Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 13 ◇

Eigenwertprobleme: Diverse Anwendungen

Probl. 1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind die Eigenvektoren einer Matrix A. Der zu $\vec{x}_1$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_2 = 1$.

(a) Entscheide, ob die Matrix A eine Fixgerade besitzt.

(b) Konstruiere die Matrix A.

(c) Diagonalisiere A : $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ und berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von D.

(d) Berechne und vergleiche die charakteristischen Polynome $P_A(\lambda)$ und $P_D(\lambda)$ von A und D.

(e) Ermittle aus diesen Polynomen die Spur sowie die Determinante von A und D.

(f) Bestimme mit Hilfe der oben gegebenen Eigenwerten eine Matrix B, bei der die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

(g) Berechne auch für B die Spur und die Determinante mit Hilfe der Eigenwerte.

(h) Berechne die Eigenwerte von $A \cdot B$ und auch diejenigen von $B \cdot A$.

(i) Gegeben sind die Punkte $P_1(-2, -1)$, $P_2(-1, -3)$, $P_3(2, -2)$. Dadurch ist ein Dreieck $F_1 = \triangle(P_1P_2P_3)$ gegeben. Bilde dieses Dreieck mit Hilfe der Matrix A ab und berechne die Eckpunkte des Bilddreiecks $F_2 = \triangle(Q_1Q_2Q_3)$.

(j) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalten von F_1 und F_2. Sieht man einen Zusammenhang zu den Eigenwerten?

(k) Erstelle mit Hilfe eines Computers oder Taschenrechners eine Skizze von $\vec{x}_1$ und ebenso von $\vec{x}_2$ sowie von den beiden Dreiecken und arbeite die Fixpunkte bei der Abbildung des Dreiecks heraus.

Probl. 2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind die Eigenvektoren einer Matrix A und auch der Matrix B. Der zu $\vec{x}_1$ gehörige Eigenwert von A ist $\lambda_{1,A} = 2$, der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist von A $\lambda_{2,A} = 1$. Weiter ist der zu $\vec{x}_1$ gehörige Eigenwert von B gleich $\lambda_{1,B} = 1$, der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist von B $\lambda_{2,B} = -3$. Stelle die zugehörigen Abbildungen A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ in der Form $M = X \cdot D \cdot X^{-1}$ dar für die Matrizen $M = A, B, A \cdot B, B \cdot A$. Welche Erkenntnis kann man daraus gewinnen?