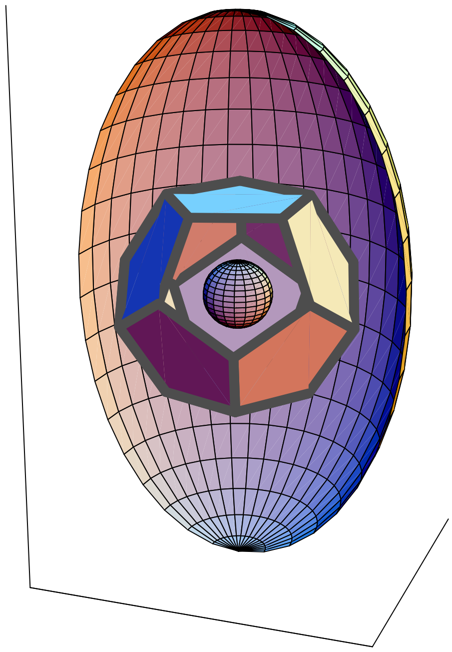
◇ Tests ◇ *Tests* ◇

◇ Analysis 2 ◇ *Analyse* 2 ◇

◇ Diplom ◇ 1989 – 2000 ◇ *Diplôme* ◇



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2000

Ausgabe vom 14. September 2007, Version 1.0.0 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lines cliquables*

WIR1 /2007/LaTex/BuchTestsAnalysis2000Dipl_2.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

• *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

• *L'homme a trois occasions pour apprendre:*
Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W."
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

Kapitel • Chapitre 1

Einführung — Introduction

1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den Jahren vor 2000 verwendet worden sind.
• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les années avant 2000.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur in Papierform vorhanden. An eine gesamthafte Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale.*

1.2 Gliederung — Disposition

Bemerkung: • Remarque: Da nur noch wenige Sérien auch in französischer Übersetzung vorliegen, wird im weiteren Text aus Kapazitätsgründen auf Übersetzungen verzichtet.

Gliederung des Teils „Analysis“

(1) Funktionen im $\mathbb{R}^1$ und im $\mathbb{R}^n$

(2) Folgen und Grenzwerte

(3) Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$

(4) Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$

(5) Reihen

(6) Potenzreihen im $\mathbb{R}^1$

(7) Nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen

(8) Numerik

(9) Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

(10) Fehlerrechnung

(11) Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

(12) Differentialgeometrie, Analysis im $\mathbb{R}^n$

Kapitel • Chapitre 2

Serien mit „Funktionen im $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^n$“

2.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\rightsquigarrow$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 3

Serien mit „Folgen, Grenzwerte“

3.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\rightsquigarrow$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 4

Serien mit „Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$“

4.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\leadsto$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 5

Serien mit „Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$“

5.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\leadsto$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 6

Serien mit „Reihen“

6.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\rightsquigarrow$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 7

Serien mit „Potenzreihen im $\mathbb{R}^1$"

7.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\leadsto$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 8

Serien mit „Nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen“

8.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\rightsquigarrow$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 9

Numerik

9.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\rightsquigarrow$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 10

Serien mit „Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$“

10.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

10.2 Test: Vektorgeometrie, Gleichungssysteme, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/31

Abschrift • *Copie*

(1) $\left| \begin{array}{rcl} 4\,x-2\,y+3\,z & = & 2 \\ 4\,x-2\,y-2\,z & = & 1 \end{array} \right|$ Was ist der Abstand der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $(0;0;0)$?

(2) $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\; \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Die folgenden Rechnungen sind von Hand auszuführen (der Weg wird bewertet):

(a) Berechne $M \cdot (B \cdot \vec{a})$.

(b) $M \cdot (B \cdot \vec{x}) = \vec{a} \;\rightsquigarrow\; \vec{x} = ?$ (Falls lösbar.)

(c) Berechne $\det(M \cdot B)$.

(d) Berechne $\det(M \cdot B^{-1})$. (Falls lösbar.)

(e) Berechne die Eigenwerte von $(M \cdot B)$.

(f) Berechne die Eigenvektoren von $(M \cdot B)$ (numerisch).

(3)

$$f(x) = 3\,x^4\,y^3 + 2\,x^2\,y^4.$$

Untersuche f auf Minima, Maxima und Sattelpunkte!
(Kreativ!)

(4) Gegeben: $f(a,b) = a^2 + b^2,\; a = \dfrac{2}{x^2+y^2},\; b = 2\,x + y,\; r = \sqrt{x^2+y^2}.$

Bilde damit $F(x,y) := f(a(x,y), b(x,y))$

(a) Berechne $\dfrac{\partial F}{\partial r}$.

(b) Berechne das totale Differential $d(a(x,y) \cdot b(x,y))$ von $(a(x,y) \cdot b(x,y)$.

(5) Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius R und auf der Kreislinie verteilt vier Punkte, welche die Ecken eines konvexen Vierecks bilden. Bestimme die Viereckwinkel so, dass der Viereckumfang maximal wird!

Viel Glück!

WIR

10.3 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Reihen, Potenzreihen II/45

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

i. Entscheide die Konvergenz (mit Begründung)!

ii. Berechne, falls möglich, S explizit. *(Hinweis:* $\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \ldots$*)*

(b) Jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks F_1 mit der Seitenlänge 1 wird in 3 gleich lange Teile geteilt. Jeweils über dem mittleren Teil wird wieder ein gleichseitiges Dreieck errichtet und die Berührungskannte zwischen altem und neuem Dreieck anschliessend weggelassen. Zu den 3 ursprünglich gegebenen Strecken kommen so 3 mal $(3-1) = 2$ neue hinzu. Dadurch entsteht eine Figur F_2. In der nun vorhandenen Situation verfahren wir wieder gleich: Jede der vorhandenen Seiten wird dreigeteilt, neue Dreiecke werden errichtet und die gemeinsamen Kanten weggelassen. Damit gelangen wir zu F_3. Dieses Verfahren wird nun wiederholt „in alle Ewigkeit“ (Iteration). Es entsteht somit eine Folge von Figuren $[F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n \ldots]$. Berechne allgemein den Umfang U_n der Figur F_n und damit den Grenzwert $U = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

(2) Potenzreihen:

(a) Bestimme das Taylorpolynom (Näherungspolynom) für $f(x) = e^x \cdot \sqrt{1+x^3}$ vom Grad 7 zum Zentrum $x_0 = 0$ ($\rightsquigarrow$ $p_7(x)$). Vergleiche anschliessend $p_7(0.1)$ mit $f(0.1)$ numerisch.

(b) Bestimme aus der Potenzreihe für $g(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$ (Tabelle!) diejenige von $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin(a\,t)}{t}\,dt$ und berechne den Konvergenzradius der entstehenden Reihe.

(3) Differentialrechnung mit mehreren Variablen:

(a) Gegeben ist $w = \varphi(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-1}{r}$.

i. Berechne $grad(\varphi)$ für $r \neq 0$.

ii. Beschreibe die Niveauflächen sowie $|grad(\varphi)|$ für $r = 1$.

iii. Sei $f(x,y) = \varphi(x,y,0)$. Berechne für $P_0(1;0)$ die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(b) Gegeben ist $f(x,y) = \frac{1}{2}\,x^2 - 4\,x\,y + 9\,y^2 + 3\,x - 14\,x + \frac{1}{2}$.

Berechne die Lage allfälliger Extrema!

Viel Glück!

WIR

10.4 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, nichtlineare Gleichungen, Fehlerrechnung II/56

Abschrift • *Copie*

(1) Löse die Gleichung $e^{-x} + 4 - \frac{1}{2} \cdot x = 0$ numerisch auf 6 Stellen genau wenn möglich mit der Fixpunktmethode. Start: $x_1 = 1$.

(2) Gegeben sind die Messpunkte auf einem hypothetischen Funktionsgraphen:

$$(1.00/2.83), (2.00/3.21), (3.50/1.96/), (4.00/2.42), (5.00/1.06), (6.50/4.25)$$

(a) Approximiere die Funktion durch ein Polynom.
(b) Berechne damit das Integral zwischen 2.00 und 6.00.
(c) Berechne die Steigung des Graphen bei $x = 1.5$.
(d) Was müsste man wissen, um die Genauigkeit der Approximation zu beurteilen?

(3) Bestimme die Extremwertstellen der folgenden Funktion und beurteile, um welche Art Extremum es sich jeweils handelt:

$$f(x, y, z) = x, y + 2\,x^2 + y^2 + x + 1$$

(4) Berechne das totale Differential der folgenden Funktion:

$$f(x, y, z) = \cos(x\,y) + y\,e^x - 3\,ln(y - z) + z$$

(5) Suche eine einfache Annäherung von $f(x) = (1 + x)^n,\ x << 1$ und berechne damit $(1.000'000'000'041)^{163}$.

(6) Gegeben: $\Phi(x, y, z, w) = a\,\cos(x\,y) \cdot (1 - \sin(x)) + \frac{y\,z^2}{w} - b\,\frac{y^2}{w^2}$. Folgende Werte sind bekannt:

$x = 0.8652 \pm 0.0020$	$a = 2$
$y = 3.000 \pm 0.001$	$b = 3$
$z = 0.469 \pm 0.004$	
$w = 1.002 \pm 0.001$	Berechne den Funktionswert mit dem absoluten Messfehler!

Viel Glück!

WIR

10.5 Test: Lineare Abbildungen und Matrizen, Differentialgeometrie und Kurven, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gleichungssysteme II/57

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • **Important:**

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

(1) $x^2\,(2-y) = y^2\,(2+y) \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(2) $x^2 - 2\,x\,y + x^2 - y^3 = \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(3) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 5\,t\cdot\cos(t)+\cos(10\,t) \\ 5\,t\cdot\sin(t)+\sin(10\,t) \\ t \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Tangente, Normalebene für $t = \dfrac{\pi}{2}$!
• *Tangente, plan normal pour* $t = \dfrac{\pi}{2}$*!*

(4)

$$\begin{array}{rcl} w + x - y + 2\,z + 2 & = & 0 \\ 2\,y - 2\,x - 2\,w - 4\,z - 4 & = & 0 \end{array}$$

Lösungsmenge • *Ensemble des solutions*
$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = ?$

(5) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Lineare Abbildung • *Application linéaire* $\begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix} \longmapsto ?$

(6) $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x} + \vec{b},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Bild der Geraden • *Image de la droite* $y = 4\,x + 1$?

