Test ◇ **E+M1–09/10–01** ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 Erkläre so gut wie möglich, was die folgenden Matlab-Befehle (Octave-Befehle) machen resp. welche Ausgabe zu erwarten ist:

```
(a) [sqrt(2); cos(pi);]*cos(pi)          (b) x=1.9; X=1e-4; x*X

(c) b=realmax; c=b+1e+308                (d) u=[3,4,6]; v=[1,2,3]; cross(u,v)

(e) b=[3.4; 2.9; 6; -4.76; 8]; b*10      (f) a=[3.4 2.9 6 -4.76 8]; a(2)+a(3)
```

Probl. 2 Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3\,a\,x+2\,y+3\,z &= 1\\ 2\,x+2\,a\,y+4\,z &= 1\\ 3\,x+4\,y+a\,z &= 1 \end{aligned}$$

(a) Benutze die Cramerschen Regeln um herauszufinden, für welche Werte von a das System nicht lösbar ist.

(b) Löse des System im Falle $a=1$ exakt (Resultat in gemeinen Brüchen).

(c) Bestimme im Falle $a=3$ die Dimension des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Systems, falls eine Lösung existiert.

(d) Sei $P_0=P_0(1,1,1)$ ein Punkt. $\mathbb{L}_{\,inh,2}$ sei die Menge der Lösungen des Gleichungssystems mit den ersten beiden Gleichungen für $a=2$. $\mathbb{L}_{\,inh,2}$ besitzt eine geometrische Bedeutung. Gesucht ist die Distanz von P_0 zu $\mathbb{L}_{\,inh,2}$ (Dezimalbruch).

Probl. 3 Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix},\ \vec{v}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix},\ \vec{v}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\ \vec{w}=\begin{pmatrix}10\\12\\2\end{pmatrix}.$

(a) Untersuche, ob die Vektoren $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ linear abhängig sind.

(b) Sei $\vec{w}=\lambda_1\,\vec{v}_1+\lambda_2\,\vec{v}_2+\lambda_3\,\vec{v}_3$. Berechne die Streckungsfaktoren λ_i, falls solche existieren.

Probl. 4 (a) In einem Koordinatensystem wird eine Gerade g durch den Ursprung O und durch den ersten Oktanten im $\mathbb{R}^3$ derart gelegt, dass der Winkel zwischen g und jeder Achse immer gleich gross ist. Berechne diesen Winkel in Altgrad.

(b) Ein Würfel mit dem Mittelpunkt in O wird ist im Koordinatensystem so positioniert, dass der Eckpunkt $E_1 = E_1(10, 10, 10)$ ist. Skizziere den Würfel so, dass die drei von E_1 ausgehenden Kanten in deren Schnittpunkten S_1, S_2, S_3 die Achsen schneiden und berechne die Distanz von E_1 zu diesen Schnittpunkten.

(c) Berechne die Kantenlänge des Würfels.

(d) Berechne das Volumen des Körpers mit den Eckpunkten O, S_1, S_2, S_3, E_1.

Probl. 5 In einem Koordinatensystem sind die Punkte $P_1 = P_1(4, 1)$ und $P_2 = P_2(2, 3)$ gegeben. P_3 entsteht, indem man P_2 um $+68.44^o$ um O dreht.

(a) Berechne die Koordinaten von P_3.

(b) Berechne den Inhalt des von $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{0P_2} + \overrightarrow{P_1P_3}$ aufgespannten Parallelogramms.

Probl. 6 Gegeben sind zwei Geraden im Raum: $g_1 : \vec{x}_1 = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}_1$ sowie $g_2 : \vec{x}_2 = \vec{r}_2 + \mu\,\vec{a}_2$. Dabei ist $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Sei $P_0 = P_0(10, 1, -2)$.

(a) Untersuche, ob die Geraden windschief sind.

(b) Berechne den kürzesten Abstand zwischen den Geraden, falls sie sich nicht schneiden.

(c) Durch $\Phi : \ \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}_1 + \mu\,\vec{a}_2$ ist eine Ebene definiert. Berechne die Distanz des Punktes P_0 von der Ebene Φ.

Probl. 7 In einem Koordinatensystem sind die Punkte $M = P_1 = P_1(4, 1)$ und $P_2 = P_2(2, 3)$ gegeben. M ist Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch den Peripheriepunkt P_2 definiert ist.
Weiter ist $P_0 = P_3(-6, -2)$ ein äusserer Punkt, von dem aus die Tangenten an den Kreis konstruiert werden sollen.

(a) Berechne die beiden Tangentialpunkte T_1 und T_2. (Koordinaten als Dezimalbrüche angeben.)

(b) Berechne die Länge des Tangentenabschnittes $|\overline{P_0T_1}|$. (Dezimalbruch.)

(c) Von P_0 aus wird eine Sekante so gezogen, dass die dadurch im Kreis ausgeschnittene Sehne die Länge 1 hat. Berechne die Länge des Sekantenabschnittes von P_0 aus bis zum Punkt, wo die Sekante erstmals auf den Kreis trifft. (Dezimalbruch.)

Viel Glück!