Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 14

Probl. 1 Empirisch gewonnene Daten:

151	0	161	5	171	6
152	0	162	7	172	4
153	1	163	5	173	3
154	1	164	5	174	2
155	2	165	6	175	3
156	3	166	7	176	1
157	3	167	5	177	1
158	5	168	5	178	1
159	6	169	6	179	0
160	4	170	5	180	0

Durch diese Messdaten ist eine natürliche Klasseneinteilung gegeben. Die relative Klassenhäufigkeit wird als Wahrscheinlichkeit angenommen. Skizziere die empirische Wahrscheinlichkeitsfunktion und die empirische Verteilungsfunktion.

Probl. 2 Es wird mit drei Würfeln gewürfelt. Die Summen der Augenzahlen werden als Werte der Zufallsvariablen definiert. Zeichne die ideale Wahrscheinlichkeitsfunktion und die ideale Verteilungsfunktion (Laplace–Experiment).

Probl. 3 Poisson–Verteilung, Beispiel:

Siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/Poisson-Verteilung`

Auf dem Monte Tempesta schlägt in einer Sommerwoche durchschnittlich alle 10 Minuten (t_1) ein Blitz in einen Experimentiermast auf dem Gipfel ein. Werden nun im Takt von 60 Minuten (eine Stunde) die Blitze gezählt, so würde man im Mittel 6 Blitze erwarten ($\lambda =$ Anzahl Blitze pro Stunde), die in den Mast einschlagen. $P_\lambda(n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass in der innerhalb einer Stunde (t_2) genau n Blitze in den Mast einschlagen.

(a) Berechne $P_\lambda(n)$ für $n = 0, \ldots, 20$.

(b) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung.

Probl. 4 Pascal–Verteilung, Beispiel:

Siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/Negative_Binomialverteilung`

Herr Gork Busch verkauft an einer Waffenmesse automatische Schusswaffen. Aus seiner Erfahrung ist ihm bekannt, dass er bei jedem fünften Besucher seines Messestandes Erfolg hat. Er hat beschlossen, nach dem zehnten Verkaufserfolg mit seinen Kollegen eine Flasche zu öffnen um seinen Erfolg zu begiessen. Eine Verhandlung mit einem Kunden dauert etwa vier Minuten. Die Kunden stehen wegen seinem Produkt Schlange, denn die Messen findet in Texas statt und wir erleben gerade Zeiten von grosser Unsicherheit, nicht nur wegen der Tropenstürme.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Gork Busch nach zwei Stunden seine Flasche öffnen, d.h. nach etwa dreissig Standbesuchern?

(b) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für diese Verteilung.

Probl. 5 Rechteckverteilung oder stetige Gleichverteilung, Beispiel:

Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Stetige_Gleichverteilung

Ein Zufallsgenerator soll Dezimalzahlen auf 14 Nachkommastellen zwischen 0 und 1 liefern.

(a) Beschreibe mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion das Wahrscheinlichkeitsverhalten.

(b) Berechne dazu den Erwartungswert und die Standardabweichung.

Probl. 6 Normalverteilung oder Gauss–Verteilung, Beispiel:

Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung

Bei der Produktion von Präzisionswellen mit dem Durchmesser $5.295\,mm$ ist durch Meßserien ein mittlerer Fehler (Standardfehler) von $0.003\,mm$ festgestellt worden. Da eine Grossserie von $100'000$ Stück geplant ist, soll der Durchmesser durch eine Normalverteilung mit $\sigma = 0.003\,mm$ und $\mu = 5.295\,mm$ beschrieben werden.

(a) Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Welle grösser als $0.005\,mm$ ist.

(b) Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass eine Welle dicker als $5.298\,mm$ ist.

(c) Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Welle kleiner als $0.002\,mm$ ist (Güteklasse A).

Probl. 7 Approximation duch eine Normalverteilung, Beispiel:

Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung

Für sehr große Werte von n kann diese Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden (Satz von Moivre-Laplace, zentraler Grenzwertsatz). Dabei ist der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

Für $\sigma > 3$ kann man folgende Näherung brauchen:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{k=x_1}^{x_2} \binom{n}{k} p^k \, q^{n-k} \approx \Phi(\frac{x_2 + 0.5 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1 - 0.5 - \mu}{\sigma})$$

Die Verkleinerung der unteren Grenze um 0.5 und die Vergrösserung der oberen Grenze um denselben Wert heisst **Stetigkeitskorrektur**. Damit erhält man eine bessere Approximation bei einer geringen Standardabweichung.

Problem im Anschluss an Aufgabe 4, Serie 13:

Mit einem unfaire Würfel, bei dem mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.3$ die Zahl 6 kommt, wird $100'000$ mal gewürfelt.

(a) Berechne μ und σ und entscheide, ob die obige Approximation zulässig ist.

(b) Benütze nun die obige Approximation mit der Stetigkeitskorrektur. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens $10'000$ und maximal $90'000$ mal die 6 kommt?

(c) Approximiere die Binomialverteilung durch die Normalverteilung diesmal ohne die Stetigkeitskorrektur. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens $10'000$ und maximal $90'000$ mal die 6 kommt und vergleiche das Resultat mit dem Resultat der letzten Teilaufgabe.