%

(7) Geg.: • **Donné:** $KS(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}) \overset{f_1}{\longmapsto} \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\} \overset{f_2}{\longmapsto} \{\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}''\} \overset{f_3}{\longmapsto} \{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$

KS = Koordinatensystem • KS = *système de coordonnées*

f_1 = Verschiebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ • f_1 = *déplacement de* $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

f_2 = Drehung um $\alpha = +\frac{\pi}{2}$ • f_1 = *rotation avec* $\alpha = +\frac{\pi}{2}$

$f_3 \rightsquigarrow \vec{e}_1{}'' \longmapsto \vec{e}_1{}''' = -\vec{e}_1{}''$

<u>Fragen:</u> • <u>*Problèmes:*</u>

a) $P = (4; 5) \longmapsto\ ?$

Im neuen System $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$?
• *Dans le nouveau système* $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$*?*

b) $\{(x, y) \mid y = \frac{1}{2}\,x+3\} \longmapsto\ ?$

Viel Glück!

10.6 Test: Lineare Abbildungen und Matrizen, Differentialgeometrie und Kurven, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gleichungssysteme II/58

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

(1) $4\,x^2\,(2+y) = y^2\,(2-y) \rightsquigarrow$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(2) $x^3 + 2\,x\,y - x^2 - y^2 = \rightsquigarrow$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(3) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 10\,t\cdot\sin(t) - \cos(10\,t) \\ 10\,t\cdot\cos(t) + \sin(10\,t) \\ t \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ Tangente, Normalebene für $t = \pi$!
• *Tangente, plan normal pour $t = \pi$!*

(4)

$$\begin{aligned} w + x + 4\,y - z + 4 &= 0 \\ 4\,z - 4\,x + 4\,w - 16\,y - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsmenge • *Ensemble des solutions*
$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = ?$

(5) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Lineare Abbildung • *Application linéaire* $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix} \longmapsto ?$

(6) $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x} + \vec{b},\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Bild der Geraden • *Image de la droite $y = 3\,x - 1$?*

%

(7) Geg.: • **Donné:** $KS(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}) \stackrel{f_1}{\longmapsto} \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\} \stackrel{f_2}{\longmapsto} \{\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}''\} \stackrel{f_3}{\longmapsto} \{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$

KS = Koordinatensystem • KS = *système de coordonnées*

f_1 = Verschiebung um $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ • f_1 = *déplacement de* $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f_2 = Drehung um $\alpha = +\dfrac{3\,\pi}{2}$ • f_1 = *rotation avec* $\alpha = +\dfrac{3\,\pi}{2}$

$f_3 \rightsquigarrow \ \vec{e}_2{}'' \longmapsto \vec{e}_2{}''' = -\vec{e}_2{}''$

<u>Fragen:</u> • <u>*Problèmes:*</u>

a) $P = (5; 2) \longmapsto \,?$ Im neuen System $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$?
• *Dans le nouveau système* $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$*?*

b) $\{(x, y) \mid y = 2\,x+1\} \longmapsto \,?$

Viel Glück!

10.7 Test: Differential und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Differentialgleichungen II/60

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $y' = e^{-(x+y)} + \sin(x) + \cos(y), \ (x, y) \in D = [0, \ 2\pi] \times [0, \ 2\pi] \rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(b) $y' = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{y^2}{x^3} \rightsquigarrow$ Vollständige Lösung?

(2) Körper $K = K(OP_1P_2P_3), \ P_1 = (1; 0; 0), \ P_2 = (; 3; 0), \ P_3 = (0; 0; 2)$. (Skizze!) Berechne den Abstand des Schwerpunktes von K von der (y, z)–Ebene!

(3) Gegeben ist eine zum Ursprung zentrische Hohlkugel H mit dem inneren Radius 1 und dem äusseren Radius 2. (Skizze!) Berechne folgendes Integral:

$$\iiint_H \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dV = \, ?$$

(4) A ist die Oberfläche einer Halbkugel K_H, welche ihr Kugelzentrum im Ursprung hat und deren Punkte keine negativen z–Koordinaten besitzen. Zudem ist $f(P) = \vartheta, \ \vartheta =$ Winkel zwischen dem Radius durch P und der z–Achse. (Skizze!) Berechne:

$$\iint_{K_H} f\, dA$$

(5) Auf der (x, y)–Ebene senkrecht steht ein Zylinder Z, dessen Achse die z–Achse ist. Z hat die Höhe 25 und den Radius 10. Eine Schnittebene Φ steht senkrecht auf der (y, z)–Ebene und geht durch die Punkte $P_1(0, -10, 0)$ und $P_2(0, 10, 25)$. Φ schneidet die obere Hälfte des Zylinders weg. Das verbleibende Volumen heisst Z_1.
Eine durch die z–Achse gehende Ebene Ψ_1 bildet mit der x–Achse den Winkel $+45^o$ und eine weitere durch die z–Achse gehende Ebene Ψ_2 bildet mit der x–Achse den Winkel $+90^o$ (Skizze!) Ψ_1 und Ψ_2 schliessen demnach einen Winkel von 45^o ein und schneiden in diesem Winkel ein kuchenstückartiges Volumen aus Z_1 aus. Dadurch entsteht der Körper Z_2. A sei die von Z an Z_2 verbleibende gerundeten äussere Mantelfläche mit dem Radius 10!
Weiter ist $f(x, y, z) = y \cdot z$. Berechne:

$$\iint_A f\, dA$$

Viel Glück!

WIR

10.8 Test: Equations différentielles, analyse vectorielle II/61

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,x \cdot \cos(y)\,dx \right) dy = \,?$$

(b) f est harmonique $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{d^2\,f}{d\,y^2} \;:=\; \triangle f = 0.$
Est–ce que $f(x,y) = e^{-x}\,\cos(x)$ est harmonique?

(c)

$$f(x,y,z) = \sin(x,y,z),\;\; \frac{\partial}{\partial x} \triangle f = \,? \qquad (\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

(d)

$$w(x,y,z) = x^2\,e^{y\,z} + y\ln(z) \;\Rightarrow\; dw = \,?$$

(2) (a) Donné: Cylindre $Z(R,h)$, $r =$ rayon, $h =$ hauteur.

$$r = 20\,mm \pm 0.02\,mm,\;\; h = 40\,mm \pm 0.02\,mm$$

Estimer l'erreur max. du volume V par la différentielle!

(b)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4 \;\Rightarrow\; \frac{d\,y}{d\,x} = \,?$$

(c)

$$f(x,y) = x^2 \cdot \ln(y),\;\; P(5;1) = P_0,\;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Derivée directionnelle de f au point P_0 en direction de $\vec{v}$?

(3) (a) $f(x,y) = (x^2 + 3\,y^2)\,e^{-(x^2+y^2}$. Chercher les minimums et les maximums!
(b) $f(x,y,z) = 4\,x^2 + y^2 + z^2$. Trouver les extrémums de f sous la contrainte $x + 2\,y - z = 1$!

(4) Chercher la solution:

(a)

$$y\,' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(b)

$$y\,' + 2\,y = 3\,x,\;\; y(1) = 1$$

(c)

$$y\,'' + 2\,y\,' + y = 3\,e^{-x}$$

(d)

$$y\,'' + 4\,y\,' + 5\,y = 0$$

%

(5)

$$y' = \sin(x + 2\,y), \;\; x, y \in [2,\; 2]$$

(a) Champ de direction?

(b) Solution sous la contrainte $y(0) = 0$? (Esquisse!)

Bonne chance!

WIR

10.9 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/63

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Berechne $\int\limits_{-1}^{2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$. *(Hinweis: Potenzreihe!)*

(2) Gegeben: Eckpunkte $O(0;0;0)$, $P_1(2;0;0)$, $P_2(0;2;0)$, $P_3(0;0;2)$ einer Pyramide H.
Berechne $\int\limits_{V=H} x^2+x^2+z^2\,dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K=K_r(O)$, $O(0;0;0)$, $r=4$. Berechne $\int\limits_{V=K} x^2+x^2+z^2\,dV$.

(4) Gegeben: $z=f(x,y)=4x^2-y^2\geq 0$. $\rightsquigarrow$ f bestimmt ein Volumen V zwischen der Grundebene und der Funktionsfläche mit nicht negativem z. Berechne den Inhalt von V.

(5) Berechne die allfälligen Extrema von $f(x,y,z)=x^2\cdot\sin(x+y)+y+\cos(z)$.

(6) Gegeben: $f(s,\alpha,\beta,\gamma)=\frac{s\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)}{\cos(\gamma)}+\frac{\sqrt{s^2-2}\cdot\cos(\gamma)}{\sin(\alpha)}$.
Dazu sind folgende Messwerte bekannt:

$$s = 40.07\pm 0.01 \qquad \beta = 44.15^o\pm 0.02^o$$
$$\alpha = 20.02^o\pm 0.02^o \qquad \gamma = 30.00^o\pm 0.02^o$$

$$f(x,\alpha,\beta,\gamma)=\,?\,\pm\,?$$

Viel Glück!

10.10 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/64

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Das im 2. Quadranten liegende achsenparallele Gebiet G wird bestimmt durch den Ursprung sowie die Punkte $(-0.1; 0)$ und $(0; 2)$. Berechne $\int\limits_G \frac{\arctan(x)}{x}\, dG$.

(2) Ein in achsenparalleler Lage sich befindlicher Keil H ist gegeben durch die Eckpunkte $O(0; 0; 0)$, $P_1(1; 0; 0)$, $P_2(1; 1; 0)$, $P_3(0; 1; 0)$, $P_4(0; 1; 1)$ und $P_5(0; 0; 1)$. (Skizze!) Berechne $\int\limits_{V=H} x + y + z\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_r(O)$, $O(0; 0; 0)$, $r = 1$. Berechne $\int\limits_{V=K} \frac{e^{-(x^2+x^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+x^2+z^2}}\, dV$.

Hinweis: Kugelkoordinaten verwenden! $\leadsto$ $dx\, dy\, dz = D \cdot dr\, d\varphi\, d\alpha$, $D = r^w \cdot \sin(\alpha)$. *$\alpha$ ist der Winkel ab der positiven z–Achse, φ der jenige ab der positiven x–Achse.*

(4) Gegeben: $f(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \frac{(-1)}{y^2 - 1}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-0.6, 0.6]$.

(a) Extrema?

(b) $x = 0.114 \pm 0.001$, $y = 0.521 \pm 0.002 \Rightarrow f(x, y) = ? \pm ?$

Viel Glück!

10.11 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/65

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Das im 1. Quadranten liegende achsenparallele Gebiet G wird bestimmt durch den Ursprung sowie die Punkte $(0; 0.1)$ und $(0; 3)$. Berechne $\int\limits_G \frac{\tan(x)}{x}\, dG$.

