptisches Sinusoid). Berechne

$$\iint_G |f(x, y)|\, dG.$$

Hinweis: Subst. $x = a \cdot u$, $y = b \cdot v$, im entstehenden Integral Polarkoordinaten verwenden.

Viel Glück!

WIR

7.8 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung, Eigenwerttheorie mit Matrizen III/04

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f_1(x) = x^2 + x + 3\,x\,y - y^3$$

Berechne mögliche Extremwertstellen, Sattelpunkte u.s.w. und versuche, eine 3D–Skizze der Fläche zu entwerfen.

(2)

$$W = \frac{1}{2}\,R\,S^2\,(R-S) + q\,\frac{R+S}{R-S}$$

Berechne W mit samt dem Fehler von W, wenn folgnde Werte gemessen werden:

$$R = 46.245 \pm 0.035\,n,\;\; S = 45.015 \pm 0.015\,n$$

Debei ist bekannt: $q = 1.32915 \pm 0.00002\,n^2$

(3)

$$f_3(x, y, g(z)) = e^{x+y}\,\sin(\cdot y \cdot g(z)),\;\; g(z) = \sin^2(z) + z^3 - z^2 + z$$

Berechne das totale Differential von f_3!

(4) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Es wird vermutet, dass ein Eigenwert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 6$ sein könnte. Berechne die allfälligen Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

Viel Glück!

7.9 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Vektorgeometrie III/42

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von $A(s)$.
(b) Berechne die Spur von $A(s)$.
(c) Berechne die Eigenwerte von $A(s)$.
(d) Berechne die Eigenwerte von $A(1)$.
(e) $A(s)^{-1} = ?$
(f) Berechne die Eigenwerte von $A(3)$.
(g) Berechne die Eigenvektoren von $A(3)$.

(2)

$$B(x) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von $B(s)$.
(b) Berechne die Eigenwerte von $B(s)$.
(c) $B(s)^{-1} = ?$
(d) Berechne die Eigenwerte von $B(2)$.
(e) Berechne die Eigenvektoren von $B(2)$.
(f) $B(2) = X \cdot D \cdot X^{-1}$, $D =$ Diagonalmatrix, $X =$ Matrix der Eigenvektoren.
  i. $X, D = ?$
  ii. $X^{-1} = ?$
(g) $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B(x) \cdot \vec{y}(t) = \vec{w}(t)$ (Gerade!).
Bestimme s so, dass die Bildgerade durch den Ursprung geht.

(3)

$$A(s) \cdot \begin{pmatrix} s \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gibt es eine Lösung (s, y, z, w)?

Viel Glück!

WIR

7.10 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Vektorgeometrie III/43

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Spur der Determinante.

(b) Berechne die Eigenwerte.

(c) Berechne die Eigenvektoren.

(d) Berechne allenfalls weitere existierende Hauptvektoren.

(2) Sei $A = B + k \cdot E = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix}.$

Berechne die Eigenwerte und untersuche, wie diese von h abhängen.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Stelle A in der Form $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$ dar (mit $\det(U) = 1$).

(b) Berechne $(A^{-1})^{100}$

(c) Berechne das Bild der Geraden $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Was fällt an diesem Resultat auf?

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 8

Serien mit „Algebra und elementare Zahlentheorie“

8.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

8.2 Test: Ungleichungen, Ungleichungssysteme, Mengenlehre, Zahlentheorie, Funktionen im $\mathbb{R}^1$ I/01

Abschrift • *Copie*

(1) $x = \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \ddots}}}$

(a) $x = ?$

(b) $x \in \mathbb{Q}$?

(2) Skizziere $\mathbb{L}$! • *Esquisse de* $\mathbb{L}$*!* $\leadsto$ $\left| \begin{array}{rcl} 3\,x + 2\,y & \geq & 6 \\ 2\,x - 3\,y & \leq & 3 \end{array} \right|$

(3) $x + 1 \geq \cos(x) - 1 \leadsto \mathbb{L} = ?$

(4) $\left| \begin{array}{lcr} \mathbb{L}_1 : \; x^2 + x - 2 & \leq & 0 \\ \mathbb{L}_1 : \; -x^2 + x + 2 & \geq & 0 \end{array} \right| \leadsto \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = ?$

(5) $2\,x^2 - 5\,x - 1 \geq x + 10 \leadsto \mathbb{L} = ?$

(6) $|A| = 99,\ |B| = 98,\ |C| = 97,\ |A \cap B| = 30,\ |A \cap C| = 27,\ |B \cap C| = 28,\ |A \cap B \cap C| = 26.$

(a) $|A \cup B \cup C| = ?$

(b) $|(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = ?$

(7) $(A \cup B) \cap C = \ldots \cup \ldots \leadsto$ Durch eine Zeichnung erklären! • *Expliquer par un dessin!*

(8) (a) $f(x) = x^2 - |[x]| \leadsto$ Skizze! • *Esquisse!*

(b) Löse: • *Résoudre:* $x^2 - |[x]| = 1$

(9) (a) $g(x) = (x + 1)\,\text{sgn}(x) \leadsto$ Skizze von g ! • *Esquisse de* g *!*

(b) $(x + 1)\,\text{sgn}(x) = 0 \leadsto x = ?$

(c) $(x + 1)\,\text{sgn}(x) = -2 \leadsto x = ?$

(10) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x),\ g(x) = \sin(x) \cdot x^2$

(a) Skizze! • *Esquisse!*

(b) $f(x) = g(x) \leadsto x = ?$

Viel Glück!

WIR

8.3 Test: Funktionen im $\mathbb{R}^1$, Gleichungssysteme, Ungleichungssysteme, Zahlentheorie I/02

Abschrift • *Copie*

(1) Löse: • *Résoudre:* $\left|\begin{array}{lcl} x-y & \leq & 1 \\ x+y & \geq & 1 \\ y & \geq & 2\,x-6 \end{array}\right|$

(2) (a) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$: $\leadsto$ Algebraische Struktur? • *Structure algébrique?*

(b) $a+b=10,\ \ a^2=10\,b \ \leadsto \ \ a=?,\ \ b=?,\ \ a\in\mathbb{Q}\,?$

(3) (a) Löse: • *Résoudre:* $x^2-4\,x+5=0$

(b) Skizziere: • *Esquisse:* $y=x^2-4\,x+5$

(4) (a) Exakt: • *Exacte:* $\tan(60^o)=\,?$

(b) Löse: • *Résoudre:* $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ ($\leadsto$ alle Lösungen!) • *Toutes les solutions!*

(5) Löse: • *Résoudre:* $\left|\begin{array}{lcl} -2\,x-y+12 & = & 0 \\ x+y & = & 2 \\ x-2\,y & = & 8 \\ 2\,x+y & = & 12 \end{array}\right|$

(6) $\log_{10}(3)+3\,\log_{10}(2)=\log_{10}(x) \ \Rightarrow \ x=\,?$

(7) $\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin(x)\cdot\cos(\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{\pi}{3})\cdot\cos(\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{4})}) \ \Rightarrow \ x=\,?$

(8) Auf wieviele verschiedene Arten kann man sechs Häuser mit sechs verschiedenen Farben kolorieren?
• *De combien de manières différentes est–ce qu'on peut colorer six maisons de manières différentes?*

(9) *kgV'ppmc*$(1376528024, 1376528026)=\,?$

(10) $0.0123456789\overline{0123456789}\ldots=\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q} \ \Rightarrow \ \dfrac{a}{b}=?$

Viel Glück! — Bonne chance!

8.4 Test: Algebra, Zahlentheorie, Gleichungen, Grundlagen, Vektorgeometrie I/23

Abschrift • *Copie*

(1) Einer Kugel mit Radius r ist ein Drehzylinder mit Radius ρ und der Höhe h eingeschrieben worden, dessen Mantelfläche gleich der halben Kugeloberfläche ist. Berechne das Zylindervolumen.

(2)

$$(\frac{10-3\,x}{5} - \frac{2\,x-12}{3} + 2) \cdot (\frac{2\,x-1}{4\,x+11} - \frac{5}{21})$$

Bestimme die Werte von x, für die dieses Produkt null ist.

(3)

$$\frac{5\,x-11}{4-3\,y} = \frac{10\,x-19}{7-6\,y}$$

Suche die ganzzahlingen Lösungen (x, y) dieser Gleichung!

