Test ◇ **E+M1 02 Analysis** ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

Probl. 1 **(22 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen **von Hand**. Erkläre kurz die Schritte:

(a) $f(x) = 4\,x^4 + 5\,x^5 - 6\,x^6 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $\int f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_1^2 f(x)\,dx = \,?$

iii. $\int\limits_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx = \,?$

iv. $\dfrac{d}{d\,t}(\displaystyle\int_{x=0}^{x=t} f'(x) + 1\,dx) = \,?$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(\sin(\frac{x}{3} - 3))^2}$

i. $\int f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_{t=1}^{t=u} \dfrac{d}{d\,t}\displaystyle\int_2^t f(x)\,dx = \,?$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x+2)\,(x-2)}$

i. $\int\limits_3^5 f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_3^\infty f(x)\,dx = \,?$

(d) $f(x) = 7ln(x) - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}}$

i. $\int\limits_1^e f(x)\,dx = \,?$

(e) $f(x) = x \cdot (ln(x))^2 + x$

i. $\int f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_{x=t}^{x=2\,t} f(x)\,dx = \,?$

Probl. 2 **(12 Punkte)**

(a) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f(x) = \sin(2\,x)$, $x_0 = 2\,\pi$, $n = 8$. Dabei kann die Potenzreihenentwicklungen von $\sin(x)$ verwendet werden. Die Potenzen von $2\,\pi - x$ sollen nicht ausmultipliziert werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)

(b) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f_1(x) = \cos(x^2) + e^{-x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 8$. Dabei kann die Potenzreihenentwicklungen von e^x und von $\cos(x)$ verwendet werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)

(c) Berechne approximativ mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung bis zum n–ten Glied:
$\int\limits_{-2}^{2} f_1(x)\,dx = ?$ $(n = 8)$. Vergleiche das Resultat mit dem numerisch besseren Resultat des Integtrals aus dem Rechner und mit dem Resultat für $n = 100$.

(d) Ermittle den Konvergenzradius der Potehnzreihen von $f_1(x)$.

Probl. 3 **(15 Punkte)**

$f(x, y) = \sin(x\,y) + \sin(x)$, $D_f = \{(x, y) \mid x \in [0, \pi],\ y \in [-\pi, \pi]\}$

(a) Skizziere die Funktion (3D) und skizziere die Höhenlinienkarte.

(b) Ermittle die Punkte, in denen f ein Maximum oder ein Minimum annimmt.

(c) Berechne die Richtungsableitung im Punkte $(1, 1)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) Berechne aus dem vorhin gewonnenen Resultat die Tangentensteigung im Punkte $(1, 1)$. Zeiche die Tangente in die Skizze ein.

(e) Über der Kurve $g(x, y) = y^2 - x = 0$ wird auf der Funktionsfläche ein Weg definiert. Berechne im angegebenen Definitionsbereich Punkte, in denen die Funktion maximale und minimale Werte annimmt.

Probl. 4 **(6 Punkte)**

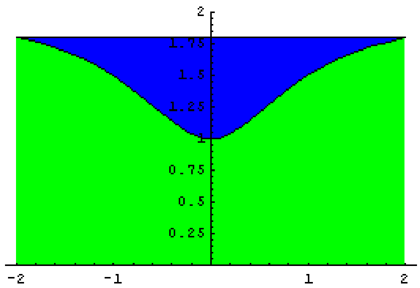
Gegeben ist die Gleichung $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{g} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{10^4}{g+b}$, die druch Anfügen eines Korrekturterms aus der bekannten Abbildungsgleichung der geometrischen Optik entstanden ist. Es gemessen wurde $g = 14.28\,cm \pm 0.10\,cm$ und $b = 25.62\,cm \pm 0.25\,cm$.

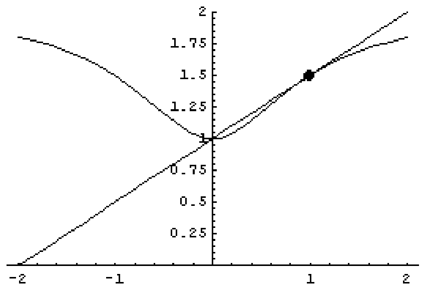
Berechne $f \pm \Delta f$ in cm und überlege anschliesend, ob der Ausdruck 10^4 im Korrekturterm vielleicht verwechselt worden ist und 10^{-4} sein müsste.

Probl. 5 **(12 Punkte)**

Die nachstehende links Figur zeigt eine Rinne, welche mittels einer Funktion $f(x) = \dfrac{a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0}{x^2 + b_0} - 2$ wiederzugeben ist. Rechts sieht man die Kurve mit einer Tangente im Punkte $(x = 1, y = f(1))$. Die Tangente hat die Funktionsgleichung $g(x) = \dfrac{x-1}{d} + \dfrac{3}{2}$, d aus der Skizze. Dazu ist $z = h(x) = 2$ Asymptote.

Skizzen:





(f ist symmetrisch zur y–Achse (gerade Funktion). Zudem ist $f(0) = 1$ und $f(1) = 1.5$.)

(a) Vereinfache die Funktionsgleichung durch Ausnutzung der Symmetrie und $f(0) = 1$, $f(1) = 1.5$, so dass $f(x)$ keine weiteren Parameter mehr enthält.

(b) Berechne den Inhalt der in der Skizze gezeigten Querschnittsfläche zwischen der Kurve und der horizontalen Gerade zwischen den Punkten $P(-2/f(-2))$ und $P(2/f(2))$.

(c) Berechne den Volumeninhalt der entsteht, wenn die eben berechnete Querschnittsfläche zwischen der Kurve und der horizontalen Gerade um die x–Achse rotiert wird.