(2) Ein in achsenparalleler Lage sich befindlicher Keil H ist gegeben durch die Eckpunkte $O(0; 0; 0)$, $P_1(1; 0; 0)$, $P_2(1; 1; 0)$, $P_3(0; 1; 0)$, $P_4(0; 1; 1)$ und $P_5(0; 0; 1)$. (Skizze!) Berechne $\int\limits_{V=H} x - y + z\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_r(O)$, $O(0; 0; 0)$, $r = 1$. Berechne $\int\limits_{V=K} \frac{-e^{(x^2+x^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+x^2+z^2}}\, dV$.

Hinweis: Kugelkoordinaten verwenden! $\rightsquigarrow$ $dx\,dy\,dz = D \cdot dr\,d\varphi\,d\alpha$, $D = r^w \cdot \sin(\alpha)$. *$\alpha$ ist der Winkel ab der positiven z–Achse, φ der jenige ab der positiven x–Achse.*

(4) Gegeben: $f(x, y) = -\sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \frac{(1)}{y^2 - 2}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-0.6,\ 0.6]$.

(a) Extrema?

(b) $x = 0.114 \pm 0.002$, $y = 0.512 \pm 0.001 \Rightarrow f(x, y) = ? \pm ?$

Viel Glück!

10.12 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/67

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $\displaystyle \frac{d}{d\,x}\int\limits_0^{x^3+1} \sin(x\cdot t+1)\,dt = \;?$

(b) $\displaystyle \frac{d}{d\,t}\int\limits_0^{t} g(\sin(x))\cdot sin(k\cdot t+1)\,dx = \;?$ (g analytisch)

(2) $K = K_{R_1,R_2}(O) =$ Hohlkugel um O mit Innenradius R_1 und Aussenradius R_2. Berechne:

$$\int\limits_{V=K} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \;?$$

(3) Das dreieckige Gebiet G ist definiert durch die Eckpunkte $P_1(1;0)$, $P_2(1;1)$, $P_3(0;1)$. Berechne:

$$\iint\limits_G \frac{y^2}{x^2}\,dG = \;?$$

(4) Ein Papierband der Breite $2\,R$ ist mit seiner Mittellinie der Länge nach an die y–Achse geklebt und um diese Achse über seine Länge gleichmässig um den Winkel π vergreht. Die Länge der Mittelline misst $\frac{k\,\pi}{2}$, $k\in\mathbb{N}$. Das Band ist somit skizzierbar mit $y\in[-\frac{k\,\pi}{4},\ \frac{k\,\pi}{4}]$.

(a) Skizziere das Band!

(b) Untersuche, ob die Parametrisierung

$$\vec{v} = \vec{v}(t,r) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(t) \\ k\cdot t \\ r\cdot\sin(t)\end{pmatrix},\quad t\in[-\frac{k\,\pi}{4},\ \frac{k\,\pi}{4}],\ \ r\in[-R,\ R]$$

das Band richtig beschreibt. (Falls dies nicht der Fall ist, so ist die notwendige Korrektur anzugeben.)

(c) Berechne die einseitige Oberfläche des Bandes und vergleiche die erhaltene Grösse mit der Grösse eines Rechteckstreifens der Länge $\frac{k\,\pi}{2}$ und der Breite $2\,R$.

(d) Berechne die Kurvenlänge einer äusseren Längskante. Was ist bezüglich Herstellung des Papierstreifens zu bemerken, wenn man das Resultat mit der Länge der Mittellinie vergleicht?

Viel Glück!

WIR

10.13 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung, Eigenwerttheorie mit Matrizen III/04

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f_1(x) = x^2 + x + 3\,x\,y - y^3$$

Berechne mögliche Extremwertstellen, Sattelpunkte u.s.w. und versuche, eine 3D–Skizze der Fläche zu entwerfen.

(2)

$$W = \frac{1}{2}\,R\,S^2\,(R-S) + q\,\frac{R+S}{R-S}$$

Berechne W mit samt dem Fehler von W, wenn folgnde Werte gemessen werden:

$$R = 46.245 \pm 0.035\,n, \;\; S = 45.015 \pm 0.015\,n$$

Debei ist bekannt: $q = 1.32915 \pm 0.00002\,n^2$

(3)

$$f_3(x, y, g(z)) = e^{x+y}\,\sin(\cdot y \cdot g(z)), \;\; g(z) = \sin^2(z) + z^3 - z^2 + z$$

Berechne das totale Differential von f_3!

(4) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Es wird vermutet, dass ein Eigenwert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 6$ sein könnte. Berechne die allfälligen Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

Viel Glück!

WIR

10.14 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen, Diff'rechn. im $\mathbb{R}^n$, Vektorgeom. III/14

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left|\begin{array}{lcl} y'' - g\,y' + 8\,y & = & 4\,\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\,\pi) \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right|$$

Beschreibe die Lösung!

Was passiert?

(2) Gegeben ist die Ebene $\Phi:\ x - 2\,y + 4\,z - 3 = 0$. Eine Gerade g' liegt in der (x, y)–Ebene H_1 und geht durch den Ursprung. Sie schliesst mit der x–Achse den Winkel $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$ ein.

(a) Wie gross ist die Steigung in (z–Richtung bezüglich H_1) der Geraden $g \subset \Phi$, deren Projektion in H_1 die Gerade g' ist? (Skizze!)

(b) Wie gross ist die Steigung in (z–Richtung bezüglich H_1) der Geraden g, welche über dem Punkte $(1; 2) \in H_1$ Tangente ist an die Fläche $x^2 - 2\,y^2 + 4\,z - 3 = 0$? (Skizze!)

(3)

$$f(x, y) = 2\,x^2 + 3\,x\,y - 2\,y^2 + 3 - 3\,y + 4$$

(a) Extrema?

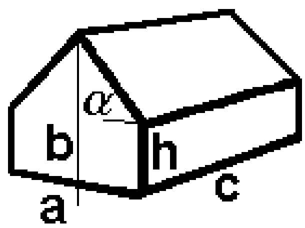
(b) Berechne die Tangentialebene in $P(x; y; f(x, y)) = (2; 3; f(2; 3))$.

(c) Liegt $(3; 2; 5)$ in der Tangentialebene?

(4) Löse: Haus mit symmetrischem Satteldach:

$V = 500\ m^3,\ \ \alpha = 45^o$

Bestimme a, b, c, h so, dass die Oberfläche minimal ist!



(a) Für den Fall $a = c$.

(b) Für den Fall, dass keine Bedingung gestellt ist.

Viel Glück!

WIR

10.15 Test: Differentialgleichungen, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ III/19

Abschrift • *Copie*

(1) Skizziere das Richtungsfeld:

(a)

$$y\,' = x + y$$

(b)

$$y\,' = x^2 + y^2$$

(2)

$$\int\limits_{K_{r=2}(Origo)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dV = \,?$$

Hinweis: Kugelkoordinaten: $D = -r^2 \sin(\alpha)$, $\alpha =$ *Winkel zur* z*–Achse.*

(3) Ein keilförmiger Körper ist begrenzt durch $P_1(0;0;0)$, $P_2(x_0,0,0)$, $P_3(x_0,y_0,0)$, $P_4(0,y_0,0)$, $P_5(0,0,z_0)$, $P_6(x_0,0,z_0)$. (Die Kante von P_4 nach P_5 wird gegeben durch $z = z_0 - y$.) Weiter gilt:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + z \cdot \sin(y), \quad F(x_0,x_0,z_0) = \int\limits_V f(x,y,h)\, dV$$

Suche die Extremalstellen von $F(x_0,x_0,z_0)$.

(4)

$$\begin{aligned} y\,' &= (\cos(x) \cdot \sinh(x)) \cdot y \\ y(1) &= 4 \end{aligned}$$

Löse die Differentialgleichungen und skizziere den Graphen.

Viel Glück!

WIR

10.16 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis, Fourieranalysis III/28

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben: $\vec{F}(x,y,z)) \begin{pmatrix} -4\,y+4\,z \\ -x\,y+6\,y-8\,z \\ 4\,x-8\,y+6\,z \end{pmatrix}$, Streckenzug $\gamma:\ \overline{P_0P_1P_2P_3P_4P_5}$ mit $P_0(2;3;1)$, $P_a(1;3;1)$, $P_2(1;5;1)$, $P_3(1;3;1)$, $P_4(1;5;1)$, $P_5(1;5;3)$.

$$\int\limits_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle = \,?$$

(2) (a) In der (x,y)–Ebene ist eine Kurve γ gegeben, welche ein Gebiet G umschliesst:

$$\gamma:\ \varphi \longmapsto r(\varphi) = 1-\cos(\varphi),\ \ \varphi\in[0,\ 2\,\pi]$$

Berechne die Krümmung $\kappa(\varphi)$ und skizziere die Kurve.

(b) Berechne die Kurvenlänge von γ.

(c) Berechne den Flächeninhalt von G.

(d) Sei $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ x+y \\ x^2-2\,y \end{pmatrix}$, $\vec{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x+1 \\ x \\ x-2\,y \end{pmatrix}$.

$$\text{Berechne}\ \oint_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle\ \ \text{sowie}\ \ \oint_{\gamma} \langle \vec{H}, d\vec{r}\rangle.$$

(e) Über G werde ein Zylinder Z der Höhe 1 errichtet. Berechne den Fluss Φ von $\vec{H}$ durch die gesamte Oberfläche von Z.

(3) In der (x,y)–Ebene liegt eine endliche Fläche A, welche von einer Kurve γ umschlossen wird. Weiter ist ein Feld $\vec{u}$ gegeben: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\iint\limits_{A} \langle \text{rot}\ \vec{u}, d\vec{A}\rangle = \,?$$

Hinweis: Einfacher Ausdruck!

(4) Berechne die Fourierreihe von $f(t) = \sin(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{3})$, $t\in[0,\ 2\,\pi)$, $\forall_t f(t) = f(t+2\,\pi)$.

Viel Glück!

WIR

10.17 Test: Differential und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektoranalysis III/29

Abschrift • *Copie*

(1) Untersuche die Kurve $f(x,y) = x\,y\,(x+y) + x = 0$ auf spezielles Verhalten und skizziere die Kurve.

(2) (a) Zeige durch Rechnung:

$$(\vec{x} \times \vec{y})' = \vec{x}\,' \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}\,'.$$

(b) Zeige die Formel an einem Beispiel.

(3) (a) Gegeben ist $\vec{F}(x,y,z) = c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{e}_r,\ \ \vec{e}_r = \frac{1}{r} \cdot \vec{r},\ \ \vec{r} = \vec{r}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

Berechne $div\,(\vec{F})$.

(b) $\varphi(x,y,z) = |\vec{F}(x,y,z)|$. Berechne $grad(\varphi)$.

Viel Glück!