(4) In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge 6 sind die Seitenmittelpunkte mit $M_a,\ M_b,\ M_c$ bezeichnet (z.B. $a = \overline{BC}$). Mit dem Mittelpunkt A wird ein Kreisbogen von M_c nach M_b geschlagen und ebenso mit dem Mittelpunkt B ein Kreisbogen von M_c nach M_a. Über den halben Dreieckseiten $\overline{CM_a}$ und $\overline{CM_b}$ wird je ein Halbkreis nach aussen errichtet. Berechne nun den Umfang und den Inhalt der von den Kreisbogen begrenzen Figur $CM_bM_cM_aC$.

Viel Glück!

WIR

8.5 Test: Grundlagen, Algebra, Funktionen, Grenzwerte I/24

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2} \;\rightsquigarrow\; x=\,?$$

(b)

$$\text{Vereinfache:}\;\; \frac{a^2+a\,c-b^2-b\,c}{a^2-b^2-2\,b\,c-c^2}$$

(c)

$$x^2-4\,x-3\leq 2\,x+1 \;\Rightarrow\; \mathbb{L}\; =\,? \;\; \text{(Exakt!)}$$

(2) Skizziere die Graphen:

(a) $f(x)=x-[x],\;\; x\in[-2,\;2]$

(b) $f(x)=\sin(|x-[x+0.5]|),\;\; x\in[-2,\;2]$

(c) $f(x)=\sin(x)+\cos(\frac{1}{x}),\;\; x\in[-0.1,\;0.1]$

(d) $f(x)=\dfrac{x-1}{|(\sqrt{x}-1)|},\;\; x\in\mathbb{R}$

(3) Bestimme so genau wie möglich Pole, Asymptoten und Monotoniebereiche:

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+1}$

(b) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

(4) (a) $a_n=\cos(n)\cdot\sin(\dfrac{n+2\,n^2}{3\,n^3+4\,n^{\frac{1}{2}}}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; ?$

(b) Gegeben ist eine quadratische Platte der Dicke 1 cm. Auf diese Platte wird eine zweite Platte der selben Dicke gelegt, deren Ecken mit den Seitenmittelpunkten der ersten Platte zusammenfallen. Nach dem gleichen Rezept wird auf die zweite Platte eine dritte gelegt und so fort, in alle Ewigkeit. So entsteht ein unendlich hoher Turm. Wie gross ist die gesamte obere Deckfläche aller Platten zusammen, die man aus einem Halbfabrikat ausschneiden müsste? (Das Ausschneiden ist der unendlich vielen Teile wegen natürlich in der Realität nicht möglich, aber rechnen kann man es trotzdem.)

(c) Gegeben ist eine Folge mit $x_1=a,\;\; x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\,(x_n+\dfrac{a}{x_n})$.
Zeige im Beispiel $a=2$ dass die Folge konvergiert und berechne den Grenzwert allgemein für $a>0$. *Herleitung angeben!*

(5) Schreibe in lateinischer Schrift:

$H\epsilon\upsilon\rho\epsilon\kappa\alpha$! $\Gamma\epsilon\sigma\chi\eta\alpha\phi\phi\tau$! $\Delta\alpha\sigma$ $\Delta\iota\nu\gamma$ $\eta\alpha\tau$ $\Sigma\pi\alpha\sigma\sigma$ $\gamma\epsilon\mu\alpha\chi\eta\tau$!

(6) (a) Skizziere die Graphen.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h.

(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(7) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Formel?

(b) Induktionsbeweis?

(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?

(8) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.

(9) (a) Gesucht sind Additions– und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.

(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

WIR

8.6 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Zahlentheorie I/25

Abschrift • *Copie*

(1) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow X \wedge \neg Z)) \dot{\vee} Z \rightsquigarrow$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg Z \Rightarrow X \wedge Y) \uparrow (X \Rightarrow \neg Z)$$

(3) Gegeben sind in der Universalmenge U drei Mengen A, B und C. Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100,\ |A| = 50,\ |B| = 30,\ |C| = 8,\ |A \cap B| = 11,\ |A \cap C| = 7,\ B \cap C = \{\}$$

(4) $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(1,6),(6,1),(6.6),(2,6),(6,2),(3,6),(6,3),(3,3),(2,3),$ $(3,2),(1,3),(3,1),(4,5),(4,4),(4,5),(5,5),(6,6),(1,6),(5,4)\}$.
Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(5)

$$f(x) = \sqrt{(x-3)(x-4)(x+1)},\ \ g(x) = x^{-5},\ \ h(x) = x^{-6}$$

(a) Skizziere die Graphen.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h.

(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(6) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Formel?

(b) Induktionsbeweis?

(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?

(7) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.

(8) (a) Gesucht sind Additions– und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.

(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

WIR

8.7 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen, Funktionen, Zahlentheorie I/35

Abschrift • *Copie*

(1) $\Big((x=y) \;\Rightarrow\; (y=z)\Big) \;\Rightarrow\; (a<z) \;\longmapsto\; \Big((a<z) \;\Rightarrow\; ((z=y) \;\Rightarrow\; (y=x))\Big) \leadsto$ korrekt?

(2)

X	Y	Z	W	$f(X,Y,Z,W)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

$f(X,Y,Z,W) \equiv\,?$ (a.N.F.)

(3) In einem Stadion sind 548 Personen. 100 von ihnen haben einen CH–Pass, 200 einen F–Pass, 300 einen I–Pass. 30 haben sogar einen CH– und einen F–Pass, 15 einen F– und einen I–Pass, 20 einen CH– und einen I–Pass. Wieviele haben alle 3 Pässe? (Sofern die Konstellation logisch korrekt ist.)

(4) Beweise oder widerlege exakt: $A \times (A \cap B) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(5) $A = \{1,2,3,4\},\; B = \{10,15\},\; C = \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (A \times B) \cap (A \times C) = \,?$

(6) $f(x) = x^2 + 2\,x - 3,\qquad f(x) = \sqrt{x+2} - 2,\qquad h(x) = 3\,\sin(x^2).$

(a) Wo ist $f(g(x))$ bijektiv?

(b) Berechne $[(f \circ g) \circ h](x)$

(7) Kreativ: Stelle $[a]_3 \cdot [b]_3 := [a \cdot b]_3 = [x]_3$ in einer Tabelle dar.

(8) $a\mathcal{R}b \;\Leftrightarrow a^2 + b^2 \le a\,b,\;\; a,b \in \mathbb{Z}$ Äquivalenzrelation?

(9) Wo gilt $-2\,x^2 - 2\,x - 2 \le x^2 - 6\,x + 5\,$?

Viel Glück!

8.8 Test: Zahlentheorie ($\mathbb{N}$) Kombinatorik — Théorie des nombres ($\mathbb{N}$), analyse combinatoire I/39

Abschrift • *Copie*

Hinweis: Beweise $\leadsto$ vollständige Induktion. • *Indication: Preuves* $\leadsto$ *Induction complète.*

(1) Gesetz und Beweis: • *Loi et preuve:* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \,?$
(Nur für den Beweis werden Punkte erteilt.)
• *(Les points seront donnés seulement pour la preuve.)*

(2) Beweise: in einem konvexen n–Eck gibt es $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Diagonalen.
• *Prouver: Dans un polygone convexe à n sommets il y a $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ diagonales.*

(3) Beweise: • *Prouver:* $\forall_{n\in\mathbb{N}} : s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n\cdot n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(4)

$$\frac{(2\,n+1)^2}{8} = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n$$

Warum funktioniert hier die vollständige Induktion nicht?
• *Pourquoi ici l'induction complète ne fonctionne–t–elle pas?*

(5)

$$\left|\begin{array}{llllll} 1\cdot 2 & = & 2 & = & 6/3 \\ 1\cdot 2+2\cdot 3 & = & 8 & = & 24/3 \\ 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4 & = & 20 & = & 60/3 \\ 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5 & = & 40 & = & 120/3 \end{array}\right|$$

Allgemeines Gesetz ? — Beweis?
• *Loi générale? — Preuve?*

(6) Erste Runde eines Schachturniers mit 14 Spielern: Auf wieviele Arten kann man 7 Paare bilden?
• *Première partie d'un tournois d'écheques avec* 14 *joueurs: De combien de manières peut–on composer les* 7 *couples de joueurs?*

(7)

```
     R
    O O
   X X X
  A A A A
 N N N N N
E E E E E E
```

Auf wieviele Arten kann man in diesem Schema den Namen „ROXANE“ lesen? Regel: Keine Buchstaben überspringen! (Roxane: Gattin Alexanders des Grossen.)
• *De combien de manières différentes peut–on lire le nom de ”Roxane” dans ce schéma? Règle: Interdit de dépasser des lettres. (Roxane: L'épouse d'Alexandre le grand.)*

%

(8)

$$M = \{x, y, z \in \mathbb{N} \mid x + y + z = 100\} \;\Rightarrow\; |M| = \,?$$

Hinweis: $|M| =$ Anzahl Lösungen von $x + y + z = 100,\; x, y, z \in \mathbb{N}$.
• *Indication:* $|M| =$ *Nombre de solutions de* $x + y + z = 100,\; x, y, z \in \mathbb{N}$.

