Übungen in Analysis ◇ Aus der Praxis ◇ A2 ◇ II /1N

Probl. 1 Ableitung mit Mathematica:

$$f_1(x) = e^{\frac{\sin(\cos(\cot(x)))}{\log(x\ \log(x^5 - \log(x)))}}\ \tan(\cos(x^{-4} - 3\ \sin(x)))$$

$$f_2(x) = x^{x^{x^{x^{x^x}}}},\quad f_3(x) = ((((x^x)^x)^x)^x)^x,\quad f_4(x) = x^{(x^{(x^{(x^x)})})}$$

$$f_5(x) = \left(\left(\left((x^x)^{x^x}\right)^{(x^x)^{x^x}}\right)^{\left((x^x)^{x^x}\right)^{(x^x)^{x^x}}}\right)^{\left(\left((x^x)^{x^x}\right)^{(x^x)^{x^x}}\right)^{\left((x^x)^{x^x}\right)^{(x^x)^{x^x}}}}$$

Probl. 2 Ein lineares Gleichungssystem soll rasch näherungsweise gelöst werden. Idee: Versuche eine Iteration mit Mathematica.

$A \cdot \vec{x} + \vec{b}$

$$\begin{array}{rcl} 6.25\,\boxed{x_1} + 2.08\,x_2 - 1.44\,x_3 &=& 2.59 \\ 1.78\,x_1 - 4.61\,\boxed{x_2} + 0.44\,x_3 &=& 5.22 \\ -1.36\,x_1 + 0.95\,x_2 + 3.75\,\boxed{x_3} &=& 3.61 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 &=& \frac{1}{6.25}(2.59 \qquad - 2.08\,x_2 + 1.44\,x_3) & \quad x_{1,k+1} = \frac{1}{6.25}(2.59 - 2.08\,x_{2,k} + 1.44\,x_{3,k}) \\ x_2 &=& \frac{1}{4.16}(5.22 - 1.78\,x_1 \qquad - 0.44\,x_3) & \leadsto x_{2,k+1} = \frac{1}{4.16}(5.22 - 1.78\,x_{1,k+1} - 0.44\,x_{3,k}) \\ x_3 &=& \frac{1}{3.75}(4.61 + 1.36\,x_1 - 0.95\,x_2 \qquad) & \quad x_{3,k+1} = \frac{1}{3.75}(4.61 + 1.36\,x_{1,k+1} - 0.95\,x_{2,k+1}) \end{array}$$

Start: Setze z.B. $x_{2,0} = 0$, $x_{3,0} = 0$.
8 Schritte.

Vergleiche mit den exakten Werten!

Versuche:

$A \cdot \vec{x} + \vec{b}$

$$\begin{array}{rcl} 1\,\boxed{x_1} + 2\,x_2 + 3\,x_3 &=& 2.59 \\ 2\,x_1 + 3\,\boxed{x_2} + 4\,x_3 &=& 5.22 \\ -1\,x_1 + 1\,x_2 + -1\,\boxed{x_3} &=& 3.61 \end{array}$$

30 Schritte. Was passiert?

Probl. 3 **Geg.:** $P_1 = (-2; 2),\ P_2 = (\frac{1}{2}; 0),\ P_3 = (2; 0),\ \tan(\alpha(P_3)) = 2$

Versuche, eine Polynomkurve 3. Grades durch $P_1,\ P_2,\ P_3$ zu legen.
$\leadsto\ f(x) = a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$

Mathematica-Plot der Kurve?

Ersetze $P_2 = (\frac{1}{2}; 0)$ durch $P_2 = (-\frac{1}{2}; 0)$ und suche den Wendepunkt (Mathematica-Plot).

Probl. 4 Ein A4-Blatt ($210\, mm \times 297\, mm$) wird 4 mal so gefaltet, dass an jeder Ecke ein Quadrat entsteht. Nachdem die 4 Quadrate weggeschnitten worden sind, entsteht durch die Faltung ein Schachteldeckel. Dieser wird als Notbehausung einer Maus in einem Käfig verwendet werden. Wie gross muss die Quadratseite x gewählt werden, damit das Volumen maximal wird?
Mit dem 4 abgschnittenen Quadraten der Seitenlänge x wird ähnlich verfahren. Man faltet jedes Quadrat bei jeweils $\frac{x}{3}$ und erhält nach wegschneiden der neuen Restquadrate 4 kleine kubische Deckel. Berechne x so, dass der Gesamtinhalt des Schachteldeckels und der kubischen Deckel zusammen maximal wird.

Probl. 5

$$f(x) = a(x-1)(x+1)$$

In den Nullstellen werden die Tangenten gezogen. Die x–Achse bildet mit den Tangenten ein Dreieck. Berechne den Punkt des Dreiecks auf der y–Achse in Abhängigkeit von a.

Probl. 6 Berechne die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} zu f.

(a)

$$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x} = x^{(\frac{1}{5})}$$

(b)

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

Berechne die Ableitung von $f^{-1}(x)$.

Probl. 7 Gegeben sei $f(x) = \frac{1}{2}\,(x+1)(x-1)(x-2)$. An den Stellen $x = -2$ und $x = 3$ wird die Sehne gezogen. Berechne diejenigen Punkte auf der Kurve, in denen die Tangente die gleiche Steigung hat wie die gegebene Sehne.