10.18 Test: Lineare Abbildungen, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektoranalysis III/38

Abschrift • *Copie*

(1) Eine lineare Abbildung des 3–dimensionalen Raumes in sich besitzt die Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Man weiss, dass alle Punkte der Geraden, die durch den Origo und den Punkt $P(1/1/1)$ geht, durch diese Abbildung unverändert gelassen werden, während der Punkt $A(4/-3/2)$ in $B(-6/1/2)$ übergeführt wird. Bestimme die fehlenden Elemente der Abbildungsmatrix und berechne den Bildpunkt D von $C(18/11/36)$!

(2) Gegeben sei ein 3–dimensionales Vektorfeld $\vec{X}$:

$$\vec{X} = \vec{X}(x, y, z) = x\,z\,\vec{e}_1 + x\,\sin(y)\,\vec{e}_2 + (z + e^x)\,\vec{e}_3.$$

Berechne das Linienintegral dieses Vektorfeldes längs des lückenlosen Weges $C = C_1 \cup C_2$, wobei C_1 ein Stück Parabel $z = x^3$ mit $x \in [0,\ 1]$ ist. C_2 verläuft parallel zur y–Achse mit $y \in [0,\ \pi],\ \ x = 1,\ \ z = 1$.

(3) Der Kaffee in einer zylinderförmigen Tasse mit Radius r wurde längere Zeit gleichmässig umgerührt. Die resultierende Kaffeeoberfläche (Querschnitt oben) ist durch ein quadratisches Polynom $y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$ bestimmt. In der Mitte steigt der Kaffee bis zur Höhe c, am Rand bis zur Höhe d. Um wieviel Kaffee handelt es sich? (D.h. $V = ?$)

(4) Gegeben sei die folgende Raumfläche im $\mathbb{R}^3$:

$$3\,x^2\,z - 4\,x\,y\,z - 7\,x + 4\,y = 5$$

(a) Man bestimme den einzigen Punkt der Raumfläche mit horizontaler Tangentialebene.

(b) Man bestimme die Tangentialebene in der Funktionsform $z = z(x, y)$.

(c) In dieser horizontalen Tangentialebene liegt das Dreieck, welches gegeben ist durch $A(10/0/z)$, $B(5/5/z)$ und $C(2/1/z)$. Man berechne das Volumen des Körpers der entsteht, wenn man das Dreieck rotieren lässt um die Parallele zur x–Achse in der horizontalen Tangentialebene.

Viel Glück!

WIR

10.19 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Reihentheorie im $\mathbb{R}^n$ III/45

Abschrift • *Copie*

(1) Im $\mathbb{R}^n$ hat die Taylorentwicklung speziell für $n = 2$ die folgende Form:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} \frac{\partial^k}{\partial x^j\, \partial y^{k-j}} f(x,y)\, (x-x_0)^j\, (y-y_0)^{k-j} \Big|_{(x;\ y)=(x_0;\ y_0)}$$

Berechne die Taylorentwicklung bis zur 2.Ordnung von $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ in $(x_0;\ y_0) = (2;1)$.

(2) Sei $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $(x_0;\ y_0) = (2;1)$, $(x,\ y) \in [x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x] \times [y_0 - \Delta y,\ x_0 + \Delta y]$.
Stelle eine Formel auf für Δf im Punkte $(x_0,\ y_0)$.

(3)

$$f(x,y) = x^4 - 2\,x^2 + (2\,x^2 - 1) \cdot y^2$$

Berechne Extrema und Sattelpunkte.

(4) Berechne die Extrema von $f(x,y,z) = x^2 + 4\,y^2 + 25\,z^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

(5) Gegeben sind die Punkte $A(2;3)$, $B(7\,2)$, $C(5\,6)$ und $P(x;y)$.
Zudem ist $d_1 = |\overline{AP}|$, $d_2 = |\overline{BP}|$, $d_3 = |\overline{CP}|$. Bestimme P so, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{3} (d_i)^2 \to \text{ min.}$$

(6) Oben an ein Rechteck mit der Breite x und der Höhe y stösst mit der längeren Kante an den beiden Ecken bündig ein gleichschenkliges Dreieck, nach der Art des Profils der Frontseite eines Hauses mit Satteldach. φ ist der Winkel zwischen Dachkante und der Horizontalen. Der Umfang u des Profils ist gegeben: $u = 4\,cm$. Berechne x, y und φ so, dass die Querschnittsfläche A maximal wird.

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 11

Serien mit „Fehlerrechnung“

11.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srof- fgebiete war nie vorhanden.

11.2 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, nichtlineare Gleichungen, Fehlerrechnung II/56

Abschrift • *Copie*

(1) Löse die Gleichung $e^{-x} + 4 - \frac{1}{2} \cdot x = 0$ numerisch auf 6 Stellen genau wenn möglich mit der Fixpunktmethode. Start: $x_1 = 1$.

(2) Gegeben sind die Messpunkte auf einem hypothetischen Funktionsgraphen:

$$(1.00/2.83), (2.00/3.21), (3.50/1.96/), (4.00/2.42), (5.00/1.06), (6.50/4.25)$$

(a) Approximiere die Funktion durch ein Polynom.

(b) Berechne damit das Integral zwischen 2.00 und 6.00.

(c) Berechne die Steigung des Graphen bei $x = 1.5$.

(d) Was müsste man wissen, um die Genauigkeit der Approximation zu beurteilen?

(3) Bestimme die Extremwertstellen der folgenden Funktion und beurteile, um welche Art Extremum es sich jeweils handelt:

$$f(x, y, z) = x, y + 2\,x^2 + y^2 + x + 1$$

(4) Berechne das totale Differential der folgenden Funktion:

$$f(x, y, z) = \cos(x\,y) + y\,e^x - 3\,ln(y - z) + z$$

(5) Suche eine einfache Annäherung von $f(x) = (1 + x)^n,\ x << 1$ und berechne damit $(1.000'000'000'041)^{163}$.

(6) Gegeben: $\Phi(x, y, z, w) = a\,\cos(x\,y) \cdot (1 - \sin(x)) + \frac{y\,z^2}{w} - b\,\frac{y^2}{w^2}$. Folgende Werte sind bekannt:

$x = 0.8652 \pm 0.0020$	$a = 2$
$y = 3.000 \pm 0.001$	$b = 3$
$z = 0.469 \pm 0.004$	
$w = 1.002 \pm 0.001$	

Berechne den Funktionswert mit dem absoluten Messfehler!

Viel Glück!

WIR

11.3 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/63

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Berechne $\int\limits_{-1}^{2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$. *(Hinweis: Potenzreihe!)*

(2) Gegeben: Eckpunkte $O(0;0;0)$, $P_1(2;0;0)$, $P_2(0;2;0)$, $P_3(0;0;2)$ einer Pyramide H.
Berechne $\int\limits_{V=H} x^2+x^2+z^2\,dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K=K_r(O)$, $O(0;0;0)$, $r=4$. Berechne $\int\limits_{V=K} x^2+x^2+z^2\,dV$.

(4) Gegeben: $z=f(x,y)=4x^2-y^2\geq 0$. $\leadsto$ f bestimmt ein Volumen V zwischen der Grundebene und der Funktionsfläche mit nicht negativem z. Berechne den Inhalt von V.

(5) Berechne die allfälligen Extrema von $f(x,y,z)=x^2\cdot\sin(x+y)+y+\cos(z)$.

(6) Gegeben: $f(s,\alpha,\beta,\gamma)=\dfrac{s\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)}{\cos(\gamma)}+\dfrac{\sqrt{s^2-2}\cdot\cos(\gamma)}{\sin(\alpha)}$.
Dazu sind folgende Messwerte bekannt:

$$s = 40.07\pm 0.01 \qquad \beta = 44.15^o\pm 0.02^o$$
$$\alpha = 20.02^o\pm 0.02^o \qquad \gamma = 30.00^o\pm 0.02^o$$

$$f(x,\alpha,\beta,\gamma)=\,?\,\pm\,?$$

Viel Glück!

11.4 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/64

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Das im 2. Quadranten liegende achsenparallele Gebiet G wird bestimmt durch den Ursprung sowie die Punkte $(-0.1; 0)$ und $(0; 2)$. Berechne $\int\limits_G \frac{\arctan(x)}{x}\, dG$.

(2) Ein in achsenparalleler Lage sich befindlicher Keil H ist gegeben durch die Eckpunkte $O(0;0;0)$, $P_1(1;0;0)$, $P_2(1;1;0)$, $P_3(0;1;0)$, $P_4(0;1;1)$ und $P_5(0;0;1)$. (Skizze!) Berechne $\int\limits_{V=H} x+y+z\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_r(O)$, $O(0;0;0)$, $r=1$. Berechne $\int\limits_{V=K} \frac{e^{-(x^2+x^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+x^2+z^2}}\, dV$.

Hinweis: Kugelkoordinaten verwenden! $\rightsquigarrow$ $dx\,dy\,dz = D\cdot dr\,d\varphi\,d\alpha$, $D = r^w \cdot \sin(\alpha)$. *$\alpha$ ist der Winkel ab der positiven z–Achse, φ der jenige ab der positiven x–Achse.*

(4) Gegeben: $f(x,y) = \sin(x)\cdot\cos(y)\cdot\frac{(-1)}{y^2-1}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-0.6, 0.6]$.

(a) Extrema?

(b) $x = 0.114 \pm 0.001$, $y = 0.521 \pm 0.002 \Rightarrow f(x,y) = ? \pm ?$

Viel Glück!

11.5 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/65

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Das im 1. Quadranten liegende achsenparallele Gebiet G wird bestimmt durch den Ursprung sowie die Punkte $(0; 0.1)$ und $(0; 3)$. Berechne $\int\limits_G \frac{\tan(x)}{x}\, dG$.

(2) Ein in achsenparalleler Lage sich befindlicher Keil H ist gegeben durch die Eckpunkte $O(0; 0; 0)$, $P_1(1; 0; 0)$, $P_2(1; 1; 0)$, $P_3(0; 1; 0)$, $P_4(0; 1; 1)$ und $P_5(0; 0; 1)$. (Skizze!) Berechne $\int\limits_{V=H} x - y + z\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_r(O)$, $O(0; 0; 0)$, $r = 1$. Berechne $\int\limits_{V=K} \frac{-e^{(x^2+x^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+x^2+z^2}}\, dV$.

Hinweis: Kugelkoordinaten verwenden! $\rightsquigarrow$ $dx\, dy\, dz = D \cdot dr\, d\varphi\, d\alpha$, $D = r^w \cdot \sin(\alpha)$. *$\alpha$ ist der Winkel ab der positiven z–Achse, φ der jenige ab der positiven x–Achse.*

(4) Gegeben: $f(x, y) = -\sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \frac{(1)}{y^2 - 2}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-0.6, 0.6]$.

(a) Extrema?