(9) Wieviele innere Schnittpunkte haben die Diagonalen eines konvexen n–Ecks?
• *Combien de points d'intersection intérieurs les diagonales d'un polygone convexe à n sommets ont–elles?*

Untersuche, wieviele Eckpunkte nötig sind, um einen Schnittpunkt zu erzeugen. Wo schneiden sich die Diagonalen durch diese Eckpunkte? Wie kann man hier die Kombinatorik anwenden?
• *Chercher combien de sommets sont nécessaires pour produire un point d'intersection. Où les diagonales par ces sommets ont–elles les points d'intersection? Comment est–ce au'on peut appliquer maintenant l'analyse combinatiore?*

Viel Glück!

WIR

8.9 Test: Kombinatorik, Logik, Mengenlehre, Zahlentheorie I/40

Abschrift • *Copie*

(1) Beweise mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$(q^n - 1) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1) \cdot (q - 1)$$

(2) In einem kartesischen Koordinatensystem sind auf der x–Achse die Punkte $P_1(1;0)$, $P_2(2;0)$, $\ldots$, $P_n(n;0)$ und auf der y–Achse die Punkte $Q_1(0;1)$, $Q_2(0;2)$, $\ldots$, $Q_n(0;n)$ gegeben. Damit werden folgende Geraden gezeichnet: $g_1 = \overline{P_1Q_n}$, $g_2 = \overline{P_2Q_{n-1}}$, $g_3 = \overline{P_3Q_{n-2}}$, $\ldots$, $g_n = \overline{P_nQ_1}$.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Wieviele geschlossene Flächen entstehen durch eine solche Konstruktion mit n Geraden g_k und den beiden Achsen? Beweise die Vermutung!

(c) Wieviele Schnittpunkte inklusive Achsenschnittpunkte entstehen total?

(3) Gegeben ist eine Tolneiter mit 8 Tönen. Der Komponist will 4 Takte mit je 8 Achteltönen erzeugen. Wieviele verschiedene Kompositionen ohne Pausen sind möglich?

(4) Ist der Ausdruck $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow \neg A) \Rightarrow X$ eine Tautologie, eine Kontraposition oder keines von beiden?

(5) Ermittle die Anzahl Teilmengen von U:

$$U = \{\{A\},\ \{A, \{A\}\},\ \{A, A, \{A\}, \{A\}\} \cup \{\{A\}\}\}$$

Viel Glück!

8.10 Test: Grundbegriffe, Grenzwerte, Funktionen, Algebra I/41

Abschrift • *Copie*

(1) Warum kann man nicht allgemein behaupten, dass die folgende Gleichung richtig sei?

$$\frac{0}{0} = 1$$

(2) Berechne, falls möglich, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\sin(\cos(n))}{n+\sin(n)}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[\frac{3}{4}]{n^2+2\,n+1.1}}{\sqrt[\frac{5}{6}]{n^2-2\,n+1}}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \,?$ $\qquad a_n = 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{1}{(??)^n}$

(3) $a_n = 1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$

(a) Zeige, dass $\langle a_n \rangle$ konvergiert.

(b) Versuche, numerisch einen Grenzwert zu beobachten. Lässt sich hier eine Vermutung formulieren?

(4) Bestimme den folgenden Limes: $\lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(2.x)^n}{2-x})$.

(5) Vergleiche die Mächtigkeit der Intervalle $[0,\ 1]$ und $[0,\ 4]$. (Begründung!)

(6) Erkläre resp. definiere die folgenden Ausdrücke:

(a) Gleichmässige Stetigkeit auf I

(b) Algebraisch irrationale Zahl

(c) Reelle Zahl

(d) Zahlenkörper

(7) Gegeben ist der Ausdruck $\quad (\pi^{\frac{11}{17\,\pi+\pi}})^{\pi} \cdot (e^e)^{\frac{1}{e}} \cdot e^{(e^{(\frac{1}{e})})} \cdot (e^{\frac{11}{17\,\pi+\pi}})^{\pi}$.

(a) Vereinfache den Ausdruck.

(b) Approximiere den Ausdruck numerisch.

Viel Glück!

WIR

8.11 Test: Funktionen, nichtlineare Gleichungen, Zahlentheorie, Kombinatorik I/42

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Ziffern 4, 9, 1, 1, 9, 9, 0. Wieviele 7–ziffrige Zahlen zwischen $2'000'000$ und $6'000'000$ kann man damit bilden?

(2) Wieviele Lösungen mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ hat die folgende Gleichung?

$$x + y + z = 100$$

(3) Sporttotto: 13 Spiele sind zu beurteilen. Für jedes Spiel hat man die Möglichkeit, 1, x oder 2 anzukreuzen. Wieviele verschiedenen Lösungen kann man setzen?

(4) Vereinfache: $((k+1)! - k \cdot k!)(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!})\binom{2\,k-1}{k-1} \cdot k! = ?$

(5) Vereinfache: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+1} = ?$

(6) Löse die Gleichung: $\tan(x) \cdot \cot(x) = 0.6384$.

(7) Skizziere die Funktion $f : x \longmapsto y = \arctan(x)$ und löse die Gleichung $\arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

(8) Skizziere in Polarkoordinaten: $r(\varphi) = \cos^2(\frac{\varphi}{2}) \cdot \varphi^2, \;\; \varphi \in [0,\; 2\,\pi]$.

(9) Berechne möglichst exakt: $\log_{3.7}(\frac{1}{3.6}) + \log_{3.7}(3.6) = ?$

(10) Berechne möglichst exakt: $\log_{(e^2)}(e^{\pi}) = ?$

Bemerkung: Die meisten Aufgaben sind relativ einfach und geben nicht sehr viel zu tun. Löse diejenigen Aufgaben zuerst, die dir am einfachsten vorkommen und versuche, mit 5 Minuten pro Aufgabe auszukommen.

Viel Glück!

8.12 Test: Boolsche Algebra, Zahlentheorie **I/43**

Abschrift • *Copie*

(1) Vereinfache so weit wie möglich den Boolschen Ausdruck:

$$d + \bar{d}(a\,b\,c + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(d + d\,c)(d + e\,f) + (a\,\bar{d})$$

(2) Dreistellige Dualzahlen a, b und c sollen mit Hilfe einer Schaltung addiert werden.

(a) Erstelle die Tabelle der Leitwerte.

(b) Leite daraus einfache Boolsche Ausdrücke für die Schaltungen ab.

(c) Vereinfache die Ausdrücke so weit wie möglich. Die Schalterzahl soll minimal sein. Dazu soll man mit „Serie“, „Parallel“ und „Negation“ auskommen.

(3) Beweise die folgenden Aussagen, falls möglich: *(”|” bedeutet „teilt“)*

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}: \; k \,|\, (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3)$$

(4) Beweise: $\forall_{n\in\mathbb{N}}: \; \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n\cdot n+1)} = \dfrac{n}{n+1}.$

(5) Gegeben sind die folgenden Gleichungen:

$$\left|\begin{array}{lclcl} 1\cdot 2 & = & 2 & = & 6/3 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 3 & = & 8 & = & 24/3 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & = & 20 & = & 60/3 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 & = & 40 & = & 120/3 \end{array}\right|$$

Suche das allgemeine Gesetz und beweise es!

Viel Glück!

8.13 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen I/44

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne:

(a) $(2-i)+(-i)^{\frac{1}{2}}\cdot(-i)^{\frac{1}{2}}-i^3$

(b) $\dfrac{(2+i)(1+i)}{(2-i)}$

(2) Stelle graphisch möglichst exakt dar: $\sqrt[7]{2-3\,i}$.

(3) Suche $x\in\mathbb{N}$ minimal, so dass $127\,m+552\,n=x$ ganzzahlige Lösungen $m,\ n$ haben.

(4) Was ist ein Körper in der Algebra und was leistet er?

(5) Untersuche, ob folgendes System eine ganzzahlige Lösung $\{x,y\}$ hat:

$$\left|\begin{array}{lcl} x^2-13\,x+5 & \equiv & 2\,x+y\ mod\ 11 \\ x+y & \equiv & 2\ mod\ 3 \end{array}\right|$$

(6) Sei $p\in\mathbb{P},\ k\in\mathbb{N}\cap\{-1,0,1,2,\ldots,p-1\},\ a\in\mathbb{Z}$.

