Test ◇ E+M1 02 2012 S2 ◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Zu einer Aufgabe gehört immer auch eine Skizze! Numerische Genauigkeit: 4 Ziffern (ab der 1. Ziffer ungleich 0).*

Matrizen, Abbildungen, Eigenwerte. Zeit: 1 Std.

Probl. 1 $$M = \begin{pmatrix} -27 & 24 & -20 & 2 \\ -32 & 29 & -24 & 2 \\ -6 & 6 & -5 & 0 \\ -40 & 36 & -32 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Eigenwerte von M.

(b) Berechne die Eigenvektoren von M und ermittle, welche der folgenden Vektoren sich durch maximal 2 Eigenvektoren linear kombinieren lassen:
$\vec{h}_1 = \{0, 1, 1, -2\}^T$, $\vec{h}_2 = \{1, 2, 1, 0\}^T$, $\vec{h}_3 = \{-2, 0, 3, 4\}^T$, $\vec{h}_4 = \{1, 1, 0, 1\}^T$.

(c) Berechne die Eigenwerte von M^{-1}.

(d) Berechne die Eigenvektoren von M^{-1} und ermittle wiederum, welche der obigen Vektoren $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$, $\vec{h}_4$ sich durch maximal 2 Eigenvektoren linear kombinieren lassen.

(e) Berechne die Eigenwerte von M^T.

(f) Berechne die Eigenvektoren von M^T und ermittle wiederum, welche der obigen Vektoren $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$, $\vec{h}_4$ sich durch maximal 2 Eigenvektoren linear kombinieren lassen.

(g) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ definieren zusammen eine Matrix „W", welche mit O zusammen einen Spat definiert. Berechne den Inhalt „$Inh(W)$" und auch denjenigen des Bildspats „$Inh(M \cdot W)$".

(h) Berechne die Determinante von M und vergleiche das Resultat mit $\dfrac{Inh(M \cdot W)}{Inh(W)}$.

Probl. 2 Die Matrix A definiert eine Abbildung, welche die Fixgerade $g: \ \vec{x}(t) = t \cdot \vec{v}_1$ hat ($\vec{v}_1$ wie in der letzten Aufgabe) und welche den Vektor $\vec{v}_2$ (ebenso $\vec{v}_2$ wie in der letzten Aufgabe usw.) in ${\vec{v}_2}' = -\vec{v}_2$ sowie $\vec{v}_3$ in ${\vec{v}_3}' = -2\,\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ in ${\vec{v}_4}' = \vec{v}_4 + \vec{v}_4$ abbildet.

(a) Berechne die Matrix A.

(b) Sei $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}'$ von $\overrightarrow{OQ}$ bei der Abbildung mit A.

(c) Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}''$ von $\overrightarrow{OQ}'$ bei der Abbildung mit $A + A^T$.

%

Probl. 3 Gesucht ist eine Matrix B, welche einen Vektor an der durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ sowie O gegebenen Ebene Φ in Richtung $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spiegelt resp. abbildet.

(a) Berechne B.

(b) Bilde mit B den Punkt $P(2; 4, 5)$ ab.

(c) Sei $B^2 = B \cdot B,\ \ B^{k+1} = B^k \cdot B$. Berechne B^{100}.

Probl. 4 Löse die Matrixgleichung nach X auf und vereinfache, falls dies möglich ist.

$$U = \begin{pmatrix} -37 & 32 \\ 20 & -19 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 57 & -5 \\ 32 & -28 \end{pmatrix}.$$

$$(U \cdot W^{-1}) \cdot (U \cdot W^{-1})^{-1} \cdot (-X) \cdot U^T + E = (((W^{-1})^T \cdot U^T)^{-1})^T.$$

Probl. 5 Gegeben sind die Punkte

$$P_1(0;\, 1;\, 1),\ \ P_2(1;\, 0;\, -1),\ \ P_3(2;\, 1;\, 0),\ \ P_4(2;\, 6;\, 1),\ \ P_5(-1;\, 5;\, 8),\ \ P_6(-2;\, 12;\, 0).$$

(a) Berechne eine Matrix G, welche P_1 in P_4 und P_2 in P_5 und P_3 in P_6 abbildet.

(b) Wenn man den Punkte P_1 um $\varphi = +30^o$ um die z–Achse dreht, erhält man den Punkt P_7. (Durch die Drehung wird die positive x–Achse in Richtung positive y–Achse bewegt.) Erstelle die Drehmatrix D_φ. numerisch.

(c) Berechne P_7 mit Hilfe von D_φ.

(d) Bilde mit Hilfe von G den Punkt P_7 ab.

Probl. 6 Gegeben ist die Matrix $S = H + H^T,\ \ H = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, sowie der Vektor $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Um welchen Typ Matrix handelt es sich bei S?

(b) Berechne die Eigenwerte von H und vergleiche diese mit denjenigen von S. Sieht man einen Zusammenhang?

(c) Berechne $\vec{a}_2 = H \cdot \vec{a}_1,\ \ \vec{a}_3 = H^T \cdot \vec{a}_1,\ \ \vec{a}_4 = S \cdot \vec{a}_1$. Zusammenhang?

(d) Sei $A = H + H^{-1}$. Berechne $A \cdot \vec{a}_1$.

Probl. 7 $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor einer Geraden g durch O. Der Punkt $Q(-1,\, 0,\, 4)$ wird um $\varphi = +\dfrac{\pi}{6}$ um die Achse g gedreht (im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung $\vec{a}$). Berechne die Drehmatrix sowie den Bildpunkt $Q\,'$.

WIR1-12

Viel Glück!