(b) $x = 0.114 \pm 0.002$, $y = 0.512 \pm 0.001 \Rightarrow f(x, y) = ? \pm ?$

Viel Glück!

11.6 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung, Eigenwerttheorie mit Matrizen III/04

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f_1(x) = x^2 + x + 3\,x\,y - y^3$$

Berechne mögliche Extremwertstellen, Sattelpunkte u.s.w. und versuche, eine 3D–Skizze der Fläche zu entwerfen.

(2)

$$W = \frac{1}{2}\,R\,S^2\,(R-S) + q\,\frac{R+S}{R-S}$$

Berechne W mit samt dem Fehler von W, wenn folgnde Werte gemessen werden:

$$R = 46.245 \pm 0.035\,n, \;\; S = 45.015 \pm 0.015\,n$$

Debei ist bekannt: $q = 1.32915 \pm 0.00002\,n^2$

(3)

$$f_3(x, y, g(z)) = e^{x+y}\,\sin(\cdot y \cdot g(z)), \;\; g(z) = \sin^2(z) + z^3 - z^2 + z$$

Berechne das totale Differential von f_3!

(4) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Es wird vermutet, dass ein Eigenwert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 6$ sein könnte. Berechne die allfälligen Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

Viel Glück!

WIR

11.7 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung, Fourieranalysis III/05

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{6} \ \wedge \ 0 \leq z \leq 12\}, \ \ f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

$$\leadsto \int\limits_V f(x,y,z)\,dV = \,? \ \ \text{(Skizze!)}$$

(b) In einen Körper mit rechteckigem Grundriss und $x \in [-12, \ 12]$, $y \in [-12, \ 12]$ und $z \in [0, \ 12]$ wird längs der z–Achse ein Loch mit Radius $r = 6$ gebohrt. Anschliessend wird die Menge aller Punkte mit negativer x–Koordinate weggeschnitten $\leadsto$ V. Dazu ist $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Wie gross ist $\int\limits_V f(x,y,z)\,dV$? (Skizze!)

(2)

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)\,\cos(x-y) + \frac{1}{x^2+y^2}\,\arctan(z)$$

$$x_1 = 10 \pm 0.2, \ \ y_1 = 11 \pm 0.2, \ \ z_1 = 0.9 \pm 0.05$$

$$f(x_1,y_1,z_1) \pm \Delta f = \,?$$

(3) (a)

$$f(t) = 2 + \frac{1}{4\,\pi}\,t \text{ für } t \in [0, \ 2\,\pi), \ \ f(t+2\,n\,\pi) = f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

$\leadsto$ Leite die Fourierreihe her!

(b)

$$f(t) = e^{-3\,t-t} \text{ für } t \in [0, \ 2\,\pi), \ \ f(t+2\,n\,\pi) = f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

$\leadsto$ Leite die Fourierreihe her!

(c)

$$f(t) = e^{-3\,t-t} \text{ für } t \in [0, \ 2\,\pi), \ \ f(t) = 0 \text{ für } t \notin [0, \ 2\,\pi]$$

$$\hat{f}(\Omega) = \,?$$

Viel Glück!

Kapitel • Chapitre 12

Serien mit „Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$“

12.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

12.2 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ **II/41**

Abschrift • *Copie*

(1) $I(x) = \int_0^{x^2} \cos(x \cdot t)\, dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d\, I(x)}{d\, x} = ?$

(2) $x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \cdot \sin(k\,(t-u))\, du \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + k^2 \cdot x = ?$

(3) $f(x,y) = (2 - x\,y)\, x\, y\, e^{-x\,y} \;\leadsto\;$ Gilt $\int_0^1 \Big(\int_0^\infty f(x,y)\, dy\Big)\, dx = \int_0^\infty \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dx\Big)\, dy$?

(4) Das Gebiet G wird begrenzt durch $y = 2,\; y = x$ und $y = \frac{1}{x}$. Berechne:

(a) $|G| = \iint_G dG$

(b) $k = \frac{1}{|G|} \iint_G x\, dx\, dy$

(b) $w = \iint_G \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy$

(c) Was hat k für eine Bedeutung?

(5) $K_1(O) =$ Sphäre mit Radius 1 um O, $Q_0 = Q_0(5,0,0)$, $P \in K_1(O)$, $r(P) = |\overline{Q_0 P}|$.

$$\int_{A=K_1(O)} \frac{1}{r(P)}\, dA = ?$$

(6) Gegeben ist ein Körper H in der Parameterdarstellung $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} (\cos(u)+5)\sin(v) \\ (\sin(u)+5)\sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}$.

Dabei ist $u \in [0,\; 2\,\pi),\;\; v \in [0,\; \pi]$.

(a) Skizziere den Körper H.
(b) Berechne die Oberfläche von H.
(c) Berechne das Volumen von H.

Viel Glück!

WIR

12.3 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/47

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, $f_3(x) = \sqrt{f_2(x)}$ mit vorläufig unbekanntem a, b, c. $f(x)$ ist wie folgt zusammengesetzt: $f(x) = f_1(x)$ für $x \in [0 = x_0,\ 1 = x_1]$. Danach ist $f(x) = f_2(x)$ mit $f_1(1) = f_2(1)$ und $f_1{}'(1) = f_2{}'(1)$. Weiter rechts nach einem vorläufig nicht bekannten Wert x_2 ist $f(x) = f_3(x)$ mit $f_3(x_2) = f_2(x_2)$ und $f_3{}'(x_2) = f_2{}'(x_2)$.

(a) Untersuche, ob das damit erhaltene Gleichungssystem überbestimmt ist. (Falls ja, so lasse man die letzte Bedingung Fallen u.s.w.)

(b) Berechne $f(x)$ und bestimme die erste Nullstelle x_3 von f auf der positiven x–Achse.

(c) Wir lassen die Kurve f um die x–Achse rotieren. Berechne das Volumen des Rotationskörpers zwischen 0 und x_3.

(2) $f(x) = (x-1)^2$, $h(x) = 2\,f(x)$, $I = [0,\ 1]$.
Zwischen f und h entsteht über I eine Fläche A.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Berechne den Schwerpunkt von A mittels Integration.

(3) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ wird über $I = [0,\ x_1]$ um die x–Achse rotiert. Berechne das Verhältnis von Volumen zu Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers als Funktion von x_1.

Viel Glück!

12.4 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/59

Abschrift • *Copie*

(1) Eine Fläche A entsteht durch zwei Kreise mit dem Radius R, wobei jeder Kreis seinen Mittelpunkt auf der Peripherie des andern hat. Wenn wir die beiden Kreisflächen mit K_1 und K_2 bezeichen, so ist $A = (K_1 \cup K_2) \setminus K_1$. Über A wird ein Zylinder der Höhe 1 errichtet. Berechne den Inhalt von A sowie das Zylindervolumen.
Hinweis: Berechne A in Polarkoordinaten ($\leadsto$ $r = r(\varphi)$) mit Zentrum = Mittelpunkt O von K_1. Wenn E der von O am weitesten entfernte Punkt von K_2 ist, so kann die Kreislinie von K_2 als Thaleskreis über $\overline{OE}$ gesehen werden. Diese Tatsache kann man gewinnbringend ausnützen.

(2) Wir betrachten den „Bienenkorb" $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ über der Grundebene, d.h. für $z \geq 0$.

(a) Berechne den Volumeninhalt des „Bienenkorbs".

(b) Berechne den Oberflächeninhalt ohne den Grundflächenanteil.

(3) Gegeben ist die Ebene $\Phi : x+2\,y+3\,z = 6$ sowie die Funktion $f(x, y, z) = 3\,x+2\,y+z$. Der Urspung zusammen mit den Durchstosspunkten der Achsen durch Φ bilden die Eckpunkte eines Körpers H. (Tetraeder). Berechne das Volumenintegral $\int\limits_H f(x, y, z)\, dV$.

Viel Glück!

12.5 Test: Differential und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Differentialgleichungen II/60

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $y' = e^{-(x+y)} + \sin(x) + \cos(y), \ \ (x, y) \in D = [0, \ 2\,\pi] \times [0, \ 2\,\pi] \rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(b) $y' = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{y^2}{x^3} \rightsquigarrow$ Vollständige Lösung?

(2) Körper $K = K(OP_1P_2P_3), \ \ P_1 = (1; 0; 0), \ \ P_2 = (; 3; 0), \ \ P_3 = (0; 0; 2)$. (Skizze!) Berechne den Abstand des Schwerpunktes von K von der (y, z)–Ebene!

(3) Gegeben ist eine zum Ursprung zentrische Hohlkugel H mit dem inneren Radius 1 und dem äusseren Radius 2. (Skizze!) Berechne folgendes Integral:

$$\iiint\limits_H \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dV = \ ?$$

(4) A ist die Oberfläche einer Halbkugel K_H, welche ihr Kugelzentrum im Ursprung hat und deren Punkte keine negativen z–Koordinaten besitzen. Zudem ist $f(P) = \vartheta, \ \ \vartheta =$ Winkel zwischen dem Radius durch P und der z–Achse. (Skizze!) Berechne:

$$\iint\limits_{K_H} f\, dA$$

(5) Auf der (x, y)–Ebene senkrecht steht ein Zylinder Z, dessen Achse die z–Achse ist. Z hat die Höhe 25 und den Radius 10. Eine Schnittebene Φ steht senkrecht auf der (y, z)–Ebene und geht durch die Punkte $P_1(0, -10, 0)$ und $P_2(0, 10, 25)$. Φ schneidet die obere Hälfte des Zylinders weg. Das verbleibende Volumen heisst Z_1.
Eine durch die z–Achse gehende Ebene Ψ_1 bildet mit der x–Achse den Winkel $+45^o$ und eine weitere durch die z–Achse gehende Ebene Ψ_2 bildet mit der x–Achse den Winkel $+90^o$ (Skizze!) Ψ_1 und Ψ_2 schliessen demnach einen Winkel von 45^o ein und schneiden in diesem Winkel ein kuchenstückartiges Volumen aus Z_1 aus. Dadurch entsteht der Körper Z_2. A sei die von Z an Z_2 verbleibende gerundeten äussere Mantelfläche mit dem Radius 10!
Weiter ist $f(x, y, z) = y \cdot z$. Berechne:

$$\iint\limits_A f\, dA$$

Viel Glück!

WIR

12.6 Test: Equations différentielles, analyse vectorielle II/61

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,x \cdot \cos(y)\,dx)dy = \,?$$

(b) f est harmonique $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{d^2\,f}{d\,y^2} \;:=\; \triangle f = 0.$
Est–ce que $f(x, y) = e^{-x}\,\cos(x)$ est harmonique?