(a) Beweise: $p\mid\binom{p}{k}$.

(b) Kann man die eben erwähnte Beziehung sinnvoll mit vollständiger Induktion beweisen?

(c) Zeige: $a^{p-1}\equiv 1\ mod\ p$.

Hinweis: Zeige $a^{p-1}\equiv 1\ mod\ p$ wie folgt:
Entwickle $(\underbrace{1+(1+\ldots+1)}_{a})^p$ und verwende das Resultat der letzten Teilaufgabe.

(7) Berechne mit der in der vorangegangenen Teilaufgabe gefundenen Beziehung das multiplikative Inverse von [8] in $(\mathbb{Z}_{17},+,\cdot)$.

Viel Glück!

8.14 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Zahlentheorie I/45

Abschrift • *Copie*

(1) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Suche die Formel!

(b) Beweise die die Formel mit vollständiger Induktion!

(c) Löse dieselbe Aufgabe für Dreiecke: Suche die Formel!

(d) Löse dieselbe Aufgabe für Dreiecke: Beweise die die Formel mit vollständiger Induktion!

(2) Beweise: $\forall_{n\in\mathbb{N}}: \ \dfrac{n}{n-1}(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n})=1.$

(3) Sei $f(x,y)=x^2+y^2$. K sei der Kreis um $O(0;0)$ mit Radius r:

$$x=x(t)=r\,\cos(t),\ \ y=y(t)=\ldots,\ \ t\in[0,\ 2\,\pi)$$

Berechne das Kurvenintegral von $f(x,y)$ über die Kurve K.

(4) Die Hyperbel $y=x^{-1}$ wird geschnitten mit der Geraden $y=a\cdot x$.
Wir betrachten die Fläche zwischen der x–Achse, der Geraden und der Hyperbel im 1. Quadranten. x_0 sei die x–Koordinate des Schnittpunkts der Geraden mit der Hyperbel. x_0 ist als Parameter zu verwenden.

(a) Wie gross ist die beschriebene Fläche?

(b) Wie gross ist das Volumen welches entsteht, wenn die Fläche um die x–Achse rotiert wird?

(c) Ist die Oberfläche des Rotationskörpers endlich oder unendlich?

(5) $\int\limits_0^1 e^x\,(\sin(2\,x)-\cos(x))\,dx=\ ?$ (Herleitung zählt!)

Viel Glück!

WIR

8.15 Test: Algebra und Zahlentheorie, Grenzwerte I/46

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne exakt: $k.g.V.(224424, 56322) = \,?$ (Methode $\leadsto$ Euklidscher Algorithmus!)

(2) Verwandle $0.54\overline{54}\ldots$ in einen gewöhnlichen, gekürzten Bruch!

(3) Berechne das Inverse von $[5]$ in $(\mathbb{Z}_{13}, \cdot)$!

(4) Berechne x resp. x und y jeweils vollumfänglich:

(a) $16 \equiv 22\,x \ (mod\ 30)$

(b) $18\,x \equiv 1 \ (mod\ 53)$

(c) System: $\left| \begin{array}{rcl} 4\,x + y & \equiv & 8\ mod\ 12 \\ 2\,x - y & \equiv & 10\ mod\ 12 \end{array} \right|$

(5) Berechne den Grenzwert, falls möglich:

(a) Rekursiv definierte Folge: $a_1 = 1,\ \ a_2 = 2,\ \ a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$

(b) $a_n = \dfrac{(1-n^2)}{n} \cdot \sin(\dfrac{1}{n})$

(c) $a_n = \dfrac{n^2 + 6}{3\,n^2 + 5}$

(d) $a_n = \dfrac{n^{\frac{1}{2}} - n^2}{n^{\frac{1}{2}} + n^2}$

(e) $a_n = 10 - 9 + 8.1 - 7.29 + 6.561 - \ldots$ (n Summanden!)

(6) Berechne $\lim\limits_{n \to 6} \dfrac{(x-6)^4}{(x^4 - 6^4)}$

Viel Glück!

8.16 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen I/48

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Löse die folgende Restklassengleichung:

$$x \cdot 4 \equiv 8 \; mod \; 30$$

(2) Was sind transzendente Zahlen?
Notiere kurz, was sich dazu sagen lässt!

(3) $\dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 + 5\,x - 6} \rightsquigarrow$ Partialbruchzerlegung?

(4) $z = 1{+}i, \;\; b = 2{-}i$. Berechne die folgenden Ausdrücke und zeichne die Resultate zusammen mit z und b in ein Koordinatensystem ein:

(a) $z^3 = \,?$

(b) $z^3 - b = \,?$

(c) $b \cdot (z^3 - b) = \,?$

(d) $\sqrt[5]{b \cdot (z^3 - b)} = \,?$

(e) $b + \sqrt[5]{b \cdot (z^3 - b)} = \,?$

(5) $z_n = r \cdot cis(\varphi_n), \;\; r = 1, \;\; \varphi_n = \dfrac{n\,\pi}{8}, \;\; k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$.

(a) Berechne für die 16 Zahlen z_n die Werte $w = \dfrac{-1}{z - i}$ und zeichne die Resultate in $\mathbb{C}$ ein. (Berechnungsformel angeben!)

(b) Wann gibt es keine Lösung?

Viel Glück!

8.17 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen I/49

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Löse die folgende Restklassengleichung:

$$6 \cdot x \equiv 12 \; mod \; 50$$

(2) Lassen sich die Mächtigkeiten von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ vergleichen?
Notiere kurz, was sich dazu sagen lässt!

(3) $\dfrac{2\,x^3-1}{x^2-x+6} \rightsquigarrow$ Partialbruchzerlegung?

(4) $z = 1-i, \;\; b = 2+i$. Berechne die folgenden Ausdrücke und zeichne die Resultate zusammen mit z und b in ein Koordinatensystem ein:

(a) $z^3 = \,?$

(b) $z^3 + b = \,?$

(c) $b \cdot (z^3 + b) = \,?$

(d) $\sqrt[5]{b \cdot (z^3 + b)} = \,?$

(e) $b - \sqrt[5]{b \cdot (z^3 + b)} = \,?$

(5) $z_k = r \cdot cis(\varphi_k), \;\; r = 1, \;\; \varphi_k = \dfrac{k\,\pi}{8}, \;\; k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}.$

(a) Berechne für die 16 Zahlen z_k die Werte $w = \dfrac{-1}{z+i}$ und zeichne die Resultate in $\mathbb{C}$ ein. (Berechnungsformel angeben!)

(b) Wann gibt es keine Lösung?

Viel Glück!

8.18 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen I/50

Abschrift • *Copie*

(1) Löse das folgende Restklassengleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{lcl} 14\,x & \equiv & 28\,y+28 \; mod \; 21 \\ 15\,x & \equiv & 20\,y+25 \; mod \; 10 \end{array}\right|$$

(2) Was haben komplexe und transzendente Zahlen gemeinsam?

(3) $\dfrac{x^5+2\,x^4+3\,x^2+3\,x+3}{x^4+2\,x^3+2\,x^2+2\,x+1} \rightsquigarrow$ Partialbruchzerlegung?

(4) $w=\dfrac{z}{\bar{z}},\; z\in\mathbb{C}$. Wie liegen z und w in $\mathbb{C}$ geometrisch zueinander?

(5) $w=\dfrac{2}{i\,z-1},\; z=z_n=e^{i\,\varphi_n},\; \varphi_n=\dfrac{n\,\pi}{25},\; n\in\mathbb{Z}$.

$\rightsquigarrow$ Was erhält man für die $w=w_n$ geometrisch für eine „Figur "?
$\rightsquigarrow$ Skizziere die Lage der w_n in $\mathbb{C}$.

Viel Glück!

8.19 Test: Komplexe Zahlen, Algebra und Zahlentheorie, komplexe Abbildungen I/51

Abschrift • *Copie*

(1) $p_1(x) = x^2 - 5\,x + k$.

(a) Faktorisiere $p_1(x)$ für $k = 6$.

(b) Löse die Gleichung $p_1(x) = 0$ für $k = 6$.

(c) Löse die Ungleichung $p_1(x) \leq 0$ für $k = 6$.

(d) Löse $p_1(x) \leq 0$ und diskutieren das Lösungsverhalten für veränderte k.

(2) Ein Polynom p_2 4–ten Grades hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. x_3 und x_4 sind nicht explizit bekannt. Man weiss aber, dass die Summe aller Nullstellen -4 beträgt und das Produkt aller Nullstellen $+4$. Ausserdem ist $p_2(-1) = 1$.

