Test ◇ **B2 02** ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

Probl. 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Berechne $C = A^2$ und $M = 2(A+B) - 3(A^T - B^T)^T + 5(C - 2A)$.

(b) Berechne F so, dass $A \cdot F \cdot B = E$ gilt.

Probl. 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Berechne $\det(A)$ von Hand.

(b) Berechne $\det(7 \cdot A)$.

(c) Berechne $\det(A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1})$ (hundert Faktoren) $:= \det((A^{-1})^{100})$.

Probl. 3 Gegeben sind zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ mit $a_{ik} = i + k$ und $(b_{ik}) = i - k + 2$ (mit $i, k = 1, 2, 3$). Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$ sowie $A \cdot B + B \cdot A$.

Probl. 4 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ x & 4 & x^2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Untersuche, für welche x die Inverse von A nicht existiert.

Probl. 5 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus. Zeige den Lösungshergang. Entscheide, ob es eine, keine oder unendlich viele Lösungen gibt und untersuche, was die Dimension der Lösungsmenge ist.

Probl. 6 $f(x, y) = x^2 + 2\,y^2 + 4\,x - 2\,y + 3$

(a) Berechne im Punkt $P(3; 2)$ die Richtung der grössten Höhenzunahme (Einheitsvektor angeben!).

(b) Berechne im Punkt $P(3; 2)$ die Tangentensteigung in Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Berechne die Koordinaten der Punkte (des Punktes) in der Grundebene, in dem die Funktionswerte extrem sind.

Probl. 7 Durch eine Matrix M wird $\vec{e}_1$ in den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet, $\vec{e}_2$ in den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3$ in den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne M.

(b) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ von M.

(c) Berechne das Bild des Vektors $\lambda_1\,\vec{x}_1 + \lambda_2\,\vec{x}_2 + \lambda_3\,\vec{x}_3$ bei der Abbildung mit M.