Test ◇ E+M1 02 S2 ◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Zu einer Aufgabe gehört eine Skizze, falls das Sinn macht!*

Lineare Abbildungen

Probl. 1 Berechne jeweils die Eigenwerte und die Eigenvektoren:

(a) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Probl. 2 (a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})$.

Wie gross muss a sein, damit alle Eigenwerte und Eigenvektoren reell sind?

(b) Wähle $a = -3$ und bilde dann den Vektor $\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ab.

In welche entsprechenden Vektoren kann man den Bildvektor $A \cdot \vec{v}$ aufspalten?

(c) Wähle $a = 4$ und bilde dann den Vektor $\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ab.

In welche entsprechenden Vektoren kann man den Bildvektor $A \cdot \vec{v}$ aufspalten?

Was ist in diesem Falle anders als im vorhergehenden Fall?

Probl. 3 Gegeben ist $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $\det(B)$.

(b) Für eine unbekannte Matrix M gilt $M \cdot \vec{v}_1 = 2 \cdot \vec{v}_1$, $M \cdot \vec{v}_2 = -4 \cdot \vec{v}_2$, $M \cdot \vec{v}_3 = 1 \cdot \vec{v}_3$. Berechne M sowie $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}$.

(c) Berechne M falls gilt: $M \cdot \vec{v}_1 = 2 \cdot \vec{v}_1$, $M \cdot \vec{v}_2 = -4 \cdot \vec{v}_2$, $M \cdot \vec{v}_3 = 1 \cdot \vec{v}_2$. Was ändert sich am vorhergehenden Resultat?

Probl. 4 Gegeben ist eine Projektionsrichtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ sowie eine Ebene Φ :

$\vec{v}(\lambda, \mu) = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Weiter kennen wir den Winkel $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

(a) Berechne die Projektionsmatrix P für die Projektionsrichtung $\vec{u}$ und die Ebene Φ.

(b) Berechne die Projektion Q' des Punktes $Q = (7, 2, 6)$, $\overrightarrow{OQ'} = P \cdot \overrightarrow{OQ}$.

(c) Projiziere Q' in die Grundebene $(x \times y)$. Der Bildpunkt dort sei Q''. Drehe dann $\overrightarrow{OQ''}$ mit Ursprung als Zentrum in der Grundebene um den Winkel $+\alpha$. Berechne den Bildpunkt Q'''.

Probl. 5 Gegeben seien die oben genannten Matrizen M_3 sowie B. X erfüllt die Gleichung $B^T \cdot X \cdot M_3 = M_3 \cdot B^T$. Berechne, falls möglich, die Matrix X.

Viel Glück!