

Übungen in Analysis

◇ E+M I / 16 ◇

Probl. 1 Entwickle die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe bis $n = 15$:

- (a) $f_1(x) = e^x$ und $x_0 = 0$.
- (b) $f_2(x) = e^{x^2}$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Nimm die Reihe von $f_1(x) = e^x$ und ersetze x durch x^2 .)
- (c) $f_3(x) = e^{-x^2}$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Nimm die Reihe von $f_1(x) = e^x$ und ersetze x durch $-(x^2)$.)
- (d) $f_4(x) = x \cdot e^{x^2}$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Nimm die Reihe von $f_2(x) = e^{x^2}$ und verrechne sie geeignet mit x .)
- (e) $f_5(x) = \sin(x) + \cos(x)$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Entwickle erst $f_s(x) = \sin(x)$ und $f_c(x) = \cos(x)$. Diese beiden Reihen kann man gliedweise addieren.)
- (f) $f_6(x) = \ln(x)$ und $x_0 = 1$.
- (g) $f_7(x) = \cosh(x)$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Verwende die Reihen von $f_1(x) = e^x$ und von $f_m(x) = e^{-x}$.)
- (h) $f_8(x) = \sinh(x)$ und $x_0 = 0$.
(Hinweis: Verwende die Reihen von $f_7(x) = \cosh(x)$ und differenziere gliedweise.)

Probl. 2 Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihen folgender Funktionen:

- (a) $f_1(x) = e^x$ und $x_0 = 0$.
- (b) $f_2(x) = e^{x^2}$ und $x_0 = 0$.
- (c) $f_3(x) = e^{-x^2}$ und $x_0 = 0$.
- (d) $f_4(x) = x \cdot e^{-x^2}$
- (e) $f_5(x) = \sin(x) + \cos(x)$ und $x_0 = 0$.
- (f) $f_6(x) = \ln(x)$ und $x_0 = 1$.
- (g) $f_7(x) = \cosh(x)$ und $x_0 = 0$.
- (h) $f_8(x) = \sinh(x)$ und $x_0 = 0$.

Probl. 3

- (a) Wie weit muss man $h_1(x) = \sin(x)$ um $x_0 = 0$ entwickeln, bis der Fehler in $x_1 = 2$ weniger als 0.001 beträgt?
- (b) Approximiere $h_2(x) = 7x e^{0.5(x-2)}$ durch $p_2(x)$ quadratisch und berechne den Fehler $|p_2(x) - h_2(x)|$ für $x = 2, 3, 4, 8, 16$, $x_0 = 0$.

Probl. 4 Berechne mit Hilfe der Theorie der geometrischen Reihen die Grenzwerte der folgenden Ausdrücke:

$$(a) \quad S_{\infty} = 3 \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \dots \right).$$

$$(b) \quad S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots$$

$$(c) \quad S_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

Probl. 5 Informiere dich in der Literatur über den Begriff „Sierpinski–Teppich“. Gegeben sei nun ein quadratischer „Sierpinski–Teppich“ mit der Seitenlänge $s = 1$. Berechne seinen verbleibenden Flächeninhalt, wenn alle vorgesehenen Löcher herausgeschnitten sind.