Test ◇ M1–10–02a ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle lösbaren Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♠ Unlösbare Aufgaben sind zu kommentieren.
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Probl. 1 **Achtung: In dieser Aufgabe zählen nur richtige Resultate. Passieren Folgefehler, so sind die später erreichten falschen Resultate wertlos. Daher sind Kontrollen und Plausibilitätsüberlegungen angebracht!**

Durch $A = A(3;\, 1;\, 4)$ ist die Achse $\overline{OA}$ gegeben. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Dazu kennt man noch $P_1 = P_1(2;\, 0;\, 6)$.

(a) Wähle den Vektor $\vec{b} = \vec{e}_1$ und konstuiere mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ sowie $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{c}$ zwei Vektoren, welche senkrecht auf $\vec{a}$ stehen. Berechne damit die Einheitsvektoren $\vec{e}_a,\ \vec{e}_c,\ \vec{e}_d$ für die Richtungen $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d},$ numerisch und schreibe danach die Resultate so auf, dass sie beim Korrigieren sofort sichtbar sind.

(b) Konstruiere eine Matrix M_1, welche $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_a$ abbildet und $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_c$ sowie $\vec{e}_3$ in $\vec{e}_d$.

(c) Bilde mit Hilfe von M_1^{-1} den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}_1$ in $\overrightarrow{OP'}_1$ ab.

(d) Konstruiere zwei Matrizen, welche $\overrightarrow{OP'}_1$ um die $\vec{e}_1$–Achse (mit Blick Richtung O) in $\overrightarrow{OP'}_2$ um den Winkel $\dfrac{2\,\pi}{3}$ und $\overrightarrow{OP'}_1$ um $\dfrac{4\,\pi}{3}$ in $\overrightarrow{OP'}_3$ drehen.

(e) Bilde $\overrightarrow{OP'}_2$ und $\overrightarrow{OP'}_3$ wieder mit M_1 zurück ab in $\overrightarrow{OP}_2$ und $\overrightarrow{OP}_3$. Damit erhält man eine Dreieckspyramide $OP_1P_2P_3$ mit der Spitze in O. ($P_2,\ P_3 = ?$)

(f) Berechne das Volumen der Pyramide.

Probl. 2 Gegeben ist die Ebene $\Phi: \quad \vec{r} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b},\ \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(a) Konstruiere eine Matrix M_2, welche den Ortsvektor irgend eines Punktes P in Richtung $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf Φ projiziert.

(b) Projiziere das Dreieck $\triangle(ABC)$ auf Φ. Das heisst: Berechne die Koordinaten der projizierten Punkte $A',\ B',\ C'$. $A = A(1;0;0),\ \ B = B(0;1;0),\ \ C = C(0;0;1)$.

(c) Berechne den Flächeninhalt von $\triangle(ABC)$ und vergleiche diesen mit dem Inhalt von $\triangle(A'\,B'\,C')$.

Probl. 3 $M_3 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von M_3

(b) Finde ein Polynom $P_2(X)$ mit $X = M_3$, dessen Wert $P_2(M_3)$ gerade M_3^{-1} ist: $P_2(M_3) = c_2\, M_3^2 + c_1\, M_3 + c_0\, E$. *Hinweis: Caley–Hamilton.*

Probl. 4 $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Berechne M_4^2, M_4^3, M_4^4. Was fällt auf?

(b) Berechne $M_4^2 \cdot M_4^2$, $M_4^3 \cdot M_4$ und $M_4 \cdot M_4^4$. Was fällt auf?

Probl. 5 Gegeben sind die Gleichungssysteme $M_5 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ und $M_5 \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuche, ob eines der beiden Systeme lösbar ist und berechne dann allenfalls die Lösung(en).

(b) Berechne die Ordnung (= Dimension(Urbildraum)) der beiden Systeme.

(c) Berechne in allfälligen Fällen, dann wenn Lösungen vorhanden sind, die Dimension des Lösungsraumes (=Dimension(Kern)).

(d) Berechne den Rang der Matrix M_5.
(*Hinweis:* Den Rang kann man entweder direkt berechen. Man kann aber auch obige Resultate zur Hilfe nehmen und den Rangsatz anwenden.)

Probl. 6 Zusatzaufgabe:

Gegeben ist die Gleichung $\quad -2\, x_1^2 + \frac{4\, x_2\, x_1}{\sqrt{3}} + 2\, x_2^2 = 52$.

(a) Untersuche ob man hier das Muster $a\, x_1^2 + b\, x_1\, x_2 + c\, x_2^2$ in der Form $\vec{x^T} \cdot S \cdot \vec{x}$ mit Hilfe von $S = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$ und $X^{-1} = X^T$ schreiben kann.

(b) Schreibe, falls das möglich ist, die eingangs gegebene Gleichung in der Form $\vec{x^T} \cdot S \cdot \vec{x} = \vec{x^T} \cdot X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} \cdot \vec{x}$ mit $X^{-1} \cdot \vec{x} = \vec{y}$ etc. Was ist die einfachste Form der entstehenden Gleichung und was stellt sie geometrisch dar?

Viel Glück!