Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ A1 06 ◇

Vektorielle analytische Geometrie: Punkte, Geraden, Ebenen, Kreise, Kugeln Tangenten u.s.w.

Probl. 1 Punkt, Ortsvektor — (nachlesen in der Literatur):

Ein Punkt P kann in einem Koordinatensystem durch seinen Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ gegeben werden. Das ist derjenige Vektor, der durch den Pfeil vom Ursprung O zum Punkt P repräsentiert wird. Beispiel: $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $P = P(1, 2, 3)$. Mache eigene Beispiele.

Probl. 2 Parametergleichung der Geraden — (nachlesen in der Literatur):

Eine Gerade g ist durch zwei Punkte P_0 und P_1 festgelegt. Daher genügt es, z.B. P_0 als Aufpunkt und $\vec{a} =\overrightarrow{P_0P_1}$ als Richtungsvektor zu verwenden. Jeden weiteren Punkt auf der Geraden erhält man dann, indem man den Richtungsvektor geeignet streckt:
$\overrightarrow{0P}\,(t) =\overrightarrow{0P_0} +t\ \overrightarrow{P_0P_1}=\overrightarrow{OP_0} +t\,\vec{a}$.
Beispiel: $\overrightarrow{OP_0}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ zeigt auf den Punkt $P(-1; 4; -1) \in g$. Mache eigene Beispiele.

Probl. 3 Parametergleichung der Ebene — (nachlesen in der Literatur):

Eine Ebene Φ ist durch drei Punkte P_0, P_1 und P_2 festgelegt. Daher genügt es, z.B. P_0 als Aufpunkt und $\vec{a} =\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\vec{b} =\overrightarrow{P_0P_2}$ als Richtungsvektoren zu verwenden, $\overrightarrow{P_0P_1} \nparallel \overrightarrow{P_0P_2}$. Jeden weiteren Punkt auf der Ebene erhält man dann, indem man die Richtungsvektoren geeignet streckt:
$\overrightarrow{0P}\,(\lambda, \mu) =\overrightarrow{0P_0} +\lambda\ \overrightarrow{P_0P_1} +\mu\ \overrightarrow{P_0P_2}=\overrightarrow{OP_0} +\lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$.
Beispiel: $\overrightarrow{OP_0}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}$ zeigt auf den Punkt $P(-3; 2; -2) \in \Phi$.
Mache eigene Beispiele.

Probl. 4 Vektorgleichung des Kreises oder der Kugel — (nachlesen in der Literatur):

Ein Kreis oder eine Kuges ist bestimmt durch ihren Mittelpunkt M und den Radius R. Es gilt für alle Punkte P der Peripherie: $\mid \overrightarrow{MP} \mid = R \;\Rightarrow\; \mid \overrightarrow{MP} \mid^2 = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = R^2 = const.$.
Damit ist die Vektorgleichung schon gegeben.
Beispiel: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R = 10 \;\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow\; R^2 = 10^2 = 100 = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2.$
Liegt ein Punkt auf der Kugel, so muss er obige Gleichung erfüllen. Mache eigene Beispiele.

Probl. 5 Koordinatengleichung der Gerade in der Grundebene — (nachlesen in der Literatur):

Wir kennen für die Gerade g die Funktionsgleichung: $y = m\,x + b$. Diese lässt sich umformen: $m\,x + (-1)\,y + b = 0$. Die letzte Gleichung wiederum dürfen wir mit irgend einer Zahl ungleich 0 multiplizieren, ohne dass die Gleichung die Gültigkeit verliert: $a\,m\,x + a\,(-1)\,y + a\,b = 0$. Da hier $m = 0$ möglich wäre, wollen wir an Stelle von $a\,(-1)$ allgemeiner $a\,q$ zulassen mit irgend einer Zahl q. Das gibt wieder eine Geradengleichung, denn für $q \neq 0$ können wir daraus wieder die Funktionsgleichung zurückgewinnen. Für $q = 0$ erhalten wir $a\,m\,x + a\,b = 0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{b}{m},\; m \neq 0$, denn m und q können nicht gleichzeitig 0 gewählt werden, weil das nur zur Gleichung $b = 0$ fühern würde. $b = 0$ ist aber von allen Punkten erfüllt, also nicht nur von den Punkten auf einer Geraden. Für $q = 0$ erhalten wir wie eben berechnet ein fixes x. y dagegen darf beliebig sein. Das ergibt eine zur x–Achse senkrechte Gerade.
Wir schreiben nun allgemeiner: $A\,x + B\,y + C = 0$. Diese Gerade schneidet die x–Achse in P_1 mit $x = -\dfrac{C}{A}$ (y=0) und die y–Achse in P_2 mit $y = -\dfrac{C}{B}$ (x=0). Daraus berechnet man, dass der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ senkrecht auf dem „Koordinatenvektor“ $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ steht ($\perp$, denn das Skalarprodukt wird 0). $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ heisst daher „Normalenvektor“ zur Geraden g. Man entnimmt ihn sofort der Gleichung $A\,x + B\,y + C = 0$. Diese Gleichung heisst daher „Koordinatengleichung“. Über die Länge von $\vec{n}$ kann man vorerst nichts sagen. Mache eigene Beispiele.

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

Beispiel 1: Vektorrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Vektorrechnung
http://de.wikipedia.org/wiki/Spatprodukt
http://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Lineare_Algebra

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html