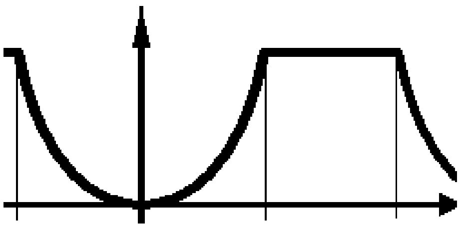
Test ◇ **M2–10/11–02–02** ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

Probl. 1 Gegeben ist eine Funktion wie im Bilde gezeigt.



$$f(t) = \begin{cases} t^2 & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (\frac{\pi}{2})^2 = const. & t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \\ f(t + n\,2\,\pi) & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(a) Berechne die reellen Koeffizienten a_0 sowie $a_1, \ldots a_4$ und $b_1, \ldots b_4$ der Fourierreihe numerisch und präsentiere die Resultate in einer **Tabelle**.

(b) Berechne damit numerisch die absoluten Differenzen zwischen Näherungen und Funktionswerten $|\tilde{f}_4(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2})|$ sowie $|\tilde{f}_4(\frac{3\pi}{2}) - f(\frac{3\pi}{2})|$.

(c) Skizziere die Funktion sowie die berechnete Näherung möglichst exakt. Was ist zur erreichten Genauigkeit auf einen Blick zu sagen?

(d) Könnte man aus der Beziehung $f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2$ und der Fourierreihe einen Näherungswert von π berechnen? (Erwartet wird eine mathematische Erklärung).

Probl. 2 Gegeben ist die Funktion $g_1(t) = -t, \;\; t \in [-1, 1), \;\; T = 2$.

(a) Bestimme die Fourierreihe von $g_1(t)$.
(Anzugeben sind die ersten 4 Koeffizienten numerisch).

(b) Berechne damit die Fourierreihe von $g_2(t) = -3\,t + 2, \;\; t \in [-1, 1), \;\; T = 2$.
(Anzugeben sind die ersten 4 Koeffizienten numerisch.)

(c) Kann man aus den Fourierkoeffizienten von $g_1(t)$ diejenigen von $g_3(t) = -\frac{1}{2}\,t^2$, $t \in [-1, 1), \;\; T = 2$, berechnen? (Erwartet wird eine mathematische Erklärung).

(d) Es gilt ${g_1}'(t) = -1$. Gilt auch ${\tilde{g}_1}'(t) = -1$?
(Erwartet wird eine mathematische Erklärung).

Probl. 3 Gegeben sind die Messwerte $\{(0, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 3.5), (5, 7)\}$ $= \{(x_1, y_1), \ldots, (x_6, y_6)\}$. Man hat nun Grund zur Annahme, dass sich diese Messwerte periodisch fortsetzen, d.h. dass somit gilt: $y_k = y_{k+6}$ für alle k.

(a) Man beabsichtigt nun mittels DFT eine soweit wie möglich genaue Fourierreihe $\tilde{f}_6(t)$ für diese Messserie zu bestimmen. Berechne daher die Koeffizienten c_k numerisch (Wiedergabe in Tabellenform. Symmetrisch: c_k, $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$)

(b) Stelle die erhaltene Funktion $\tilde{f}_6(t)$ sowie die Messwerte in einer möglichst genauen Skizze dar. (Reelle Näherung!)

(c) Berechne den Wert der Fourierreihe $\tilde{f}_6(3.5)$. (Reelle Näherung!)

(d) Berechne die Abweichung des Werts der Fourierreihe $\tilde{f}_6(3.5)$ vom Wert der linearen Interpolation zwischen (3, 2) und (4, 3.5).

Probl. 4 Gegeben ist $f(t) = \cos(\frac{2\,t}{3}) + \sin(0.4\,t - 1)$.

(a) Skizziere die Funktion. (Hinweis: Probiere zuerst mit $t \in [0, 100]$.)

(b) Entscheide mathematisch, ob die Funktion f periodisch ist. Falls ja, so ermittle die Periode T.

(c) Versuche die Funktion in eine reelle Fourierreihe $\tilde{f}(t)$ zu entwickeln und berechne dazu numerisch $\tilde{f}_6(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{6} a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \sin(k\,\omega\,t)$. Berechne damit $|f(10) - \tilde{f}_6(10)|$ numerisch.

(d) Skizziere die Funktion nochmals möglichst exakt zwischen 0 und T, aber diesmal zusammen mit der erhaltenen Fourierreihe. Beantworte die Frage, ob die Genauigkeit der beiden Funktionen anhand der genauen Skizze noch unterscheidbar sein kann.

(e) Quadriere die Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k und berechne damit die Approximation einer neuen Fourierreihe $\tilde{h}_6(t) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{6} a_k^2 \cos(k\,\omega\,t) + b_k^2 \sin(k\,\omega\,t)$. Untersuche, ob das etwa gerade die Fourierreihe von $(f(t))^2$ ergeben könnte. Mache dazu einen Test: Berechne $\frac{(f(t))^2 - \tilde{h}_6(t)}{\tilde{h}_6(t)}$. Kommentiere das Resultat!

Probl. 5 Versuche von folgenden Funktionen die Fouriertransformierte herauszufinden:

(a) $f(x) = \cos(2\,x) + i\,\sin(2\,x)$.

(b) $f(x) = \sin(2\,x) + i\,\cos(2\,x)$.

(c) $\hat{f}(\omega) = \cos(2\,\omega) + i\,\sin(2\,\omega)$.

Probl. 6 Sei $H(x)$ die Einheitssprungfunktion mit der Sprungstelle $x = 0$ und $H(x - k)$ diejenige mit der Sprungstelle $x = k$. Sei $f(x) := \pi\,(H(x + \pi) - H(x - \pi))$.

(a) Skizziere die Funktion $f(x)$ und berechne die Fouriertransformierte von $f(x)$.

Viel Glück!