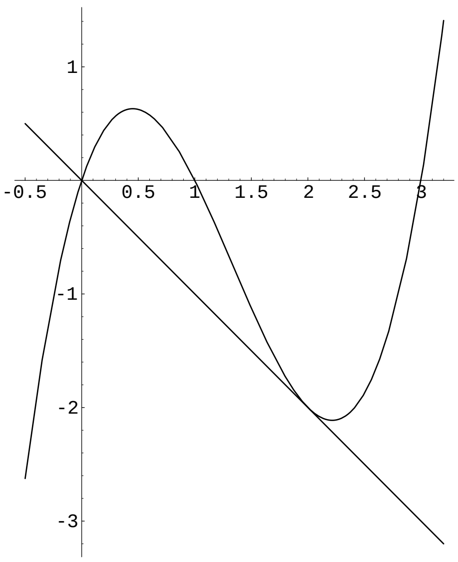
Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ A2 06 ◇

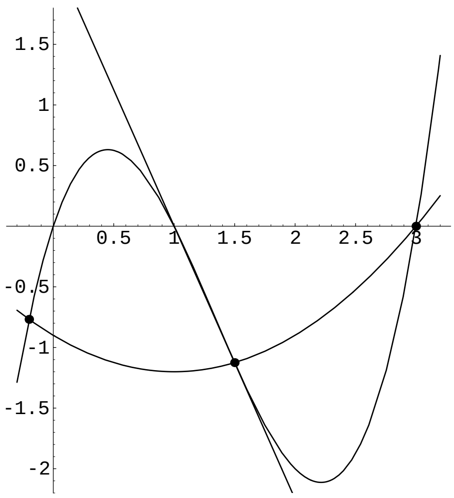
Stoffgruppe 6: Beispiele von Problemen mit Steigungen von Kurventangenten

Probl. 1



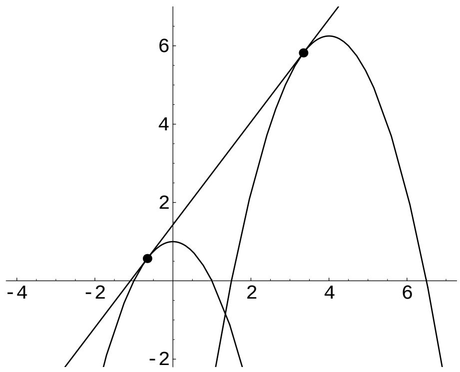
Durch die Punkte $P_1(6;0)$, $P_2(1;0)$, $P_3(3;0)$ soll eine Funktionskurve $f(x) = x^2 + b\,x + c$ gelegt werden. Von P_1 wird eine Tangente $t(x)$ an die Kurve gezogen. Wo berührt die Tangente die Kurve?
von f wissen wir wegen den durch die Punkte gegebenen Nullstellen: $f(x) = (x-0)(x-1)(x-3) = x^3-4\,x^2+3\,x$. Es gilt $t(x) = a\,x$ und $a = f\,'(x_0) = 2\,x_0^2-8\,x_0+3$ für den Berührungspunkt $P_0(x_0, f(x_0)) = P_0(x_0, t(x_0))$. Damit ist $a\,x_0 = x_0^3 - 4\,x_0^2 + 3\,x_0$. Damit hat man zwei Gleichungen für den Berührungspunkt, aus denen sich x_0 und a berechnen lassen:
$a = -1$, $x_0 = 2$, $f(x_0) = -2$.

Probl. 2



Durch drei gegebene Punkt soll eine Kurve gezogen werden. Auf den ersten Blick scheint die gezeigte Parabel die best passende Kurve zu sein. Nun kennt man im mittleren Punkt aber auch die Tangentenrichtung. Damit ergibt es sich, dass die gezeigte quadratische Parabel keineswegs passt. Die jetzt am besten passende Kurve ist die gezeigte kubische Parabel. Man sieht daraus, wie wichtig hier die Tangente wird. Aus Messungen sieht man, dass die kubische Parabel durch die oben verwendete Funktion $f(x) = x^3 - 4\,x^2 + 3\,x$ gegeben ist.

Probl. 3



Durch zwei Funktionen
$f_1(x) = -(x-1)(x+1)$ und
$f_2(x) = -(x-1.5)(x-6.5)$ sind zwei Kurven definiert (siehe Bild).Gesucht ist eine gemeinsame Tangente $t(x)$.
Durch die Gleichungen
$t(x) = a\,x + b$,
$t(x_1) = f_1(x_1)$,
$t(x_2) = f_2(x_2)$,
$a = t\,'(x_1) = f_1'(x_1)$,
$a = t\,'(x_2) = f_2'(x_2)$ hat man vier Glei-chungen für die Unbekannten a, b, x_1, x_2. Damit verfügt man über ein Gleichungssystem, das lösbar ist. Man erhält als Näherung:
$t(x) = 1.43066 + 1.3125\,x$,
$x_1 = -0.65625, x_2 = 3.34375$.

Probl. 4 Studiere den Inhalt von Internetseiten, auf denen Probleme mit Tangenten zur Sprache kommen. Beispiel:

`http://www.netschool.de/mat/dirs/dui_0.htm`