Testvorbereitung ◇ E+M1p–(11/12)–02 Vorb ◇

Wichtig am Test:
♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 $M = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 4 \\ 8 & -11 & 4 \\ 8 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne die Eigenwerte von M.
(b) Berechne die Eigenvektoren von M. Erkläre die Eindeutigkeit.
(c) Berechne die Eigenwerte von M^{-1}.
(d) Berechne die Eigenvektoren von M^{-1}. Erkläre die Eindeutigkeit.
(e) Berechne die Eigenwerte von M^T.
(f) Berechne die Eigenvektoren von M^T. Erkläre die Eindeutigkeit.
(g) $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ definieren zusammen mit O ein Parallelogramm „Par“. Berechne den Inhalt „$Inh(Par)$“ und auch denjenigen des Bildparallelogramms „$Inh(M \cdot Par)$“.
(h) Berechne die Determinante von M und vergleiche das Resultat mit $\dfrac{Inh(M \cdot Par)}{Inh(Par)}$.

Probl. 2 Die Matrix A definiert eine Abbildung, welche die Fixgerade $g: \ \vec{x}(t) = t \cdot \vec{v}_1$ hat ($\vec{v}_1$ wie in der letzten Aufgabe) und welche den Vektor $\vec{v}_2$ ($\vec{v}_2$ wie in der letzten Aufgabe) in $\vec{v}_2\,' = -2\,\vec{v}_2$ sowie $\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ in $\vec{w}\,' = 3\,(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ abbildet.

(a) Berechne die Matrix A.
(b) Sei $\overrightarrow{OQ} = 2\,\vec{v}_1 - 3\,\vec{v}_2$. Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,'$ von $\overrightarrow{OQ}$ bei der Abbildung mit A.
(c) Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,''$ von $\overrightarrow{OQ}\,'$ bei der Abbildung mit A.

Probl. 3 Gesucht ist eine Matrix B, welche einen Vektor an der durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie O gegebenen Ebene orthogonal spiegelt.

(a) Berechne B.
(b) Bilde mit B den Punkt $P(5; 4, 2)$ ab.
(c) Sei $B^2 = B \cdot B$, $\ B^{k+1} = B^k \cdot B$. Berechne B^{100}.

Probl. 4 Löse die Matrixgleichung nach X auf und vereinfache, falls dies möglich ist.

$$(U^{-1} \cdot W)^{-1} \cdot (U^{-1} \cdot W) \cdot X \cdot W^T - E = (((U^{-1})^T \cdot W^T)^{-1})^T$$

%

Probl. 5 Gegeben sind die Punkte

$$P_1(5;\,0;\,1),\;\; P_2(4;\,1;\,-1),\;\; P_3(3.5;\,2;\,10),\;\; P_4(2;\,6;\,1),\;\; P_5(-1;\,5;\,8),\;\; P_6(-2;\,12;\,0).$$

(a) Berechne eine Matrix G, welche P_1 in P_4 und P_2 in P_5 und P_3 in P_6 abbildet.

(b) Wenn man den Punkte P_1 um $\varphi = +12^o$ um die x–Achse dreht, erhält man den Punkt P_7. (Durch die Drehung wird die positive y–Achse in Richtung positive z–Achse bewegt.) Erstelle die Drehmatrix D_φ. numerisch.

(c) Berechne P_7 mit Hilfe von D_φ.

(d) Bilde mit Hilfe von G den Punkt P_7 ab.

Probl. 6 Gegeben ist die Matrix $S = H+H^T,\;\; H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, sowie der Vektor $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Um welchen Typ Matrix handelt es sich bei S?

(b) Berechne die Eigenwerte von H und vergleiche diese mit denjenigen von S. Sieht man einen Zusammenhang?

(c) Berechne $\vec{a}_2 = H \cdot \vec{a}_1,\;\; \vec{a}_3 = H^T \cdot \vec{a}_1,\;\; \vec{a}_4 = S \cdot \vec{a}_1$. Zusammenhang?

(d) Sei $A = H + H^{-1}$. Berechne $A \cdot \vec{a}_1$.

Probl. 7 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor einer Geraden g durch O. Der Punkt $Q(-1,\,4,\,2)$ wird um $\varphi = +\frac{\pi}{8}$ um die Achse g gedreht (im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung $\vec{a}$). Berechne die Drehmatrix sowie den Bildpunkt $Q\,'$.

WIR1-12

Viel Glück!