(a) Wie lautet das Polynom (Näherung der Koeffizienten auf 4 Dezimalstellen genau).

(b) Stimmt die Ungleichung $p_2(-30) < p_2(\dfrac{3}{2})$? (Begründung!)

(3) $z_1 = 2 + i \cdot \sqrt{3}$.

(a) $\bar{z}_1 = ?$ (exakt!).

(b) $z_1 - \bar{z}_1 = ?$ (exakt!).

(c) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = ?$ (exakt!).

(d) $z_1^3 = ?$ (exakt!).

(e) $z = \sqrt[3]{\bar{z}_1^3} = ?$

(f) $z_1 - (\bar{z}_1)^2 = ?$ (exakt!).

(g) $z = \dfrac{z_1}{\bar{z}_1 - i} = ?$ (reeller Nenner, exakt!).

(h) $z_1 = r\,cis(\varphi),\ \ r = ?,\ \ \varphi = ?$

(i) $z_1 = e^{z_2},\ \ z_2 = ?$

(4) Studiere die Abbildung $z \longmapsto \dfrac{1}{1+z} = w$.

(a) Was ist das Bild der reellen Achse?

(b) Was ist das Bild der imaginären Achse?

(c) Was ist das Bild des Einheitskreises?

(5) Entwickle $\dfrac{p_3(x)}{q(x)} = \dfrac{2\,x^4 - x^3 + 7\,x^2 + 9\,x - 4}{(x-2)^2 \cdot (x+2)}$ in einen Partialbruch!

Viel Glück!

WIR

8.20 Test: Grenzwerte, nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen, Zahlentheorie I/62

Abschrift • *Copie*

(1) Löse:

(a) $\log_{10}(x) - e^x > 0$

(b) $\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = \frac{1}{4}$

(c) $\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \frac{1}{4}$

(2) Zeige:

(a) $x\ R\ y :\Leftrightarrow x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ ist Äquivalenzrelation.

(b) Betrachte dazu die Abbildung: $x \longmapsto$ Äquivalenzklasse $[x]$.
$\leadsto$ Was ist hier die Urbildklasse von $[\sqrt{2}]$?

(3) Untersuche die Konvergenz von $\langle a_n \rangle$ und berechne, falls möglich, den Grenzwert:

(a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1} - 1}$

(b) $a_n = e^{\frac{1}{n}}$

(c) $a_n = e^{\sqrt{n}}$

(d) $a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2\,n)!}$

(4) Wieviele Häufungspunkte hat die Folge $\langle a_n \rangle = \langle \sin(\frac{3\,n\,\pi}{13} + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) \rangle$?

(5) (a) Stimmt die Gleichung $|\mathbb{Q}^2| = |\mathbb{Q}|$? (Begründung!)

(b) Stimmt die Gleichung $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$? (Begründung!)

Viel Glück!

8.21 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Kombinatorik, Zahlentheorie II/11

Abschrift • *Copie*

(1) Der Graph von $f(x) = \sin(x)$ wird über dem Intervall $[0,\ \pi]$ um die x–Achse rotiert. Berechne den Volumeninhalt des entstehenden Rotationskörpers.

(2) Der Graph von $f(x) = ln(x)$ wird über dem y–Intervall $[0,\ 1]$ um die y–Achse rotiert. Berechne den Volumeninhalt des entstehenden Rotationskörpers.

(3)

$$\int [(\sin(x)\cdot e^x - x\cdot\sin(x^2) + \cos(x)\cdot e^x - \frac{ln(x)}{x}]\,dx = \,?$$

(4)

$$x+y+z=k,\ \ x,y,z\in\mathbb{N}$$

Wieviele Lösungen $(x;y;z)$ gibt es für $k = 1993$ (Jahreszahl der Prüfung).

Hinweis: Zeichne ein Beilspiel für $x, y, z, 1003$ *auf der Zahlengerade und überlege dir, was das Stichwort „Teilmengen“ hier für Ideen bewirken könnte.*

(5) Sporttoto: Vorherzusagen sind 13 Fussballspiele. Wieviele verschiedenen Prognosen mit genau 12 richtigen Ausgängen sind möglich?

(6) Auf wieviele Arten kann man 24 Studenten in 4–er Gruppen einteilen?

(7) Stimmt die folgende Aussage? (Eine mathematische Begründung ist notwendig!)

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}:\ \frac{k}{k+1} = \frac{1}{(k+1)\cdot k} + \frac{1}{k\cdot(k-1)} + \ldots + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 1}$$

Viel Glück!

8.22 Test: Nichtlineare Gleichungen, Reihen, Zahlentheorie II/48

Abschrift • *Copie*

(1) Untersuche die Konvergenz: $\langle a_n \rangle = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots]$

(2) Untersuche die Konvergenz: $\langle n_n \rangle = [\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots]$

(3) Durch den Ursprung gehen 6 Geraden $g_0, g_{30}, g_{60}, \ldots, g_{150}$, welche um $0^o, 30^o, 60^o, 90^o, 120^o$ und 150^o gegen die positive x–Achse geneigt sind.
Im 1. Quadranten befindet sich auf g_{30} der Punkt P_1 mit dem Abstand vom Ursprung $|\overline{OP_1}| = 2$. Von P_1 wird im Gegenuhrzeigersinn auf g_{60} das Lot gefällt. Der Lotfusspunkt ist P_2. Ebenso wird von P_2 im Gegenuhrzeigersinn auf g_{90} das Lot gefällt. Der Lotfusspunkt ist P_3 und so fort. So entsteht die Punktfolge $[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots]$. Berechne den Grenzwert der Länge des spiraligen Streckenzuges $\lim\limits_{n\to\infty} |\overline{P_1P_2P_3\ldots P_n}|$ (Skizze!).

(4) Die Dezimalzahldivision für $\frac{1}{a} = x \in \mathbb{R}$ soll mit Hilfe des Newton–Verfahrens durchgeführt werden. Beispiel: $a = 3 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{3}$. Dazu definieren wir: $f(x) = \frac{1}{x} - a$. Für die Nullstelle von $f(x)$ gilt dann: $\frac{1}{x} - a = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = a \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{a}$.

(a) Berechne nach dem genannten Verfahren eine Rekursionsformel $x_{n+1} = h(x_n)$

(b) Wähle $a = 3$ und $x_1 = 0.5$. Nach wievielen Schritten ist das Resultat auf 3 Stellen exakt?

(c) Was ist die Bedeutung dieses Verfahrens für die Programmierung der Division auf einem Rechner?

(5)

$$a_n = a_1 + d\,(n-1) = 7 + 3\,(n-1)$$

(a) Berechne eine Formel für die Summenfolge s_n.

(b) Beweise die Formel für s_n mit Hilfe vollständiger Induktion.

(6) Löse:

$$8\,x^2 + 2\,x - 1 \equiv 6\,x - 5 \; mod(10)$$

Viel Glück!

WIR

8.23 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Schaltalgebra, Kombinatorik, Zahlentheorie II/46

Abschrift • *Copie*

(1) Die Kurve der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D_f = [0,\ x_0]$ wird um die x-Achse rotiert. Dabei entsteht das Volumen V_2. Um dieses Volumen wird über dem gleichen Definitionsbereich ein x–achsenparalleler Zylinder gestülpt, welcher das Volumen V_1 besitzt.
Berechne $\frac{V_1}{V_2}$.

(2) Erkläre den Satz von Stone und seine Konsequenzen für die Schaltalgebra.

(3) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x + y + z = 1994$ in $\mathbb{N}$? (1994 = Prüfungsjahr.)

(4) Beweise oder widerlege: $\forall_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 2} : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$.

(5) In einer Klasse mit 20 Studenten sollen Arbeitsgruppen zu je 4 Studenten gebildet werden. Wieviele Arbeitsgruppen sind möglich?

(6) Löse die Gleichung $x^3 = \sin(x)$, $x > 0$, numerich wie folgt: Start mit $x_1 = 0.5$.

(a) Newton.Methode.

(b) Regula falsi, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, falls möglich.

(c) Fixpunktverfahren, falls möglich.

Nach wievielen Schritten hat man jeweils eine Genauigkeit von 4 Stellen hinter dem Komma erreicht?

Viel Glück!

