Übungen in Analysis 4 ◇ M2 01 ◇

Probl. 1 T–periodische und 2π–periodische Funktion:

Gegeben ist die Funktion

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} t & t \in [0,\ 1) \\ f(t+n), \quad n \in \mathbb{Z} & t \notin [0,\ 1) \end{cases}$$

(a) Bestimme T.

(b) Skizziere f.

(c) $t' = t \cdot \dfrac{2\pi}{T} \ \Rightarrow\ f(t) = f(t' \cdot \dfrac{T}{2\pi}) = f_1(t') = \,?$

(d) Skizziere f_1.

Probl. 2 Trigonometrische Reihen:

(a) $s_n(t) = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \sin(k\,t)$. Skizziere die Funktion für $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$
Errate, welche Funktion durch $s_n(t)$ approximiert werden könnte.

(b) Ersetze in $s_n(t)$ das k durch k^2 und gehe gleich vor wie in der letzten Teilaufgabe.

(c) Ersetze in $s_n(t)$ den Sinus durch den Cosinus und gehe gleich vor wie in der letzten Teilaufgabe.

(d) Ersetze in $s_n(t)$ das k durch $k^{1/2}$ und gehe gleich vor wie in der letzten Teilaufgabe.

Probl. 3 Berechne für die folgenden Funktionen die Fourierkoeffizienten bis zu $n = 10$ und skizziere die zugehörigen Approximationen:

(a) $f(t) = t,\ \ I = [0,\ 2\pi),\ \ T = 2\pi$

(b) $f(t) = t,\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\pi$

(c) $f(t) = t^2,\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\pi$

(d) $f(t) = \sin(t),\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\pi$

(e) $f(t) = \sin(t+1),\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\pi$

(f) $f(t) = \sin^2(t),\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\pi$

(g) $f(t) = \cos^2(t),\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\pi$

(h) $f(t) = e^t,\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\pi$

(i) $f(t) = \cosh(t),\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\pi$