Übungen in Analysis ◇ E+M I / 2 ◇

Probl. 1 (a) Zeigen: $x, y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

(b) Berechne exakt: $(\frac{(2)^{\sqrt{2}}}{(4)^{\sqrt{2^3}}})^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\sqrt{2}}$

(c) $\sin(x) = x + \cos(x), \;\; x =?$

(d) Berechne exakt die erste Lösung von:
$20(5\,\cos(3\,x+2) + 7\,\sin(3\,x+2) - 1)\,\sin(3\,x-4) = 0$

(e) $(2^{\ln(2\,x-1)})^3\, 3^{\ln(\,2x-1)} = 1$

Probl. 2 Stelle Plots her:

(a) $f(x) = 3\,x - 4$

(b) $f(x) = \sin(\cos(x))$

(c) $f(x) = |x| - [\sin(x)]$

(d) $f(x) = [4\,x] - sgn(x)$

(e) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

(f) $f(x) = \cos(x^2 + x)$

(g) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}\,x^2}$

(h) $f(x) = e^{x^2}$

(i) $f(x) = e^{-x^2} - 1$

(j) $f(x) = 3\,\sin(\cos(2\,x^2+1) + x)$

(k) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$

(l) $f(x) = ln(\frac{x^2+2}{x^4+2}) - x^2$

(m) $f(x) = sgn(x^2 \cdot \sin(x - \frac{1}{x}))$

(n) $f(x) = x^4 - 2\,x + 1$

(o) $f(x) = [10\,\sin(x)]$

(p) $f(x) = x + [\frac{1}{x} + x^2], \;\; D_f = [1, 10]$

(q) $f(x) = x^x, \;\; D_f = [1, \infty)$

Probl. 3 Plot:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \sin(x) & x = n \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Probl. 4 Zeichne in Polarkoordinaten:

(a) $r(\varphi) = 2 \cdot \cos(2\,\varphi)$

(b) $r(\varphi) = 2 \cdot \cos(2\,\varphi + 1)$

(c) $r(\varphi) = 4 + 2 \cdot \sin(4\,\varphi) + \cos(16\,\varphi)$

(d) $r(\varphi) = 1 + \dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\varphi^2}{4}, \quad \varphi \in [0, 2\,\pi)$

Probl. 5 Sei $\quad f(x) = x^2 - x + 1, \;\; g(x) = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + x + 2$

$\rightsquigarrow$ Löse: $\quad f(x) \geq g(x)$

Probl. 6 Herleitung der Lösungsformel von $a\,x^2 + b\,x + c = 0$? (Koordinatensystem verschieben!)

Probl. 7 Studiere die Beschränktheit und Monotonie der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = e^{\cos(x)}$

(b) $f(x) = ln(\dfrac{x^2}{x^2+1})$

(c)

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} -\sin(x) - 2 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ +\sin(x) & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -\sin(x) + 2 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

(d) $f(x) = e^{-x^2}$

Probl. 8 Beurteile, um welche Funktionstypen es sich handelt! (Folge, konstant, linear, quadratisch, Potenzfunktion, beschränkt, mit Polen, mit Asymptoten, periodisch, D_f, W_f ...)

(a) $f(x) = \sin(\dfrac{1}{x})$

(b) $f(x) = e^{\sin(x)}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

(d) $f(x) = \tan(\sin(x))$

(e) $f(x) = 4\,x^2 - 3\,x + 2, \;\; D_f = [-1, +1]$

(f) $f(x) = [x^7]$

(g) $f(x) = sgn(x^7)$

(h) $f(x) = x^7 \cdot sgn(x^7)$

Probl. 9 Skizziere in Polarkoordinaten:

(a) $r(\varphi) = \cos(2\,\varphi) + 2$

(b) $r(\varphi) = \cos(\dfrac{\varphi}{2})$

(c) $r(\varphi) = \cos(4\,\varphi + \dfrac{\varphi}{2})$

(d) $r(\varphi) = \cos(\varphi + \dfrac{\varphi}{2}) + \dfrac{1}{3}\,\cos(3\,\varphi) + k, \;\; k = 1, 2, 3, \ldots$ etc.