8.24 Test: Grundlagen, Logik, Mengenlehre, Zahlentheorie III/39

Abschrift • *Copie*

(1) Aus einer ehemaligen Aufnahmeprüfung:

(a) Zentrisch zum Ursprung in einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Kreis (Kreislinie) mit Radius R gegeben. Mit Mittelpunkt M_2 auf der negativen x–Achse ist dazu noch ein zweiter Kreis gegeben mit Radius $r = \frac{R}{2}$. Dieser zweite Kreis geht durch den Ursprung. Durch M_2 geht weiter noch eine Gerade g senkrecht zur x–Achse. A ist die Fläche, welche gebildet wird von den Punkten des ersten grösseren Kreises ohne die Punkte links von g und ebenso ohne die Punkte des zweiten Kreises. Berechne den Flächeninhalt von A.

(b) Vereinfache von Hand:

$$((a-b)\ :\ (\frac{1}{a+b})\ :\ (\frac{a+1}{b}-\frac{b+1}{a})\ :\ (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a\cdot b}))$$

(2) $|A| = 99,\ \ |B| = 98,\ \ |C| = 97,\ \ |A{\cap}B| = 30,\ \ |A{\cap}C| = 27,\ \ |B{\cap}C| = 28,\ \ |A{\cap}B{\cap}C| = 26.$

(a) $G = |A \cup B \cup C| = \ ?$

(b) $|(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = \ ?$

(3) Zeige oder widerlege: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(4) (a) Beweise oder widerlege: $\forall_{l \in \mathbb{N}}:\ k \,|\, (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3)$.

(b) Entwickle eine Formel für die maximale Anzahl der Schnittpunkte von n Kreisen und beweise diese Formel.

(5) $a, b \in \mathbb{Z}.\qquad (a \sim b)\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2 \geq a\,b) \leadsto$ Äquivalenzrelation?

(6) Betrachte $(((X\ \Rightarrow\ Z)\ \vee\ (Y\ \Rightarrow\ Z))\ \Rightarrow\ (\neg X\ \wedge\ Y\ \Rightarrow\ Z)) \equiv f(X,Y,Z)$.

(a) Wahrheitstafel von $f(X,Y,Z)$?

(b) A.n.F oder k.n.F. von $f(X,Y,Z)$? (Einfachere Variante geben!)

(7) Erstelle das Hasse–Diagramm der Menge $\{a, b, c, d\}$. In wievielen Teilmengen ist das Element a enthalten?
Kann man damit eine Formel für die verallgemeinerte Situation $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ finden?

(8) Löse folgende Kongruenzgleichungen:

(a) $16 \equiv 22 \cdot x\ (mod\, 30)$

(b) $1 \equiv 18 \cdot x\ (mod\, 53)$

(c) $\left| \begin{array}{rcl} [4]_{12} \cdot [x]_{12} - [y]_{12} & = & [8]_{12} \\ [2]_{12} \cdot [x]_{12} - [y]_{12} & = & [10]_{12} \end{array} \right|$ System! %

(9) $a \;\Rightarrow\; \neg\, b \;\wedge\; c \;\Rightarrow\; a \;\wedge\; b \vdash \neg c \;\rightsquigarrow$ korrekter Schluss?

(10) Vereinfache:

$$D \vee \neg\, D \wedge (A \wedge B \wedge C \vee \neg\, A \vee \neg\, B \vee \neg\, C) \wedge (D \vee D \wedge E) \wedge (D \vee E \wedge F) \vee (A \wedge \neg\, D)$$

Viel Glück!

Kapitel • Chapitre 9

Serien mit „Komplexe Zahlen“

9.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

9.2 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen I/44

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne:

(a) $(2-i)+(-i)^{\frac{1}{2}}\cdot(-i)^{\frac{1}{2}}-i^3$

(b) $\dfrac{(2+i)(1+i)}{(2-i)}$

(2) Stelle graphisch möglichst exakt dar: $\sqrt[7]{2-3\,i}$.

(3) Suche $x\in\mathbb{N}$ minimal, so dass $127\,m+552\,n=x$ ganzzahlige Lösungen $m,\ n$ haben.

(4) Was ist ein Körper in der Algebra und was leistet er?

(5) Untersuche, ob folgendes System eine ganzzahlige Lösung $\{x,y\}$ hat:

$$\left|\begin{array}{lcl} x^2-13\,x+5 & \equiv & 2\,x+y\ mod\ 11 \\ x+y & \equiv & 2\ mod\ 3 \end{array}\right|$$

(6) Sei $p\in\mathbb{P},\ \ k\in\mathbb{N}\cap\{-1,0,1,2,\ldots,p-1\},\ \ a\in\mathbb{Z}$.

(a) Beweise: $p\,|\binom{p}{k}$.

(b) Kann man die eben erwähnte Beziehung sinnvoll mit vollständiger Induktion beweisen?

(c) Zeige: $a^{p-1}\equiv 1\ mod\ p$.

Hinweis: Zeige $a^{p-1}\equiv 1\ mod\ p$ wie folgt:
Entwickle $(\underbrace{1+(1+\ldots+1)}_{a})^p$ und verwende das Resultat der letzten Teilaufgabe.

(7) Berechne mit der in der vorangegangenen Teilaufgabe gefundenen Beziehung das multiplikative Inverse von [8] in $(\mathbb{Z}_{17},+,\cdot)$.

Viel Glück!

WIR

9.3 Test: Komplexe Zahlen und Abbildungen, Funktionen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/47

Abschrift • *Copie*

(1) Die Einzelschritte müssen sichtbar sein:

(a) Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ wird abgebildet in $f(z) = \dfrac{|z|}{\bar{z}}$.
Wo liegt geometrisch das Bild bezüglich z? (Begründung!)

(b) $z_1 = 3 + 4\,i,\ \ z_2 = -2 - 5\,i \ \Rightarrow\ \dfrac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2^2)}{z_1} = ?$

(2) (a) Was ist die Summe aller 5–ten Einheitswurzeln? (Begründung!)

(b) $(\dfrac{(2-3\,i)^2}{(2+3\,i)} + (2+3\,i)^{\frac{1}{6}}) - (2-3\,i) = ?$

(3) $f(x) = 2\,x^3 + 4\,x^2 - 8\,x^{\frac{1}{2}} + 6,\ \ g(x) = e^x\, ln(x^2 + x),\ \ F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

(a) $F'(x) = ?$ (Nach den Regeln ableiten, keine Umformungen!)

(b) Steigungswinkel der Tangente an die Kurve $F(x)$ für $x = 3$ in *rad* $\rightsquigarrow\ \alpha = ?$

(4) $f(x) = e^{\frac{\sinh(x^2)}{(x+1)}},\ \ g(x) = x \cdot ln(\dfrac{e^{(x^2)}}{(x+1)})$.

(a) Berechne die Ableitungen von f und g.

(b) Entscheide, ob $f'(1) > g'(2)$ richtig ist.

Viel Glück!

9.4 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen I/48

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Löse die folgende Restklassengleichung:

$$x \cdot 4 \equiv 8 \; mod \; 30$$

(2) Was sind transzendente Zahlen?
Notiere kurz, was sich dazu sagen lässt!

(3) $\dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 + 5\,x - 6} \leadsto$ Partialbruchzerlegung?

(4) $z = 1{+}i, \;\; b = 2{-}i$. Berechne die folgenden Ausdrücke und zeichne die Resultate zusammen mit z und b in ein Koordinatensystem ein:

(a) $z^3 = \,?$

(b) $z^3 - b = \,?$

(c) $b \cdot (z^3 - b) = \,?$

(d) $\sqrt[5]{b \cdot (z^3 - b)} = \,?$

(e) $b + \sqrt[5]{b \cdot (z^3 - b)} = \,?$

(5) $z_n = r \cdot cis(\varphi_n), \;\; r = 1, \;\; \varphi_n = \dfrac{n\,\pi}{8}, \;\; k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$.

(a) Berechne für die 16 Zahlen z_n die Werte $w = \dfrac{-1}{z - i}$ und zeichne die Resultate in $\mathbb{C}$ ein. (Berechnungsformel angeben!)

(b) Wann gibt es keine Lösung?

Viel Glück!

9.5 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen I/49

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Löse die folgende Restklassengleichung:

$$6 \cdot x \equiv 12 \; mod \; 50$$

(2) Lassen sich die Mächtigkeiten von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ vergleichen?
Notiere kurz, was sich dazu sagen lässt!

(3) $\dfrac{2\,x^3 - 1}{x^2 - x + 6} \rightsquigarrow$ Partialbruchzerlegung?