(c)

$$f(x, y, z) = \sin(x, y, z),\;\; \frac{\partial}{\partial x} \triangle\, f = \,? \qquad (\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

(d)

$$w(x, y, z) = x^2\,e^{y\,z} + y\ln(z) \;\Rightarrow\; dw = \,?$$

(2) (a) Donné: Cylindre $Z(R, h)$, $r =$ rayon, $h =$ hauteur.

$$r = 20\,mm \pm 0.02\,mm,\;\; h = 40\,mm \pm 0.02\,mm$$

Estimer l'erreur max. du volume V par la différentielle!

(b)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4 \;\Rightarrow\; \frac{d\,y}{d\,x} = \,?$$

(c)

$$f(x, y) = x^2 \cdot ln(y),\;\; P(5; 1) = P_0,\;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Derivée directionnelle de f au point P_0 en direction de $\vec{v}$?

(3) (a) $f(x, y) = (x^2 + 3\,y^2)\,e^{-(x^2+y^2}$. Chercher les minimums et les maximums!
(b) $f(x, y, z) = 4\,x^2+y^2+z^2$. Trouver les extrémums de f sous la contrainte $x+2\,y-z = 1$!

(4) Chercher la solution:

(a)

$$y\,' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(b)

$$y\,' + 2\,y = 3\,x,\;\; y(1) = 1$$

(c)

$$y\,'' + 2\,y\,' + y = 3\,e^{-x}$$

(d)

$$y\,'' + 4\,y\,' + 5\,y = 0$$

%

(5)

$$y\,' = \sin(x + 2\,y), \quad x, y \in [2,\ 2]$$

(a) Champ de direction?

(b) Solution sous la contrainte $y(0) = 0$? (Esquisse!)

Bonne chance!

12.7 Test: Eigenwerttheorie mit Matrizen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/62

Abschrift • *Copie*

(1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Eigenwerte?

(b) Eigenvektoren?

(c) Bild von $\triangle ABC$, $A(0;0;0)$, $B(-1;1;1)$, $C(1;1;1)$, unter M?

(d) Flächeninhalt des Bilddreiecks?

(e) $(M^{-1})^{100} = ?$

(2) $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Entwickle mit Hilfe des Satzes von Caley–Hamilton eine explizite Formel für A^{-1}.

(3) Ein Volumen ist begrenzt durch $z = 3\,x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ und $z + y = 6$. Berechne den Inhalt!

(4)

$$\int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

Hinweis: Geeignetes Koordinatensystem!

(5)

$$f(x,y) = h \cdot \cos\Big(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\Big) \;\text{ mit }\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

G ist das Gebiet in der Grundebene mit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (elliptisches Sinusoid). Berechne

$$\iint_G |f(x,y)|\, dG.$$

Hinweis: Subst. $x = a \cdot u$, $y = b \cdot v$, im entstehenden Integral Polarkoordinaten verwenden.

Viel Glück!

WIR

12.8 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/63

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Berechne $\int\limits_{-1}^{2} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$. *(Hinweis: Potenzreihe!)*

(2) Gegeben: Eckpunkte $O(0;0;0)$, $P_1(2;0;0)$, $P_2(0;2;0)$, $P_3(0;0;2)$ einer Pyramide H.
Berechne $\int\limits_{V=H} x^2 + x^2 + z^2\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_r(O)$, $O(0;0;0)$, $r = 4$. Berechne $\int\limits_{V=K} x^2 + x^2 + z^2\, dV$.

(4) Gegeben: $z = f(x,y) = 4x^2 - y^2 \geq 0$. $\leadsto$ f bestimmt ein Volumen V zwischen der Grundebene und der Funktionsfläche mit nicht negativem z. Berechne den Inhalt von V.

(5) Berechne die allfälligen Extrema von $f(x,y,z) = x^2 \cdot \sin(x+y) + y + \cos(z)$.

(6) Gegeben: $f(s,\alpha,\beta,\gamma) = \frac{s \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\cos(\gamma)} + \frac{\sqrt{s^2-2} \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\alpha)}$.
Dazu sind folgende Messwerte bekannt:

$$s = 40.07 \pm 0.01 \qquad \beta = 44.15^o \pm 0.02^o$$
$$\alpha = 20.02^o \pm 0.02^o \qquad \gamma = 30.00^o \pm 0.02^o$$

$$f(x,\alpha,\beta,\gamma) = \,?\, \pm \,?$$

Viel Glück!

12.9 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/64

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Das im 2. Quadranten liegende achsenparallele Gebiet G wird bestimmt durch den Ursprung sowie die Punkte $(-0.1; 0)$ und $(0; 2)$. Berechne $\int\limits_G \dfrac{\arctan(x)}{x}\, dG$.

(2) Ein in achsenparalleler Lage sich befindlicher Keil H ist gegeben durch die Eckpunkte $O(0; 0; 0)$, $P_1(1; 0; 0)$, $P_2(1; 1; 0)$, $P_3(0; 1; 0)$, $P_4(0; 1; 1)$ und $P_5(0; 0; 1)$. (Skizze!) Berechne $\int\limits_{V=H} x + y + z\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_r(O)$, $O(0; 0; 0)$, $r = 1$. Berechne $\int\limits_{V=K} \dfrac{e^{-(x^2+x^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+x^2+z^2}}\, dV$.

Hinweis: Kugelkoordinaten verwenden! $\leadsto$ $dx\, dy\, dz = D \cdot dr\, d\varphi\, d\alpha$, $D = r^w \cdot \sin(\alpha)$. *$\alpha$ ist der Winkel ab der positiven z–Achse, φ der jenige ab der positiven x–Achse.*

(4) Gegeben: $f(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \dfrac{(-1)}{y^2 - 1}$, $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, $y \in [-0.6, 0.6]$.

(a) Extrema?

(b) $x = 0.114 \pm 0.001$, $y = 0.521 \pm 0.002 \Rightarrow f(x, y) = ? \pm ?$

Viel Glück!

12.10 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung II/65

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Das im 1. Quadranten liegende achsenparallele Gebiet G wird bestimmt durch den Ursprung sowie die Punkte $(0; 0.1)$ und $(0; 3)$. Berechne $\int\limits_G \frac{\tan(x)}{x}\, dG$.

(2) Ein in achsenparalleler Lage sich befindlicher Keil H ist gegeben durch die Eckpunkte $O(0; 0; 0)$, $P_1(1; 0; 0)$, $P_2(1; 1; 0)$, $P_3(0; 1; 0)$, $P_4(0; 1; 1)$ und $P_5(0; 0; 1)$. (Skizze!) Berechne $\int\limits_{V=H} x - y + z\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_r(O)$, $O(0; 0; 0)$, $r = 1$. Berechne $\int\limits_{V=K} \frac{-e^{(x^2+x^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+x^2+z^2}}\, dV$.

Hinweis: Kugelkoordinaten verwenden! $\rightsquigarrow$ $dx\, dy\, dz = D \cdot dr\, d\varphi\, d\alpha$, $D = r^w \cdot \sin(\alpha)$. *$\alpha$ ist der Winkel ab der positiven z–Achse, φ der jenige ab der positiven x–Achse.*

(4) Gegeben: $f(x, y) = -\sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \frac{(1)}{y^2 - 2}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-0.6, 0.6]$.

(a) Extrema?

(b) $x = 0.114 \pm 0.002$, $y = 0.512 \pm 0.001 \Rightarrow f(x, y) = ? \pm ?$

Viel Glück!

12.11 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/66

Abschrift • *Copie*

(1) $K = K_r(O) =$ Kugel um den Urspung O mit Radius r. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

$$\int_{V=K} f(x, y, z)\, dV = \, ?$$

(2) Ein in achsenparalleler Lage sich befindlicher Keil H ist gegeben durch die Eckpunkte $O(0; 0; 0)$, $P_1(3; 0; 0)$, $P_2(3; 1; 0)$, $P_3(0; 1; 0)$, $P_4(0; 1; 2)$ und $P_5(0; 0; 2)$. (Skizze!)
$f(x, y, z) = z^2 - x - y \quad \leadsto$ Berechne $\int\limits_{V=H} f(x, y, z)\, dV$.

(3) Gegeben: Kugel $K = K_R(O)$, $O(0; 0; 0)$, $R = 4$. Berechne $\int\limits_{V=K} \frac{e^{-\pi\,(x^2+x^2+z^2)}}{4\,\pi\,\sqrt{x^2+x^2+z^2}}\, dV$.

(4) Das im 1. Quadranten liegende achsenparallele Gebiet G wird bestimmt durch den Ursprung sowie die Punkte $(0; 0.1)$ und $(0; 2)$. Berechne approximativ $\int\limits_G \left(\frac{\arctan(x)}{x}\right) dG$.

Viel Glück!

12.12 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/67

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $\displaystyle \frac{d}{d\,x}\int\limits_0^{x^3+1} \sin(x\cdot t+1)\,dt = \,?$

(b) $\displaystyle \frac{d}{d\,t}\int\limits_0^{t} g(\sin(x))\cdot sin(k\cdot t+1)\,dx = \,?$ (g analytisch)

(2) $K = K_{R_1,R_2}(O) =$ Hohlkugel um O mit Innenradius R_1 und Aussenradius R_2. Berechne:

$$\int\limits_{V=K} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \,?$$

(3) Das dreieckige Gebiet G ist definiert durch die Eckpunkte $P_1(1;0)$, $P_2(1;1)$, $P_3(0;1)$. Berechne:

$$\iint\limits_G \frac{y^2}{x^2}\,dG = \,?$$

(4) Ein Papierband der Breite $2\,R$ ist mit seiner Mittellinie der Länge nach an die y–Achse geklebt und um diese Achse über seine Länge gleichmässig um den Winkel π vergreht. Die Länge der Mittelline misst $\frac{k\,\pi}{2}$, $k\in\mathbb{N}$. Das Band ist somit skizzierbar mit $y\in[-\frac{k\,\pi}{4},\ \frac{k\,\pi}{4}]$.

(a) Skizziere das Band!

(b) Untersuche, ob die Parametrisierung

$$\vec{v}=\vec{v}(t,r)=\begin{pmatrix} r\cdot\cos(t)\\ k\cdot t\\ r\cdot\sin(t)\end{pmatrix},\ \ t\in[-\frac{k\,\pi}{4},\ \frac{k\,\pi}{4}],\ \ r\in[-R,\ R]$$

das Band richtig beschreibt. (Falls dies nicht der Fall ist, so ist die notwendige Korrektur anzugeben.)

(c) Berechne die einseitige Oberfläche des Bandes und vergleiche die erhaltene Grösse mit der Grösse eines Rechteckstreifens der Länge $\frac{k\,\pi}{2}$ und der Breite $2\,R$.

(d) Berechne die Kurvenlänge einer äusseren Längskante. Was ist bezüglich Herstellung des Papierstreifens zu bemerken, wenn man das Resultat mit der Länge der Mittellinie vergleicht?

