Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 8

Probl. 1 Normalverteilung in x, y:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y\,\sqrt{1-\varrho_{XY}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\,(1-\varrho_{XY}^2)}\cdot((\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})^2)-(2\frac{\varrho_{XY}\,(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y})+(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y})^2)}$$

Speziell: $\mu_X = \mu_Y = 0,\ \ \sigma_X = \sigma_Y = 1$

$$f_2(x,y) = \frac{1}{2\,\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

(a) Plot 3D für:
$f_1,\ f_2$ mit $\mu_X = 3,\ \ \mu_Y = 2,\ \ \sigma_X = 3,\ \ \sigma_Y = \frac{2}{3},\ \ \varrho_{XY} = \frac{1}{2}$

(b) Berechne: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x,y)\,dx\,dy,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x,y)\,dx\,dy.$

(c) $\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{0} f_2(x,y)\,dx\,dy = ?,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0} f_2(x,y)\,dx\,dy = ?,$
$\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x,y)\,dx\,dy = ?,\quad \int\limits_{-\infty}^{3}\int\limits_{-\infty}^{2} f_1(x,y)\,dx\,dy = ?$

Probl. 2 (a) $\bar{X} = X_1 + X_2,\ \ \mu_{X_1} = \mu_{X_2},\ \ \sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} \rightsquigarrow \mu_{\bar{X}} = ?,\ \ \sigma_{\bar{X}} = ?$

(b)

$$f_2(x) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma_X} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})^2},\quad F_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_2(u)\,du$$

Berechne $F_2(\infty)$ für $\mu_X = 4,\ \ \sigma_X = 5.$
Berechne $F_2(\mu)$ für $\mu_X = 4,\ \ \sigma_X = 5.$

(c)

$$f_3(x) = \frac{1}{2\,\pi\,c_1\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{(c_1\,x+c_2)-(c_1\,\mu+c_2)}{c_1\,\sigma})^2},\quad F_3(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_3(u)\cdot\frac{d\,(c_1\cdot u+c_2)}{d\,u}\,du$$

Berechne $F_3(\infty)$ für $\mu_X = 4,\ \ \sigma_X = 5.$

Probl. 3 Wahrscheinlichkeitsdichte von χ^2:

$$K_n := \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\dfrac{n}{2})},\qquad f(x,n) \;=\; \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ K_n\cdot x^{\frac{n-2}{2}}\cdot e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \end{cases}$$

(a) Berechne $K_n,\ \ n = 1,\ldots,10$

(b) Plot $f(x,n),\ \ n = 5,\ \ n = 10.$

(c) $F(x,n) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u,n)\,du \rightsquigarrow \ F(2,5) = \,?$

Probl. 4 Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion der Student–Verteilung:

$$f(z,n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z^2}{n})^{(n+1)/2}}, \quad F(z,n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{(1+\frac{u^2}{n})^{(n+1)/2}}\,du$$

(a) Plot $f(x,n),\ \ n = 10$.

(b) Plot $F(x,n),\ \ n = 10$.

Probl. 5 Gegeben ist der Datensatz $\{x_k \mid k = 1,\ldots,n\} = \{4.6,\, 4.5,\, 4.3,\, 4.7,\, 4.5,\, 4.6,\, 4.7,\, 4.5,\, 4.8\}$.

(a) Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung.

(b) Bei Daten der gegebenen Form ist man übereingekommen, dass die Standardabweichung als Standardfehler genommen werden soll. Beziffere mit der Grösse $\bar{x} \pm \Delta x$ einen Schätzer für $\mu_X \pm \sigma_X$.

(c) Gegeben ist die Funktion $Y = f(X) = \dfrac{\sin(X - X^2)}{1 - X^2} - \dfrac{1}{X}$. Berechne mit den Werten $\bar{x} \pm \Delta x$ einen Schätzer für $\mu_Y \pm \sigma_Y$.