Test $\diamondsuit$ E+M1–08/09–03 $\diamondsuit$

Wichtig: $\heartsuit$ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
$\clubsuit$ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
$\spadesuit$ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
$\diamondsuit$ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
$\heartsuit$ **Alle lösbaren Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
$\spadesuit$ Unlösbare Aufgaben sind zu kommentieren.
$\clubsuit$ Dokumentechtes Schreibzeug!

Aufgaben aus der Vektor– und Matrizenrechnung sowie Eigenwerttheorie

Probl. 1 Gegeben ist ein überbestimmtes Gleichungssystem $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit

$$M = M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob das gegebene System tatsächlich überbestimmt (Lösungsmenge leer) ist, oder ob es vielleicht linear abhängige Zeilen und damit eine Lösung hat.

(b) Bekanntlich gilt für Matrizen $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. Untersuche damit, ob $S = M^T \cdot M$ symmetrisch ist, d.h. ob $S = S^T$ gilt.

(c) Untersuche, ob das Gleichungssystem $M^T \cdot M \cdot \vec{x} = M^T \cdot \vec{b}$ eine Lösung hat und berechne allenfalls diese Lösung.

(d) In $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ wird mit jeder Zeile eine Gerade definiert. Skizziere die drei Geraden möglichst exakt und zeichne die allfällige Lösung von $(M^T \cdot M) \cdot \vec{x} = (M^T \cdot \vec{b})$ in die Skizze ein. Beurteile damit, falls möglich, ob das Verfahren mit $(M^T \cdot M) \cdot \vec{x} = (M^T \cdot \vec{b})$ eine brauchbare Näherung liefert.

Probl. 2 Gegeben sind die Gleichungssysteme $M_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ und $M_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob eines der beiden Systeme lösbar ist und berechne allenfalls die Lösung(en).

(b) Berechne die Ordnung (= Dimension(Urbildraum)) der beiden Systeme.

(c) Berechne in allfälligen Fällen, in denen Lösungen vorhanden sind, die Dimension des Lösungsraumes (=Dimension(Kern)).

(d) Berechne den Rang der Matrix M_2.
(*Hinweis:* Den Rang kann man entweder direkt berechen. Man kann aber auch obige Resultate zur Hilfe nehmen und den Rangsatz anwenden.) %

Probl. 3 Gegeben ist eine Ebene Φ durch den Ursprung und die Vektoren $\vec{a}$ sowie $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Konstruiere eine Matrix M_3, welche einen Punkt um die Normalachse n durch O auf Φ um einen Winkel von $+30^o$ oder -30^o dreht (eine der beiden Möglichkeiten wählen). Die Normalachse n ist gegeben durch den Normalenvektor $\vec{n}$ auf Φ.

(b) Drehe den Punkt $P_0(3, 8, 6)$ mittels M_3 um n.

Hinweis: Betrachte $\overrightarrow{OP_0} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{n}$ im System der Basis $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$. Man kann nun sofort eine Matrix A_3 aufschreiben, die Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ auf $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ abbildet. A_3^{-1} bildet daher $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ auf $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ab. So kann man jetzt auch $\overrightarrow{OP_0}$ abbilden. $\vec{e}_3 \perp (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ist das Bild von $\vec{n} \perp (\vec{a}, \vec{b})$. In der Situation mit der Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kann man um die 3. Achse drehen. Anschliessend bildet man mittels A_3 zurück ab und hat den gedrehten Bildpunkt $\overrightarrow{OP_0}$ im System $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$, wobei aber letztere Vektoren in der Orthonormalbasis geschrieben sind. Wenn man das begreift, hat also gar keinen grossen Aufwand beim Rechnen. . .

Probl. 4

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch den Ursprung und $\vec{v}_1$ ist eine Achse gegeben. Weiter ist durch $\vec{v}_2$ eine Abbildungsrichtung gegeben. In dieser Richtung wird beim Abbilden die Strecke von der Achse zu jedem Punkt in Abbildungsrichtung um -2 gestreckt. Es soll nun das Quadrat abgebildet werden, das durch $P_1(1, 1)$, $P_2(2, 1)$, $P_3(2, 2)$, $P_4(1, 2)$ gegeben ist.

(a) Konstruiere die Abbildungsmatrix.

(b) Berechne die Bildpunkte.

(c) Fertige eine saubere Skizze an mit Achsen, Fixpunkten der verlängerten Kanten der Figuren auf der Achse und Hilfslinien durch die Eckpunkte für die Abbildungsrichtung.

Probl. 5 Siehe Spezialblatt.

Viel Glück!