Viel Glück!

WIR

12.13 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung, Fourieranalysis III/05

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{6} \ \wedge \ 0 \leq z \leq 12\}, \ \ f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

$$\leadsto \int\limits_V f(x,y,z)\, dV = \ ? \quad \text{(Skizze!)}$$

(b) In einen Körper mit rechteckigem Grundriss und $x \in [-12,\ 12]$, $y \in [-12,\ 12]$ und $z \in [0,\ 12]$ wird längs der z–Achse ein Loch mit Radius $r = 6$ gebohrt. Anschliessend wird die Menge aller Punkte mit negativer x–Koordinate weggeschnitten $\leadsto$ V. Dazu ist $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Wie gross ist $\int\limits_V f(x,y,z)\, dV$? (Skizze!)

(2)

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)\, \cos(x-y) + \frac{1}{x^2+y^2}\, \arctan(z)$$

$$x_1 = 10 \pm 0.2, \ \ y_1 = 11 \pm 0.2, \ \ z_1 = 0.9 \pm 0.05$$

$$f(x_1,y_1,z_1) \pm \Delta f = \ ?$$

(3) (a)

$$f(t) = 2 + \frac{1}{4\,\pi}\, t \text{ für } t \in [0,\ 2\,\pi), \ \ f(t+2\,n\,\pi) = f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

$\leadsto$ Leite die Fourierreihe her!

(b)

$$f(t) = e^{-3\,t-t} \text{ für } t \in [0,\ 2\,\pi), \ \ f(t+2\,n\,\pi) = f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

$\leadsto$ Leite die Fourierreihe her!

(c)

$$f(t) = e^{-3\,t-t} \text{ für } t \in [0,\ 2\,\pi), \ \ f(t) = 0 \text{ für } t \notin [0,\ 2\,\pi]$$

$$\hat{f}(\Omega) = \ ?$$

Viel Glück!

WIR

12.14 Test: Differentialgleichungen, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ III/19

Abschrift • *Copie*

(1) Skizziere das Richtungsfeld:

(a)
$$y' = x + y$$

(b)
$$y' = x^2 + y^2$$

(2)
$$\int\limits_{K_{r=2}(Origo)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dV = \,?$$

Hinweis: Kugelkoordinaten: $D = -r^2 \sin(\alpha)$, $\alpha =$ *Winkel zur* z*–Achse.*

(3) Ein keilförmiger Körper ist begrenzt durch $P_1(0;0;0)$, $P_2(x_0, 0, 0)$, $P_3(x_0, y_0, 0)$, $P_4(0, y_0, 0)$, $P_5(0, 0, z_0)$, $P_6(x_0, 0, z_0)$. (Die Kante von P_4 nach P_5 wird gegeben durch $z = z_0 - y$.) Weiter gilt:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + z \cdot \sin(y), \quad F(x_0, x_0, z_0) = \int\limits_V f(x, y, h)\, dV$$

Suche die Extremalstellen von $F(x_0, x_0, z_0)$.

(4)
$$\begin{aligned} y' &= (\cos(x) \cdot \sinh(x)) \cdot y \\ y(1) &= 4 \end{aligned}$$

Löse die Differentialgleichungen und skizziere den Graphen.

Viel Glück!

WIR

12.15 Test: Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ III/23

Abschrift • *Copie*

Löse ohne Laplace–Transformationen:

(1) Suche die Laplace–Transformierte:

(a)

$$f(t) = t^4\, e^{-t(t-4)} + t^4 \cos(4\,(t-4) - \frac{\sin 4\,t}{t}$$

($t^4 \cos(4\,(t-4)$ *mit exponentieller Dämpfung.)*

(b)

$$g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \;\; \text{mit } f \text{ von vorhin.}$$

(2) Suche die Laplace–Transformierte durch Rechnung:

(a)

$$f(t) = |\sin(t)|$$

(b)

$$g(t) \;\; = \;\; \begin{cases} 0 & t \in [0,\, \pi] \\ |\sin(t)| & t \geq \pi \end{cases}$$

(3) Löse die folgenden AWP mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

(a)

$$\begin{aligned} y' - 7\,y &= e^{7\,x} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y' + y &= \sin(x) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y &= t^2\, e^t \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= -2 \end{aligned}$$

(4) Gegeben ist ein keilförmiger Körper mit den Eckpunkten $(0;0;0)$, $(1;0;0)$, $(1;1;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$, $(0;1;1)$. Berechne exakt:

$$\int\limits_V (x - y + z)\, dV$$

(5) (a) Das durch den Ursprung sowie die Punkte $(0.1, 0)$ und $(0, 2)$ gegebene rechteckige Gebiet heisst G. Berechne näherungsweise:

$$\int\limits_G \frac{\arctan(x)}{x}\, dG$$

(b) K sei die Kugel mit dem Radius 1 und dem Zentrum im Ursprung. Berechne:

$$\int\limits_K \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dK$$

Hinweis: $dx\, dy\, dz = D\, dr\, d\alpha\, d\beta$, $D = r^2\, \sin(\beta)$, *Kugelkoordinaten.*

Viel Glück!

12.16 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis, Fourieranalysis III/28

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben: $\vec{F}(x,y,z))\begin{pmatrix} -4\,y+4\,z \\ -x\,y+6\,y-8\,z \\ 4\,x-8\,y+6\,z \end{pmatrix}$, Streckenzug $\gamma:\ \overline{P_0P_1P_2P_3P_4P_5}$ mit $P_0(2;3;1)$, $P_a(1;3;1)$, $P_2(1;5;1)$, $P_3(1;3;1)$, $P_4(1;5;1)$, $P_5(1;5;3)$.

$$\int\limits_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle = \,?$$

(2) (a) In der (x,y)–Ebene ist eine Kurve γ gegeben, welche ein Gebiet G umschliesst:

$$\gamma:\ \varphi \longmapsto r(\varphi) = 1-\cos(\varphi),\ \ \varphi\in[0,\ 2\,\pi]$$

Berechne die Krümmung $\kappa(\varphi)$ und skizziere die Kurve.

(b) Berechne die Kurvenlänge von γ.

(c) Berechne den Flächeninhalt von G.

(d) Sei $\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix} y-x \\ x+y \\ x^2-2\,y \end{pmatrix}$, $\vec{H}(x,y)=\begin{pmatrix} 2\,x+1 \\ x \\ x-2\,y \end{pmatrix}$.

$$\text{Berechne}\ \oint\limits_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle\ \text{ sowie }\ \oint\limits_\gamma \langle \vec{H}, d\vec{r}\rangle.$$

(e) Über G werde ein Zylinder Z der Höhe 1 errichtet. Berechne den Fluss Φ von $\vec{H}$ durch die gesamte Oberfläche von Z.

(3) In der (x,y)–Ebene liegt eine endliche Fläche A, welche von einer Kurve γ umschlossen wird. Weiter ist ein Feld $\vec{u}$ gegeben: $\vec{u}=\begin{pmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\iint\limits_A \langle \text{rot}\ \vec{u}, d\vec{A}\rangle = \,?$$

Hinweis: Einfacher Ausdruck!

(4) Berechne die Fourierreihe von $f(t)=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{3}),\ \ t\in[0,\ 2\,\pi),\ \ \forall_t f(t)=f(t+2\,\pi)$.

Viel Glück!

WIR

12.17 Test: Differential und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektoranalysis III/29

Abschrift • *Copie*

(1) Untersuche die Kurve $f(x,y) = x\,y\,(x+y) + x = 0$ auf spezielles Verhalten und skizziere die Kurve.

(2) (a) Zeige durch Rechnung:

$$(\vec{x} \times \vec{y})' = \vec{x}' \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}'.$$

(b) Zeige die Formel an einem Beispiel.

(3) (a) Gegeben ist $\vec{F}(x,y,z) = c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{e}_r,\;\; \vec{e}_r = \frac{1}{r} \cdot \vec{r},\;\; \vec{r} = \vec{r}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

Berechne $div\,(\vec{F})$.

(b) $\varphi(x,y,z) = |\vec{F}(x,y,z)|$. Berechne $grad(\varphi)$.

Viel Glück!

12.18 Test: Lineare Abbildungen, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektoranalysis III/38

Abschrift • *Copie*

(1) Eine lineare Abbildung des 3–dimensionalen Raumes in sich besitzt die Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Man weiss, dass alle Punkte der Geraden, die durch den Origo und den Punkt $P(1/1/1)$ geht, durch diese Abbildung unverändert gelassen werden, während der Punkt $A(4/-3/2)$ in $B(-6/1/2)$ übergeführt wird. Bestimme die fehlenden Elemente der Abbildungsmatrix und berechne den Bildpunkt D von $C(18/11/36)$!

(2) Gegeben sei ein 3–dimensionales Vektorfeld $\vec{X}$:

$$\vec{X} = \vec{X}(x, y, z) = x\,z\,\vec{e}_1 + x\,\sin(y)\,\vec{e}_2 + (z + e^x)\,\vec{e}_3.$$

Berechne das Linienintegral dieses Vektorfeldes längs des lückenlosen Weges $C = C_1 \cup C_2$, wobei C_1 ein Stück Parabel $z = x^3$ mit $x \in [0,\ 1]$ ist. C_2 verläuft parallel zur y–Achse mit $y \in [0,\ \pi],\ \ x = 1,\ \ z = 1$.

(3) Der Kaffee in einer zylinderförmigen Tasse mit Radius r wurde längere Zeit gleichmässig umgerührt. Die resultierende Kaffeeoberfläche (Querschnitt oben) ist durch ein quadratisches Polynom $y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$ bestimmt. In der Mitte steigt der Kaffee bis zur Höhe c, am Rand bis zur Höhe d. Um wieviel Kaffee handelt es sich? (D.h. $V = ?$)

(4) Gegeben sei die folgende Raumfläche im $\mathbb{R}^3$:

$$3\,x^2\,z - 4\,x\,y\,z - 7\,x + 4\,y = 5$$

(a) Man bestimme den einzigen Punkt der Raumfläche mit horizontaler Tangentialebene.

(b) Man bestimme die Tangentialebene in der Funktionsform $z = z(x, y)$.

(c) In dieser horizontalen Tangentialebene liegt das Dreieck, welches gegeben ist durch $A(10/0/z)$, $B(5/5/z)$ und $C(2/1/z)$. Man berechne das Volumen des Körpers der entsteht, wenn man das Dreieck rotieren lässt um die Parallele zur x–Achse in der horizontalen Tangentialebene.

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 13

Serien mit „Differentialgeometrie, Analysis im $\mathbb{R}^n$“

13.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srof-fgebiete war nie vorhanden.