(4) $z = 1-i, \; b = 2+i$. Berechne die folgenden Ausdrücke und zeichne die Resultate zusammen mit z und b in ein Koordinatensystem ein:

(a) $z^3 = \,?$

(b) $z^3 + b = \,?$

(c) $b \cdot (z^3 + b) = \,?$

(d) $\sqrt[5]{b \cdot (z^3 + b)} = \,?$

(e) $b - \sqrt[5]{b \cdot (z^3 + b)} = \,?$

(5) $z_k = r \cdot cis(\varphi_k), \;\; r = 1, \;\; \varphi_k = \dfrac{k\,\pi}{8}, \;\; k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$.

(a) Berechne für die 16 Zahlen z_k die Werte $w = \dfrac{-1}{z + i}$ und zeichne die Resultate in $\mathbb{C}$ ein. (Berechnungsformel angeben!)

(b) Wann gibt es keine Lösung?

Viel Glück!

9.6 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen I/50

Abschrift • *Copie*

(1) Löse das folgende Restklassengleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{rcl} 14\,x & \equiv & 28\,y+28 \; mod \; 21 \\ 15\,x & \equiv & 20\,y+25 \; mod \; 10 \end{array}\right|$$

(2) Was haben komplexe und transzendente Zahlen gemeinsam?

(3) $\dfrac{x^5+2\,x^4+3\,x^2+3\,x+3}{x^4+2\,x^3+2\,x^2+2\,x+1} \leadsto$ Partialbruchzerlegung?

(4) $w = \dfrac{z}{\bar{z}},\ z \in \mathbb{C}$. Wie liegen z und w in $\mathbb{C}$ geometrisch zueinander?

(5) $w = \dfrac{2}{i\,z-1},\ z = z_n = e^{i\,\varphi_n},\ \varphi_n = \dfrac{n\,\pi}{25},\ n \in \mathbb{Z}$.

$\leadsto$ Was erhält man für die $w = w_n$ geometrisch für eine „Figur “?
$\leadsto$ Skizziere die Lage der w_n in $\mathbb{C}$.

Viel Glück!

9.7 Test: Komplexe Zahlen, Algebra und Zahlentheorie, komplexe Abbildungen I/51

Abschrift • *Copie*

(1) $p_1(x) = x^2 - 5\,x + k$.

(a) Faktorisiere $p_1(x)$ für $k = 6$.
(b) Löse die Gleichung $p_1(x) = 0$ für $k = 6$.
(c) Löse die Ungleichung $p_1(x) \leq 0$ für $k = 6$.
(d) Löse $p_1(x) \leq 0$ und diskutieren das Lösungsverhalten für veränderte k.

(2) Ein Polynom p_2 4–ten Grades hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. x_3 und x_4 sind nicht explizit bekannt. Man weiss aber, dass die Summe aller Nullstellen -4 beträgt und das Produkt aller Nullstellen $+4$. Ausserdem ist $p_2(-1) = 1$.

(a) Wie lautet das Polynom (Näherung der Koeffizienten auf 4 Dezimalstellen genau).
(b) Stimmt die Ungleichung $p_2(-30) < p_2(\frac{3}{2})$? (Begründung!)

(3) $z_1 = 2 + i \cdot \sqrt{3}$.

(a) $\bar{z}_1 =$? (exakt!).
(b) $z_1 - \bar{z}_1 =$? (exakt!).
(c) $z_1 \cdot \bar{z}_1 =$? (exakt!).
(d) $z_1^3 =$? (exakt!).
(e) $z = \sqrt[3]{\bar{z}_1^3} =$?
(f) $z_1 - (\bar{z}_1)^2 =$? (exakt!).
(g) $z = \dfrac{z_1}{\bar{z}_1 - i} =$? (reeller Nenner, exakt!).
(h) $z_1 = r\,cis(\varphi)$, $r =$?, $\varphi =$?
(i) $z_1 = e^{z_2}$, $z_2 =$?

(4) Studiere die Abbildung $z \longmapsto \dfrac{1}{1+z} = w$.

(a) Was ist das Bild der reellen Achse?
(b) Was ist das Bild der imaginären Achse?
(c) Was ist das Bild des Einheitskreises?

(5) Entwickle $\dfrac{p_3(x)}{q(x)} = \dfrac{2\,x^4 - x^3 + 7\,x^2 + 9\,x - 4}{(x-2)^2 \cdot (x+2)}$ in einen Partialbruch!

Viel Glück!

WIR

9.8 Test: Lineare Abbildungen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen, Reihen I/53

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(-1)\,A^{-1}\cdot\vec{x}\,' = (\vec{x}-\vec{b}),\quad A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ y=4\,x-3$$

$\rightsquigarrow$ Bild $\vec{x}\,'$ des Geradenvektors $\vec{x}$? • *Image $\vec{x}\,'$ du vecteur de la droite $\vec{x}$?*

(2) Miovre: $\sin(5\,\varphi)=\cos^5(\varphi)-\ldots=\,?$

(3)

$$f(z)=\frac{2}{z-1}$$

Bild von • *Image de* $\gamma_1: z_1(t)=e^{i\,t}$
Bild von • *Image de* $\gamma_2: z_2(t)=3\,i\,t$

(4) Gesucht: Polynom $f(x)$ mit • *Chercher: Polynôme $f(x)$ avec*

$$f(1)=0,\ \ f(-1)=0,\ \ f(-2)=0,\ \ f\,'(2)=38.$$

(5) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:
• *Démontrer la convergence ou la divergence des séries suivantes:*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{3\,\sin(n\,x)}{n^6}+\frac{1}{n^3})$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{4\,n^3}{2\,n^3+7})^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\,n^2}{4\,n^4+2\,n^2+3}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sin(\frac{1}{n})+1}$

Viel Glück!

9.9 Test: Lineare Abbildungen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen, Reihen I/54

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(-1)\, A^{-1} \cdot \vec{x}\,' = (\vec{x} + \vec{b}), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad y = 2\,x - 5$$

$\leadsto$ Bild $\vec{x}\,'$ des Geradenvektors $\vec{x}$? • *Image $\vec{x}\,'$ du vecteur de la droite $\vec{x}$?*

(2) Miovre: $\sin(5\,\varphi) = \ldots \sin(\varphi) - \ldots = ?$

(3)

$$f(z) = \frac{3}{z+1}$$

Bild von • *Image de* $\gamma_1 : z_1(t) = e^{i\,t}$
Bild von • *Image de* $\gamma_2 : z_2(t) = 2\,i\,t$

(4) Gesucht: Polynom $f(x)$ mit • *Chercher: Polynôme $f(x)$ avec*

$$f(1) = 0, \;\; f(3) = 0, \;\; f(-1) = 0, \;\; f\,'(-2) = \frac{19}{2}.$$

(5) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:
• *Démontrer la convergence ou la divergence des séries suivantes:*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{3\,\cos(-2\,n\,x)}{n^5} + \frac{2}{n^4})$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{5\,n^4}{8 + 4\,n^4})^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4\,n^3}{2\,n^6 + 4\,n^2 - 2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{\frac{1}{n}} + 1}$

Viel Glück!

WIR

9.10 Test: Determinanten und Matrizen, Gleichungssysteme, komplexe Zahlen I/55

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Löse $\dfrac{\sqrt{2}\,(z-i)^5-\sqrt{2}}{1+i}=1-i$ und skizziere die Lösung.

(b) Sei $z=e^{i\,\varphi}=\cos(\varphi)+i\,\sin(\varphi)$.
Leite aus $z^n=e^{i\,n\,\varphi}=\cos(n\,\varphi)+i\,\sin(n\,\varphi)$ eine Formel für $\cos(n\,\varphi)$ ab!

(c) Beschreibe eine geometrische Kosntrunktion für den Punkt $\dfrac{1}{z}$ zu einem beliebigen gegebenen $z\in\mathbb{C}$.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&\alpha&1&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&\beta\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$ Wie hängt $\det(A)$ von α und β ab?
Erkläre das Resultat!

(3)

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&\alpha&1\\0&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(a) Für welches α hat das Gleichungssystem allenfalls keine Lösung?

(b) Wie gross muss α gewählt werden, damit $x=\dfrac{1}{8}$ wird?
Berechne dazu auch y und z!

(4)

$$B=\begin{pmatrix}-1&4\\-4&\lambda\end{pmatrix},\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

(a) Berechne $B^2=B\cdot B$ sowie $B\cdot(B\cdot\vec{u})$.

(b) Sei $B\cdot((2\,B)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$. Berechne λ so, dass die Gleichung richtig ist.

(5)

$$M\cdot X=X\cdot M\quad\text{mit } M=\begin{pmatrix}-1&4\\-4&-2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$$

Löse dieses Gleichungssystem (Unbekannte $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.)
Wähle bei Bedarf $t=\gamma$ als Parameter. Suche dazu $Dim(\mathbb{L})$, den Rang und die Ordnung.

