Test ◊ E+M1–2010–FS–01 ◊

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◊ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle lösbaren Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♠ Unlösbare Aufgaben sind zu kommentieren.
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Diverses aus Vektor– und Matrizenrechnung sowie Eigenwerttheorie

Probl. 1 Gegeben sind zwei Geraden:

$$g_1 : \ \vec{v_1}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \ \vec{v_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schneiden sie sich? — Berechne ihren Abstand, falls sie sich nicht schneiden.

Probl. 2 Gegeben ist eine Ebene $\Phi : \ \vec{v}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $Q(5; 15; 1)$ wird an Φ gespiegelt. L ist dabei der Lotfusspunkt. Der gespiegelte Vektor $\overrightarrow{LP'}$ wird anschliessend in den Vektor $\overrightarrow{LP''} = 2 \cdot \overrightarrow{LP'}$ gestreckt.

(a) Berechne die Koordinaten von L.

(b) Berechne die Koordinaten von P''.

Probl. 3 Gegeben sind zwei Matrizen: $M_1 = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Eigenwerte von M_1.

(b) Berechne die Eigenvektoren von M_1 in der normierten Form (dezimal).

(c) Berechne die Eigenwerte von M_2.

(d) Berechne die Eigenvektoren von M_2 in der normierten Form (dezimal).

(e) Was stellt man fest, wenn man die Resultate von M_1 und M_2 vergleicht?

(f) Berechne $M_1 \cdot M_2$ und $M_2 \cdot M_1$. Was stellt man fest?

(g) Berechne die Eigenwerte von $M_1 \cdot M_2$. Was stellt man fest?

(h) Berechne die Eigenvektoren von $M_1 \cdot M_2$ in der normierten Form. Feststellung?

(i) Berechne die EW und EV von $M_1 \cdot M_2 \cdot M_1$. Was stellt man fest?

Probl. 4 Die drei Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ werden in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix A zusammengefasst.
Ebenso fasst man die Vektoren $\vec{b}_1 = 2 \cdot \vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix B zusammen.

(a) Berechne die Eigenwerte von A.

(b) Berechne die Eigenwerte von B.

(c) Gibt es zwischen den Eigenwerten der beiden Matrizen Gemeinsamkeiten?

(d) Gibt es zwischen den Eigenvektoren der beiden Matrizen Gemeinsamkeiten? (Nummerierung beachten, dezimal!)

(e) Berechne die Eigenwerte von $A \cdot B$ und auch diejenigen von $B \cdot A$.

(f) Berechne die Summen der Eigenwerte von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob irgendwo ein Zusammenhang besteht.

(g) Berechne die Produkte der Eigenwerte von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob irgendwo ein Zusammenhang besteht.

(h) Berechne die Determinanten von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob ein Zusammenhang zu der vorhergehenden Teilaufgabe besteht.

(i) Gegeben ist der Punkt $Q(0, -2, 2)$. Sei $\overrightarrow{OP}_1 = A \cdot \overrightarrow{OQ}$ und $\overrightarrow{OP}_2 = B \cdot \overrightarrow{OQ}$. Berechne $\overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1$. Erkläre das Resultat.

Probl. 5 Der Ursprung O und die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmen die Ebene Φ. Dazu sei $P = P(-1, 2, 3)$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix S für die Spiegelung an Φ.

(b) Spiegele damit P, d.h. berechne den Bildpunkt P_1.

(c) Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = \dfrac{\pi}{5}$ in der Grundebene (um die z–Achse).

(d) Drehe damit P_1 um O, d.h. berechne den Bildpunkt P_2.

(e) Spiegele den Punkt P_2 mittels S zurück, d.h. berechne den Bildpunkt P_3.

(f) Konstruiere eine Projektionsmatrix, mit der ein Punkt auf Φ projiziert werden kann. (Man überlege sich dazu, was die Projektion mit der Spiegelung zu tun hat und wie man die Eigenwerte der Speigelungsmatrix abändern müsste, um eine Projektion zu erhalten.)

(g) P_4 sei die Projektion von P_3. Bereche P_4.

Probl. 6 Man konstruiere eine Translationsmatrix, welche für einem Vektor in homogenen Koordinaten eine Translation um $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ ausführt.

Probl. 7 Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär seien:

$$A \cdot (A + X) \cdot A + A + A^{-1} = A \cdot A^T + E$$

Viel Glück!

WIR1