13.2 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Differentialgeometrie und Kurven, Grenzwerte I/10

Abschrift • *Copie*

(1) $x(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)},\;\; y = (t) = \tan(t),\;\; \dfrac{d\,y}{d\,x} = ?$ für $t = 1$.

(2) $f(x) = e^x,\;\; x = 1 \;\leadsto$ Krümmungsraduis = ?

(3) $f(x) = e^x,\;\; x = 1 \;\leadsto$ Mittelpunkt des Krümmungskreises = ?

(4) $r(\varphi) = \dfrac{1}{2}\,(1+\cos(\varphi).\;\leadsto$ Berechne für $\varphi = 15^o$ den Winkel zwischen Radius und Tangente (in *Grad*)!

(5) Diskutiere $f(x) = \dfrac{x+5}{2-x}$.

(6) Berechne die Extrema von $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

(7) Berechne den Steigungswinkel der Kurve ($rad\,$!) für $x = 2$:

(a) $f(x) = \dfrac{\cos(x)\cdot\arccos(\frac{1}{x})}{x}$

(b) $f(x) = x \cdot \tan(x) - \ln(\cosh(x))$

(c)

(8) (a) $Lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x) - x^4}{3\,x^2 - \sin(x) + 2\,x} = ?$

(b) $Lim_{x\to\infty}\dfrac{x^6 - e^{-x}}{x^6 - e^x} = ?$

(9) Gegeben ist ein quadratisches Papier mit der Seitenlänge 10 cm. Aus diesem Papier wird die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide ausgeschnitten. (Form eines Malteserkreuzes, aussen jedoch wie das Tatzen– oder Templerkreuz. Die Form wird an der Prüfung bei Bedarf mündlich erklärt.) x ist die Distanz von einer Quadratecke bis zum Beginn einer Tatze, wo man mit dem Schnitt beginnt (symmetrische Anordnung infolge der nachfolgenden Aufgabenstellung naheliegend).

(a) Wie gross muss man x wählen, damit die Pyramide einen maximalen Volumeninhalt erhält?

(b) Wie gross muss man x wählen, damit die Pyramide eine maximalen Manteloberfläche erhält?

(10) *Literaturhausaufgabe:* Versuche herauszufinden, ob die eben errechnete Pyramidenform sich in einer ägyptischen Pyramide auffinden lässt. (Es ist eine Dokumentation zu erstellen. Termin nach mündlicher Mitteilung.)

Viel Glück!

WIR

13.3 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Differentialgeometrie und Kurven, Grenzwerte I/11

Abschrift • *Copie*

(1) $x(t) = t^3 + 3\,t^2 - 2\,t + 4,\;\; y = (t) = t^4 - 2\,t^3 - t^2 - t + 4,\;\; \dfrac{d\,y}{d\,x} = ?$ für $t = 1$.

(2) $f(x) = x^4 + 4\,x^2,\;\; x = 0 \;\leadsto$ Krümmungsraduis = ?

(3) $f(x) = x^4 + 4\,x^2,\;\; x = 0 \;\leadsto$ Mittelpunkt des Krümmungskreises = ?

(4) $r(\varphi) = \varphi \cdot \cos(2\,\varphi).\;\leadsto$ Berechne für $\varphi = \dfrac{\pi}{12}$ den Winkel zwischen Radius und Tangente (in *rad*)!

(5) Diskutiere $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$.

(6) Berechne die Extrema von $f(x) = 2\,e^{\cos^2(x)} + 4$.

(7) Berechne den Steigungswinkel der Kurve (*rad*!) für $x = 1$:

(a) $f(x) = x^{\ln(x)}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + \dfrac{\sinh(x^2)}{x^2}$

(8) (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2 - x^2) - (1 - x)^2}{x^2 - 2\,x + 1 - \sin(1 - x)} = ?$

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x + x^2 + e^x}{x - x^2 + e^{2\,x}} = ?$

Viel Glück!

13.4 Test: Lineare Abbildungen und Matrizen, Differentialgeometrie und Kurven, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gleichungssysteme II/57

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

(1) $x^2\,(2-y) = y^2\,(2+y) \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(2) $x^2 - 2\,x\,y + x^2 - y^3 = \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(3) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 5\,t\cdot\cos(t)+\cos(10\,t) \\ 5\,t\cdot\sin(t)+\sin(10\,t) \\ t \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Tangente, Normalebene für $t = \dfrac{\pi}{2}$!
• *Tangente, plan normal pour* $t = \dfrac{\pi}{2}$*!*

(4)

$$\begin{array}{rcl} w + x - y + 2\,z + 2 &=& 0 \\ 2\,y - 2\,x - 2\,w - 4\,z - 4 &=& 0 \end{array}$$

Lösungsmenge • *Ensemble des solutions*

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = \,?$$

(5) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Lineare Abbildung • *Application linéaire* $\begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix} \longmapsto\,?$

(6) $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x} + \vec{b},\;\; A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Bild der Geraden • *Image de la droite* $y = 4\,x + 1$?

%

(7) Geg.: • **Donné:** $KS(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}) \overset{f_1}{\longmapsto} \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\} \overset{f_2}{\longmapsto} \{\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}''\} \overset{f_3}{\longmapsto} \{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$

$KS =$ Koordinatensystem • $KS =$ *système de coordonnées*

$f_1 =$ Verschiebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ • $f_1 =$ *déplacement de* $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$f_2 =$ Drehung um $\alpha = +\dfrac{\pi}{2}$ • $f_1 =$ *rotation avec* $\alpha = +\dfrac{\pi}{2}$

$f_3 \leadsto \;\; \vec{e}_1{}'' \longmapsto \vec{e}_1{}''' = -\vec{e}_1{}''$

<u>Fragen:</u> • <u>*Problèmes:*</u>

a) $P = (4; 5) \longmapsto\, ?$ Im neuen System $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$?
• *Dans le nouveau système* $\{\vec{e}_1{}''', \vec{e}_2{}'''\}$*?*

b) $\{(x, y) \mid y = \dfrac{1}{2}\, x + 3\} \longmapsto\, ?$

Viel Glück!

13.5 Test: Lineare Abbildungen und Matrizen, Differentialgeometrie und Kurven, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gleichungssysteme II/58

Abschrift • *Copie*

Wichtig: • Important:

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Ableitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!
• *Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!*

(1) $4\,x^2\,(2+y) = y^2\,(2-y) \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(2) $x^3 + 2\,x\,y - x^2 - y^2 = \leadsto$ Diskussion mit Graph! • *Discussion avec graphe!*

(3) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 10\,t \cdot \sin(t) - \cos(10\,t) \\ 10\,t \cdot \cos(t) + \sin(10\,t) \\ t \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Tangente, Normalebene für $t = \pi$!
• *Tangente, plan normal pour $t = \pi$!*

(4)

$$\begin{array}{rcl} w + x + 4\,y - z + 4 & = & 0 \\ 4\,z - 4\,x + 4\,w - 16\,y - 16 & = & 0 \end{array}$$

Lösungsmenge • *Ensemble des solutions* $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = ?$

(5) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Lineare Abbildung • *Application linéaire* $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix} \longmapsto ?$

(6) $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x} + \vec{b}, \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ Bild der Geraden • *Image de la droite* $y = 3\,x - 1$?

%

(7) Geg.: • **Donné:** $KS(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}) \xmapsto{f_1} \{\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,'\} \xmapsto{f_2} \{\vec{e}_1\,'', \vec{e}_2\,''\} \xmapsto{f_3} \{\vec{e}_1\,''', \vec{e}_2\,'''\}$

KS = Koordinatensystem • KS = *système de coordonnées*

f_1 = Verschiebung um $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ • f_1 = *déplacement de* $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f_2 = Drehung um $\alpha = +\dfrac{3\,\pi}{2}$ • f_1 = *rotation avec* $\alpha = +\dfrac{3\,\pi}{2}$

$f_3 \rightsquigarrow \; \vec{e}_2\,'' \longmapsto \vec{e}_2\,''' = -\vec{e}_2\,''$

<u>Fragen:</u> • <u>*Problèmes:*</u>

a) $P = (5; 2) \longmapsto$? Im neuen System $\{\vec{e}_1\,''', \vec{e}_2\,'''\}$?
• *Dans le nouveau système* $\{\vec{e}_1\,''', \vec{e}_2\,'''\}$*?*

b) $\{(x, y) \mid y = 2\,x+1\} \longmapsto$?

Viel Glück!

WIR

13.6 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Reihentheorie im $\mathbb{R}^n$ III/45

Abschrift • *Copie*

(1) Im $\mathbb{R}^n$ hat die Taylorentwicklung speziell für $n = 2$ die folgende Form:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} \frac{\partial^k}{\partial x^j\, \partial y^{k-j}} f(x,y)\,(x-x_0)^j\,(y-y_0)^{k-j}\Big|_{(x;\ y)=(x_0;\ y_0)}$$

Berechne die Taylorentwicklung bis zur 2.Ordnung von $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ in $(x_0;\ y_0) = (2;1)$.

(2) Sei $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $(x_0;\ y_0) = (2;1)$, $(x,\ y) \in [x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x] \times [y_0 - \Delta y,\ x_0 + \Delta y]$.
Stelle eine Formel auf für Δf im Punkte $(x_0,\ y_0)$.

(3)

$$f(x,y) = x^4 - 2\,x^2 + (2\,x^2 - 1) \cdot y^2$$

Berechne Extrema und Sattelpunkte.

(4) Berechne die Extrema von $f(x,y,z) = x^2 + 4\,y^2 + 25\,z^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

(5) Gegeben sind die Punkte $A(2;3)$, $B(7\,2)$, $C(5\,6)$ und $P(x;y)$.
Zudem ist $d_1 = |\overline{AP}|$, $d_2 = |\overline{BP}|$, $d_3 = |\overline{CP}|$. Bestimme P so, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{3} (d_i)^2 \to \text{ min.}$$

(6) Oben an ein Rechteck mit der Breite x und der Höhe y stösst mit der längeren Kante an den beiden Ecken bündig ein gleichschenkliges Dreieck, nach der Art des Profils der Frontseite eines Hauses mit Satteldach. φ ist der Winkel zwischen Dachkante und der Horizontalen. Der Umfang u des Profils ist gegeben: $u = 4\,cm$. Berechne x, y und φ so, dass die Querschnittsfläche A maximal wird.

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 14

Lösungen — Solutions

14.1 Momentane Sachlage — — Situation actuelle

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur noch in Papierform vorhanden (*Mathematica*–Output und Handschriften). An eine gesamthafte oder teilweise Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier output de Mathematica et manuscrits. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale ou bien partielle.*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Fremdarbeit?

Ende • *Fin*