Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 01 ◇

Repetition und Ausbau Vektoralgebra und Vektorgeometrie

(Die nachfolgenden Aufgaben sind aus ehemaligen Serien zur Vektorgeometrie des vormaligen Diplomstudienganges B in leicht veränderter Form übernommen worden.)

Teil 1

Probl. 1 $A(-3;5;2)$ und $B(1;-3;4)$ sind zwei Punkte im $\mathbb{R}^3$. Ermittle die Komponenten der Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$.

Probl. 2 $A(2;1;3)$, $B(3;0;2)$, $C(5;-1;-3)$ sowie $D(3;1;-1)$ bezeichnen vier Punkte im $\mathbb{R}^3$. Welche der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AA}$ sind zueinander parallel?

Probl. 3 Gegeben sind die Punkte $A(-4;5;1)$, $B=(2;6;3)$, $C=(6;-2;-1)$, $D(12;-1;1)$ und $E(6;1;2)$. Welche der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OE}$ sind parallel und welche sind gleich?

Probl. 4 Berechnen Sie die Komponenten der Vektoren $3\,\vec{a}$, $\vec{a}-2\,\vec{b}$ bei $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Probl. 5 Gesucht ist der Einheitsvektor $\vec{e}$, welcher parallel und auch gleichgerichtet (also nicht antiparallel) zum Vektor $\vec{a}$ aus der letzten Aufgabe ist.

Probl. 6 Liegen die drei Punkte $A(2;-3;5)$, $B(7;-7;6)$ und $C(27;-23;10)$ auf einer Geraden?

Probl. 7 Bestimme x und y so, dass der Punkt $C(x;y;4)$ auf der Geraden durch die Punkte $A(3;-4;2)$ und $B(7;2;1)$ liegt.

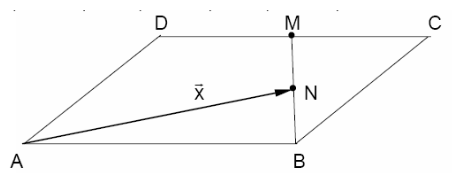
Probl. 8 Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind die Eckpunkte $A(1;1;1)$, $C(-5;3;2)$ und $D(-2;-4;-2)$ gegeben. Berechne die Koordinaten des Eckpunktes B.

Probl. 9 Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind die Eckpunkte $A(3;-2;5)$ und $B(7;5;10)$ sowie der Schnittpunkt $E(5;4;6)$ der Diagonalen gegeben. Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte C und D.

Probl. 10 Berechne die Koordinaten des Punktes M, der die Strecke $\overline{AB}$ halbiert. $A(1;3;-2)$, $B(5;-1;4)$.

Probl. 11 Gesucht sind die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(-4;2;-1)$, $B(7;-1;5)$ und $C(0;2;2)$.

Probl. 12 Berechne die Komponenten des Vektors $\vec{x}$. $ABCD$ bezeichnet ein Parallelogramm. Die Punkte M und N halbieren die Seiten $\overline{CD}$ und $\overline{BM}$. $A(0;-2;1)$, $B(-1;5;0)$, $D(1;-1;4)$.



Probl. 13 A, B, C sind die Ecken eines Dreiecks und S bezeichnet seinen Schwerpunkt. Drücke den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ durch die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ aus.

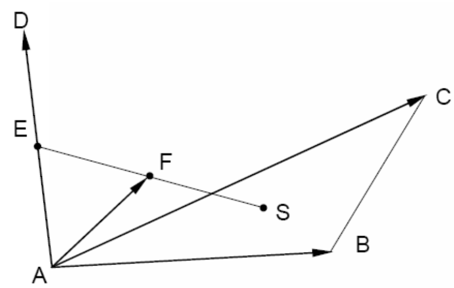
Probl. 14 Beweise: Im Dreieck teilen sich zwei Schwerlinien im Verhältnis 1 : 2.

Probl. 15 Beweise: Die Seitenmitten eines räumlichen Vierecks liegen in einer Ebene und bilden ein Parallelogramm.

Teil 2

Probl. 1 Drücke den Vektor $\overrightarrow{AF}$ in Figur 1 durch die linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ aus.

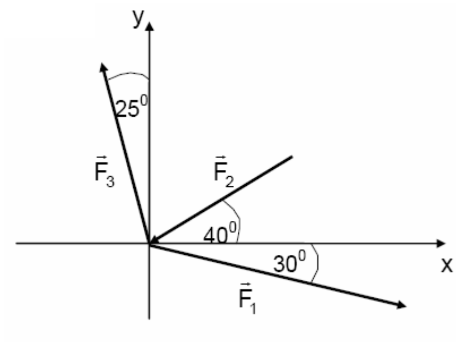
S = Schwerpunkt von ABC,
E = Mittelpunkt von $\overline{AD}$,
F = Mittelpunkt von $\overline{ES}$.



Figur 1

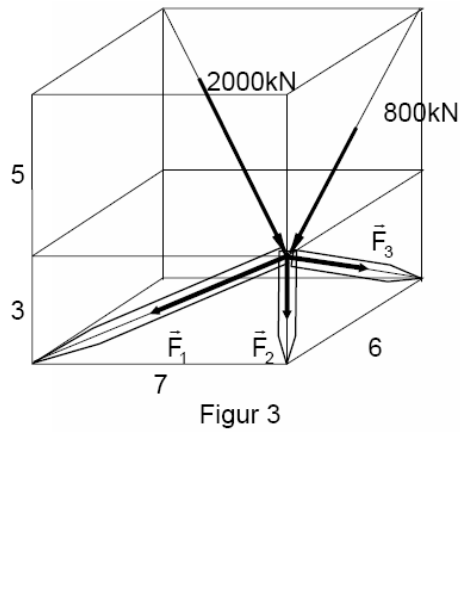
Probl. 2 Berechne in Figur 2 den resultierenden Kraftvektor. Wie gross ist diese Kraft betragsmässig?

$|\vec{F_1}| = 190\,kN$,
$|\vec{F_2}| = 80\,kN$,
$|\vec{F_3}| = 100\,kN$.



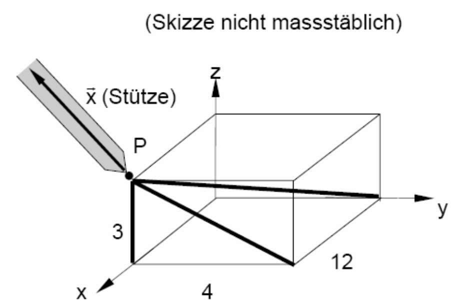
Figur 2

Probl. 3 Das Dreibein in Figur 3 wird mit zwei Kräften belastet. Berechne die Kräfte $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ und $\vec{F_3}$ in den Stäben.
Gebe die Kräfte auch betragsmässig an.



Figur 3

Probl. 4 In welcher Richtung $\vec{x}$ muss die Stütze im Punkt P in Figur 4 aufgesetzt werden, damit im Belastungsfall die von dieser Stütze auf das Dreibein übertragenen Druckkräfte betragsmässig gleich gross sind?



Figur 4

Probl. 5 Wähle aus den folgenden 5 Vektoren 3 Vektoren aus, die linear unabhängig sind:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Probl. 6 Zeige, dass die Vektoren $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ und $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$ Basen des $\mathbb{R}^3$ bilden und gebe die Komponenten des Vektors $\vec{x}$ bezüglich diesen Basen an.
$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Probl. 7 Liegen die vier Punkte $A(2,-3,5)$, $B(7,-7,5)$, $C(0,1,7)$ und $D(2,3,6)$ auf einer Ebene?