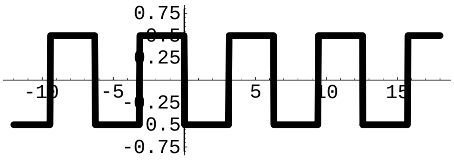
Übungen in Analysis 4 ◇ M2 02 ◇

Probl. 1



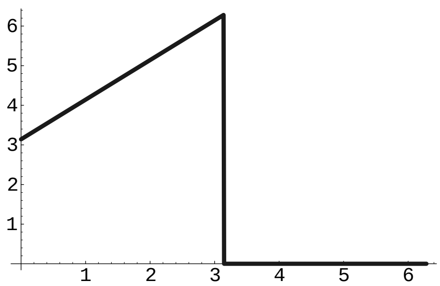
Stelle von der nebenstehend gezeigten Funktion mit einem Computer einen Plot her!

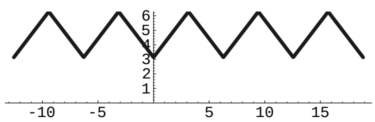
Probl. 2 Kann man die in der obigen Aufgabe gezeigte Funktion in eine Sinusreihe oder in eine Cosinusreihe entwickeln? Berechne allenfalls die ersten 10 Fourierkoeffizienten und zeichne die damit erhaltene Approximation in den Plot der letzten Aufgabe ein.

Probl. 3 Gegeben ist die unten in der Skizze links gezeigte Funktion

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} t+\pi & t \in I = [0,\ \pi) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Um zu einer Fourierreihe ausschliesslich auf dem Intervall I zu kommen, wandeln wir die Funktion ab wie in der nachstehenden rechten Skizze gezeigt.





Abgewandelte Funktion

(a) Berechne die gesuchte Fourierreihe der abgewandelten Funktion.

(b) Zeichne eine Approximation der gesuchten Fourierreihe zusammen mit der abgewandelten Funktion. Beurteile das Verhalten an den Spitzen.

(c) Differenziere die erhaltene Fourierreihe gliedweise ausser für $t = n\,\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Differenziere ebenfalls die abgewandelte Funktion ausser für $t = n\,\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Untersuche, ob die so abgeleitete Fourierreihe als Approximation der abgeleiteten Funktion tauglich ist. (Plot!)

Probl. 4 Nun soll für die in der letzten Aufgabe behandelte Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $I = [0,\ \pi)$ eine andere Approximation gesucht werden. Es soll dazu neu die folgende $4\,\pi$–periodische Funktion verwendet werden:

$$g(t) = t + \pi, \qquad t \in I = [-2\pi,\ 2\pi)$$

Mit dieser Funktion werden die Spitzen in $t = 0$ und in $t = \pi$ vermieden.

(a) Berechne damit die gesuchte Fourierreihe auf die neue Art.

(b) Zeichne die entsprechende neue Approximation der gesuchten Fourierreihe zusammen mit der abgewandelten Funktion. Beurteile das Verhalten an den Spitzen.

(c) Differenziere die erhaltene Fourierreihe gliedweise ausser für $t = n\,\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Differenziere ebenfalls die abgewandelte Funktion ausser für $t = n\,\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Untersuche, ob die so abgeleitete Fourierreihe als Approximation der abgeleiteten Funktion tauglich ist. (Plot!)

Probl. 5 Es soll für die Funktion $h(t) = f(t) - \pi,\ \ f(t)$ wie oben, auf dem Intervall $I = [0,\ \pi)$ eine Approximation gesucht werden. Dazu soll wieder eine $4\,\pi$–periodische Funktion verwendet werden:

$$m(t) = t, \qquad t \in I = [-2\pi,\ 2\pi)$$

Mit dieser Funktion werden Spitzen in $t = 0$ und in $t = \pi$ wiederum vermieden.

(a) Berechne für h die Fourierreihe.

(b) Zeichne die Fourierreihe zusammen mit der Funktion auf I.

(c) Berechne koeffizientenweise das Integral über die Fourierreihe sowie das Integral über $h(t)$. Kann man die Integrationskonstanten so wählen, dass die beiden Integrale zueinander passen? Stelle die Sache so weit wie möglich graphisch dar und beurteile die Approximation.