Übungen in Analysis 3 $\diamond$ M2 13 $\diamond$

Knickung

Probl. 1 Literaturstudium:

Letzthin ist unter anderem ein Handout zum Thema „Knickung“ abgegeben worden. Studiere dieses Handout. Richte dein Augenmerk auf die unter den momentanen Randbedingungen wichtigen Differentialgleichungen.
(Rufe den Link http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/express.html auf, falls du das Handout suchst. Dieser Link ist auf die vom Aufruf der Übungen bekannte Art passwortgeschützt. Unter diesem Link findet sich auf die übliche Art ein weiterer Link zu einer Seite, von der dieser Handout stammt. Suche dort unter „Differentialgleichungen“. Loginname und Passwort sind den zugelassenen Benutzern bekannt.)

Das Thema streifende weitere Handouts finden sich passwortgeschützt wie üblich unter „Handouts“ via den Link
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MasterIndex.html sowie
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MaterialAusZweiterHand/index.html.
Informiere dich zu diesen Themen auch im Internet (z.B. Wikipedia):

http://de.wikipedia.org/wiki/Knicken
http://www.google.ch/
http://rowicus.ch/Wir/Links/LinkService/Knickung.html

Probl. 2 Knickung eines nicht eingespannten druckbelasteten Stabes mit einer hypothetischen Biegelinie

(a) Löse mit $M(y) = F\,y$ die folgenden Differentialgleichungsprobleme allgemein:

$$[\ y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(E\,I_y)}\ ] \text{ und } [\ y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(E\,I_y)},\ \ y(0) = 0\ ]$$

(b) **Vorgaben:**

Balken– oder Trägerlänge $x_L = 5\ m$
Balken–, Rohrquerschnitt: Aussenradius $R = 0.01\ m$, Innenradius $r = 0.005\ m$,
axiales Flächenträgheitsmoment $I_y = \frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$ (Masse übernommen),
Esastizitätsmodul $E = 210000 * 1000^2\ N/m^2$ (Stahl),
Kraft $F = 10^6\ N$

Löse mit $M(y) = F\,y$ und obigen Vorgaben die folgenden Differentialgleichungsprobleme:

$$[\ y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(E\,I_y)}\ ] \text{ und } [\ y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(E\,I_y)},\ \ y(0) = 0\ ]$$

(c) Löse mit $M(y) = F\,y$ und obigen Vorgaben das folgenden Differentialgleichungsproblem:

$$y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(E\,I_y)},\ \ y(0) = y(x_L) = 0$$

Was stellt man fest?

(d) Löse allgemein

$$y''(x) = -k \cdot y(x)$$

Wieviele Bedingungen hat man hier, falls man das obige Randwertproblem formuliert und wieviele Parameter hat man frei? (Wie verhält es sich mit den Nullstellen der allgemeinen Lösung und den Randbedingungen?)

(e) Löse

$$y''(x) = -(\frac{\pi}{x_L})^2 \cdot y(x),\ \ y(x) = 0$$

Berechne hier $y(x_L)$. Was stellt man fest? Setze anschliessend die Lösung in die folgende Differentliagleichung ein:

$$y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(EI_y)},\ \ y(0) = 0$$

Vergleiche darauf $\frac{F}{(EI_y)}$ mit $(\frac{\pi}{x_L})^2$. Welche Bedingung für F erhält man?

(f) Hat man nun die gesuchte Lösung der vereinfachten Knickgleichung gefunden oder ist noch ein Parameter frei, welcher sich aufgrund der bis jetzt bekannten Resultaten nicht berechnen lässt?

Probl. 3 (a) Da wir mit obiger Methode nicht weiterkommen, behandeln wir die folgende exakt formulierte Differentialgleichung für die Knickung des nicht eingespannten Stabes (Randwertproblem) mit Hilfe der Shooting–Methode:

$$y''(x) + \frac{F}{(E\,I_y)}\,y(x)\,(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}} = 0,\ \ y(x) = 0,\ \ y(x_L) = 0$$

Dazu übernehmen wir obige Wertsetzungen für die Parameter. Nur den Wert für x_L lassen wir vorerst nicht in die Gleichung einfliessen. Zudem verwandeln wir das Randwertproblem in das Anfangswertproblem:

$$y''(x) + \frac{F}{(E\,I_y)}\,y(x)\,(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}} = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = a$$

Dieses Anfangswertproblem kann man mit numerischen Methoden approximativ lösen. Die Genauigkeit der Lösung hängt dann vom betriebenen Aufwand ab. Löse das Problem numerisch! Wähle zuerst $a = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 1.0,\ 1.1$.
Versuche anschliessend a besser zu richten: $a = 1.000,\ 1.001,\ 1.002,\ \ldots, 1.057\ldots$. Wo befindet sich der beste Wert für a? Skizziere die numerische Lösung! Nenne Schranken für die Ungenauigkeit des so abschätzbaren Wertes für x_L! (Wie genau wird der vorgegebene Wert für x_L erreicht?)

Probl. 4 Knickung eines an einem Ende fest eingespannten, am anderen Ende frei geführten Stabes

Das Moment ergibt sich hier zu $M(y(x), x) = F\, y(x) - F_Q\, x$ mit den Randbedingungen $y(0) = y\,'(0) = y(x_L)$.

$$y''(x) = -\frac{M(y(x), x)}{(E\, I_y)}$$

Damit die drei Randbedingungen erfüllbar werden, leiten wir die Differentialgleichung beidseitig zweimal ab. ($\rightsquigarrow$ Problem der Ordnung 4. Damit sind 4 Bedingungen möglich!)

Formuliere das Ranswertproblem und verfahre bei der Lösungssuche wie oben bei Problem Nummer 2. Fasse die Resultate zusammen und erläutere, wie man bei der Lösung hier weiterfahren könnte.