Übungen in lin.Alg.+Geom. $\diamond$ E+M II / 05 $\diamond$

Wiederholung Ausbau Matrizenrechnung

Probl. 1 Gegeben ist die Matrix A sowie die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ in einem KKS:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne A^{-1}, $\det(A)$ sowie $\det(A^{-1})$.

(b) Berechne $A \cdot \vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Was ist am Resultat bemerkenswert?

(c) Berechne $A^{-1} \cdot \vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Was ist am Resultat bemerkenswert?

Probl. 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne A^{-1}, $\det(A)$ sowie $\det(A^{-1})$.

(b) Sei E die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Löse $A \cdot \vec{x} = \lambda\, \vec{x} = \lambda\, E\, \vec{x}$ durch Umformung auf $(A - \lambda\, E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$.
Hinweis: Wenn dieses Gleichungssystem in x und y eine Lösung ungleich der Null–Lösung hat, so kann die Matrix $A - \lambda\, E$ bekanntlich nicht regulär sein. Was folgt daher für $\det(A - \lambda\, E)$? (Der entstehende Ausdruck heisst „charakteristisches Polynom“.)

Berechne $\det(A - \lambda\, E)$. Was für ein Polynom entsteht? Löse damit die charakteristische Gleichung $\det(A - \lambda\, E) = 0$!

Die gefundenen Lösungen λ_1 und λ_2 heissen „Eigenwerte“.

Berechne zu λ_1 und zu λ_2 jeweils die Vektoren $\vec{x}$ aus der Eigenwertgleichung

$$A \cdot \vec{x} = \lambda\, \vec{x}.$$

Untersuche das Lösungsverhalten im Falle von exakten Eigenwerten λ und im Falle von Näherungswerten für die Eigenwerte λ!

%

Eigenwertprobleme

Probl. 1 Gegeben ist die Matrix A_1:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3$.

(b) Erstelle mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren die Matrizen

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Berechne damit die Matrix $M_1 = S_1 \cdot D_1 \cdot S_1^{-1}$.

(c) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M_1 und vergleiche diese mit denen von A_1. Was stellt man fest?

Probl. 2 Gegeben sind die Eigenwerte einer Matrix A_2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Erstelle mit Hilfe dieser Werte die Matrizen

$$D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechne damit die Matrix $M_2 = S_2 \cdot D_2 \cdot S_2^{-1}$.

(c) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M_2 und vergleiche diese mit den gegebenen Werten von D_2 und S_2. Was stellt man fest und was ist zu A_2 zu bemerken?

Probl. 3 Gegeben sind die Eigenwerte einer Matrix A_3: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Erstelle mit Hilfe dieser Werte die Matrizen

$$D_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechne damit die Matrix $M_3 = S_3 \cdot D_3 \cdot S_3^{-1}$.

(c) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M_3 und vergleiche diese mit den gegebenen Werten von D_3 und S_3. Was stellt man fest und was ist zu A_3 zu bemerken?

%

Probl. 4 Gegeben sind die Eigenwerte einer Matrix A_4: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_3 = 0$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Erstelle mit Hilfe dieser Werte die Matrizen

$$D_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechne damit die Matrix $M_4 = S_4 \cdot D_4 \cdot S_4^{-1}$.

(c) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M_4 und vergleiche diese mit den gegebenen Werten von D_4 und S_4. Was stellt man fest und was ist zu A_4 zu bemerken?

Probl. 5 Gegeben ist die Matrix A_5:

$$M_5 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

sowie der Kreis K mit dem Mittelpunkt $P_M(3; -1)$ und dem Radius $r = 1.5$.

(a) Berechne die Eigenwerte λ_1 und λ_2 sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2$ von M_5.

(b) Stelle K sowie die Eigenvektoren in einer Skizze dar.

(c) Benützt die Eigenvektoren als Basis eines neuen Koordinatensystems und stelle dieses ebenfalls in der Skizze dar.

(d) Bilde die Kreislinie mittels der Matrix M_5 ab. Benutze dazu die Skizze.
(*Hinweis: Überlege dir, wie ein Vektor in der Darstellung im neuen Koordinatensystem abgebildet wird! Benutze dabei die Eigenwerte und Eigenvektoren.*

(e) Um welchen Kurventyp handelt es sich bei der Bildkurve?