Test $\diamondsuit$ **B1–07//08–03** $\diamondsuit$

Wichtig: $\heartsuit$ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
$\clubsuit$ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
$\spadesuit$ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
$\diamondsuit$ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
$\heartsuit$ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 Integriere von Hand:

(a) $\int (x^3 - 2\,x^2) \cdot \ln(x)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_0^1 \frac{a}{(x+1)(x+3)}\,dx = 1 \;\Rightarrow\; a = \,?$

(c) Bestimme c so, dass das Integral 0 ist: $\int\limits_{-2}^{3} (x+2) \cdot x \cdot (x-3) + c\,x\,dx.$

(d) $\int\limits_1^3 (\cos(x)\,e^{\sin(x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}})\,dx = \,?$

Probl. 2 Berechne mit Hilfe der Potenzreihe von e^x eine Näherung für $\int\limits_0^x (e^{(t^2)} - 1)\,dt$ $(x_0 = 0,\;\; n = 10)$.

Probl. 3 Berechne den Konvergenzradius von

$$f(x) = \cos(x) + 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^3 x + \left(\frac{8}{9}\right)^6 x^2 - \left(\frac{8}{9}\right)^9 x^3 + \left(\frac{8}{9}\right)^{12} x^4 - \ldots \pm \ldots$$

Probl. 4 Beantworte die nachfolgenden Fragen:

(a) Was ist die Richtungsableitung einer Funktion $f(x,y)$ in einem Punkt $P_0(x_0,y_0)$ in Richtung $P_1(x_1,y_1)$?

(b) Was ist der Gradient einer Funktion $f(x,y)$ in einem Punkt $P_0(x_0,y_0)$?

(c) Sei $f(x,y) = 2 + x\,(x-2)\,(x+4) - (y^2-1)$. Berechne die Richtungsableitung von $f(x,y)$ für $P_0(1,2)$ in Richtung $Q_0(4,-4)$.

(d) Suche allfällige Extrema von $f(x,y)$ und begründe plausibel, ob es sich um ein Minimum oder um ein Maximum handelt.

Probl. 5 (a) Löse die Differentialgleichung $y''(x) + y(x) = 0$ unter den Bedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$.
Hinweis: Lösungen von Gleichungen 2. Ordnung der Art $y''(x) \pm y(x) = 0$ setzen sich zusammen aus Funktionen der Art $\sin(a\,x)$, $\cos(b\,x)$ und $e^{c\,x}$. Probiere zuerst mit möglichst einfachen Koeffizienten a, b, c.

(b) Löse die Differentialgleichung 1. Ordnung $y'(x) \cdot (x+3) = \frac{x}{(y(x))^3}$.
Verwende die Separationsmethode. Benenne die Integrationskonstante mit C.

%

Probl. 6 Einfache Anwendungen (nachdem die Aufgaben von der 1. Seite bearbeitet worden sind): (Die Einheiten dürfen hier weggelassen werden.)

(a) Berechne von der Fläche $f(x) = 8 - x^3$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$ das Flächenträgheitsmoment I_y durch Integration.

(b) Berechne von der Fläche $f(x) = 8 - x^3$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$ das Flächenträgheitsmoment I_x durch Integration.

(c) Berechne alsdann auch das mit I_y und I_x verbundene polare Trägheitsmoment.

(d) Linkfrage: Erkläre kurz und prägnant die begriffliche Bedeutung des aus der Physik stammenden Begriffs „Trägheitsmoment“ und dessen Sinn auch in der Physik.

Probl. 7 Einfache Anwendungen (nachdem die Aufgaben von der 1. Seite bearbeitet worden sind):

Die Funktion $f(x) = e^{-x}$ wird zwischen $x = 0$ und $x = 5$ um die x–Achse rotiert. Dadurch entsteht eine Mantelfläche eines horizontal umgelegten Kühlturm eines thermischen Kraftwerks. (Die Einheiten sind nicht genannt. Sie dürfen hier weggelassen werden.)

(a) Berechne die Mantelkurvenlänge numerisch.

(b) Berechne den Inhalt der Mantelfläche (Rotationsfläche) numerisch.

(c) Berechne den Volumeninhalt des Kühlturms.

(d) Kann $f(x)$ als vereinfacht gerechnete Biegelinie eines mit Einzelkräften belasteten Balkens in Frage kommen? (Kurze Begründung.)

Probl. 8 Einfache Anwendungen (nachdem die Aufgaben von der 1. Seite bearbeitet worden sind):

Eine anfangs ruhende kugelförmige Masse der Grösse $1\,kg$ wird $t_1 = 1$ Sekunde lang mit der gemessenen Beschleunigung $a(t) = \cos(t)\,m/s^2$ horizontal beschleunigt. (Die Einheiten dürfen hier jetzt weggelassen werden.)

(a) Berechne den Impuls p nach der Zeit t_1.

(b) Linkfrage: Erkläre soweit möglich den in der Physik wichtigen Begriff „Impuls“ sowie den Zusammenhang zum Begriff der Kraft.

(c) Berechne die in dieser Zeit zurückgelegte Weglänge $s(t_1)$.

(d) Linkfrage: Berechne für diese Bewegung die umgesetzte potentielle Energie W von der Wegmarke $s_0 = 0$ bei $t = 0$ bis zu s_1 bei t_1.

Probl. 9 Zusatz (wenn alles sonst gelöst):

$$y\,' = \frac{y - 2\,x + 1}{y - 1} \rightsquigarrow \quad \text{Richtungsfeld?}$$

Viel Glück!

WIR1 07/08