Viel Glück!

WIR

9.11 Test: Lineare Abbildungen, Reihen, Potenzreihen, komplexe Zahlen I/57

Abschrift • *Copie*

(1) Kreis: • *Cercle:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ (y-3)^2 + (x+1)^2 = 2 \ \Rightarrow \ y = \pm\sqrt{\ldots - (x+1)^2} + \ldots = \ldots$

Bild $\vec{x}\,'$ des Kreises? • *Image $\vec{x}\,'$ du cercle?*

$$A^{-1} \cdot \vec{x}\,' = A \cdot (\vec{x} + \vec{b}), \ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$f(z) = \frac{\bar{z} \cdot 2 \cdot z}{|z|^2 \cdot (z - i)}$$

(a) Bild von • *Image de* $z(t) = e^{i\,t}$?

(b) Bild von • *Image de* $z(t) = 2\,i$?

(3) (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n^3 + n^4}{n^5 + n^6 + n^7} \cdot x^n \rightsquigarrow$ Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\,n^2\,(x-4)^n}{n^4} \rightsquigarrow$ Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos(\frac{1}{n}) - 1} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{n + \frac{1}{2}} + \frac{(n \cdot x)^n}{n!} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\cos(x)}{(2\,n+1)(2\,n-1)} + (\frac{1}{4})^n) \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

Berechne im Falle der Konvergenz den Grenzwert.
• *Calculer la valeur limite dans le cas de la convergence.*

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{3})^3 \rightsquigarrow$ „Vernünftige Näherung". • *"Approximation raisonable".*

Viel Glück!

9.12 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen II/12

Abschrift • *Copie*

(1) Die Graphen der Funktionen $f_1(x) = x^2 + 2\,x - 18$ und $f_2(x) = -x^2 - x - 1$ schliessen zwischen ihren Schnittpunkten eine Fläche ein. Berechne den Flächeninhalt.
Hinweis: Fertige dazu erst eine Skizze an!

(2)

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \sin(x-\pi) & x \in [-2\,\pi, \pi) \\ e^{\pi \cdot x} & x \in [\pi, 2\,\pi) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x \in [2\,\pi, 4\,\pi] \end{cases} \qquad\qquad \int\limits_{-2\,\pi}^{3\,\pi} f(x)\,dx = \,?$$

(3) Berechne von Hand:

$$\int\limits_{-4}^{0} \frac{(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+2)}{(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-2)}\,dx = \,?$$

(4)

$$\int [(\sin(x)\cdot e^x - x\cdot \sin(x^2) + \cos(x)\cdot e^x - \frac{\ln(x)}{x}]\,dx = \,?$$

(5) Berechne die Summe aller Lösungen von $z^6 = e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$.

(6) Berechne und skizziere die Lösungen von $(i + \dfrac{1}{z})^4 = i$.

Viel Glück!

9.13 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen, komplexe Zahlen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/21

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left|\begin{array}{lcr} 2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & 4 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 & = & 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4\,x_4 + 2\,x_5 & = & 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 + 2\,x_5 & = & -2 \end{array}\right|$$

(a) Gesucht ist der Lösungsraum mit Hilfe von Gauss–Jordan.
(Die Schritte müssen sichtbar sein.)

(b) Wie gross ist der Rang des Systems?

(2) Gegeben: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{D}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 \\ x \\ 3 \end{pmatrix}$. Dabei ist D eine Drehung um die z–Achse. $\leadsto$ Berechne x.

(3) Berechne die Summe aller verschiedenen 437–ten Einheitswurzeln!
(Die Rechnung bzw. die Begründung wird bewertet!)

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $B \cdot A = ?$

(b) $(A \cdot B - 2\,E)\,\vec{u} = \vec{v} = ?$

(c) Berechne $\vec{x}$ mit $\vec{v} \times \vec{x} = \vec{u}$ und $\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = 5$

(5)

$$\int \frac{5\,x + 12}{\sqrt{-x^2 - 7\,x}}\,dx = ?$$

(6) Beweise: $\quad \forall_{n \in \mathbb{N}} : \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = +\dfrac{n}{n+1}$

Viel Glück!

WIR

9.14 Test: Komplexe Zahlen u. Funktionen, Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen II/44

Abschrift • *Copie*

(1) Komplexe Zahlen und Funktionen

(a) Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y),\;\; z = x + i\,y$. Sei weiter $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.
Berechne formal $\triangle f$. *Hinweis: Cauchy–Riemann.*

(b) Berechne exakt $(-i)^{1-i}$.

(c) Löse vollständig und exakt $\sin(\pi \cdot t + i \cdot t) = 0,\;\; t \in \mathbb{R}$.

(d) Skizziere alle Lösungen von $(z+2)^3 = 1 + i$.

(e) Sei $f(z) = \dfrac{a\,z+b}{c\,z+d} = w,\;\; a,b,c,d \in \mathbb{C}$ (Möbiustransformation). Sei weiter
$f:\; -1 \longmapsto 1,\;\; f:\; 1 \longmapsto -1,\;\; f:\; -i \longmapsto 0.$ $\rightsquigarrow$ Bestimme f.

(f) Untersuche, ob $f(z) = \dfrac{z}{|z|^2}$ holomorph ist!

(2) Gleichungssysteme,Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen

(a)
$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Berechne von Hand $M^{-1} = \,?$ (Rechnung kommentieren!)

ii. Für welche α existiert M^{-1} nicht?

(b) $A \cdot X = A^T \cdot B^2,\;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix},\;\; \gamma \neq 0.\;\; \rightsquigarrow\;\; X = \,?$

(c)
$$\left|\begin{array}{lcr} 2\,x + 4\,y + 6\,z & = & 12 \\ 3\,x + 3\,y - 2\,z & = & -9 \\ x + 3\,y + 7\,z & = & 16 \end{array}\right|$$

Löse das Gleichungssystem.
(Zeige dabei das Gauss–Verfahren.)

(d)
$$\left|\begin{array}{lcr} 2\,x + 4\,y + 6\,z & = & 12 \\ x + 3\,y - 2\,z & = & 16 \\ x + y + 8\,z & = & 0 \end{array}\right|$$

Was ist die Dimension des Lösungsraumes $\mathbb{L}$?

(e) $\mathcal{A} : \vec{x} \longmapsto \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \vec{x} \rightsquigarrow$ Suche eine mögliche Matrix A mit $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{v} = A \cdot \vec{x}$

(f) Eine lineare Abbildung stiftet die Zuordnungen $0 \longmapsto 0$,
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Berechne eine mögliche Matrix, die das Gewünschte leistet und bestimme damit das Bild von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Viel Glück!

WIR

9.15 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, komplexe Zahlen III/41

Abschrift • *Copie*

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von A.

(b) Berechne die Spur von A.

(c) Berechne die Eigenwerte von A.

(d) Berechne die Eigenvektoren von A.

(e) Berechne, falls vorhanden, die Hauptvektoren $\vec{y}$ von A.
Hinweis: Eigenvektoren $\rightsquigarrow$ $A \cdot \vec{x} = \lambda\, \vec{x}$ oder $(A - \lambda E)\, \vec{y} = \vec{0}$.
Hauptvektoren $\rightsquigarrow$ $(A - \lambda E)^2\, \vec{x} = \vec{0}$.

(2)

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Determinante von A.

(b) Kann α so gewählt werden, dass $\mathbb{L} = \{\}$ ist? — ($\alpha = ?$)

(c) Wie gross ist z für $x = \dfrac{1}{8}$? (Falls lösbar.)

(3)

$$\frac{\sqrt{2}\,(z-i)^5 - \sqrt{2}}{1+i} = 1 - i$$

Leite die Lösungen her und skizziere die Lösungsmenge!

(4)

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untersuche die Abhängigkeit der Eigenwerte von k !

(5)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = X \cdot D \cdot X^{-1} \quad \text{(Diagonalisierung)}$$

(a) Berechne D und $X = (\vec{x_1} x_2)$, $\vec{x_1}$ und $\vec{x_2}$ normiert.

(b) Berechne A^{100}.

(c) Berechne $A \cdot \vec{y}(t)$, $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 10

Lösungen — Solutions

10.1 Momentane Sachlage — — Situation actuelle

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur noch in Papierform vorhanden (*Mathematica*–Output und Handschriften). An eine gesamthafte oder teilweise Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier output de Mathematica et manuscrits. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale ou bien partielle.*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Fremdarbeit?

Ende • *Fin*