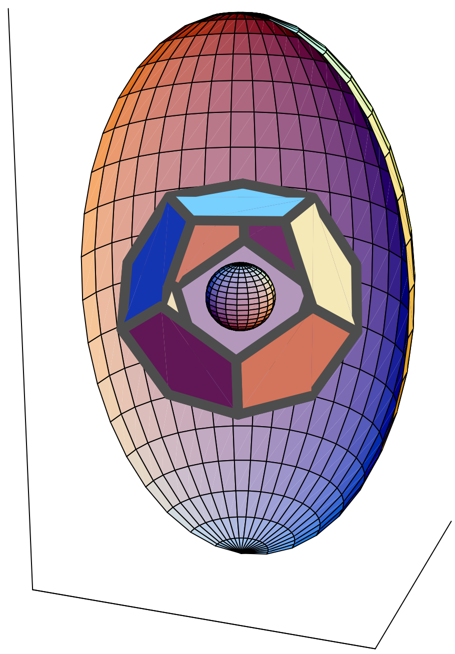
Skripte ◇ Math ◇ Arch ◇
◇ Eine Sammlung von Themen aus ◇
◇ Geometrie und Mathematik ◇
◇ in losen Einheiten ◇
◇ Repetition, Ausbau, Aufbau ◇



Vormals verwendete Skripte für Architekten — HTA Bu

Von Beat Gysler bis 2003 vormals erstellte Skriptteile

Herausgegeben von Rolf Wirz 2007

Berner Fachhochschule BFH ◇ AHB und TI

V.1.0, ohne Nachbearbeitung übernommene Texte, 23. Februar 2007 **Nur Deutsche Version!**

WIR1/2007/.../$GeoMath\_BG2003\_Wir2007.TEX$

©2007

Inhalt

Die in dieser Zusammenstellung wiedergegebenen Skript–Versionen von Prof. B. Gysler sel. wurden nach dem an der HTA Burgdorf bis 2003 gültigen Lehrplan zur Mathematik für Architekten in loser Folge erarbeitet. Sie sind durch R. Wirz, Prof. f. Math., BFH, aus dem überlassenen Material ohne inhaltliche Änderungen in nachstehender Weise zum weiteren schulischen Gebrauch zu einem Paket gestapelt worden. In dieser Weise wird das Material den Studierenden weitergegeben zum Gebrauch als alternative Variante einer Stoffpräsentation.

Alle Rechte vorbehalten. Ausnahme: Der nicht–kommerzielle private und schulische Einsatz zu Ausbildungszwecken ist erlaubt.

Im Februar 2007, Rolf Wirz

©2007

Inhalte zu den Skripten Geometrie und Mathematik

Inhaltsangaben zu den Skript-Versionen von Prof. B. Gysler sel. nach dem an der HTA Burgdorf bis 2003 gültigen Lehrplan Mathematik für Architekten

Zusammengestellt aus überlassenem Material ohne inhaltliche Änderungen im Jahr 2007 durch R. Wirz, Prof. f. Math., BFH

Go to the Top

GEOMETRIE : VORLESUNG 1

TRIGONOMETRIE

INHALTSVERZEICHNIS *Text*

ANHANG :

UEBUNGEN ZU § 1 - § 5 DER VORLESUNG "TRIGONOMETRIE"

Go to the Top

GEOMETRIE : VORLESUNG 2

ANALYTISCHE GEOMETRIE

INHALTSVERZEICHNIS

Text

[Go to the Top]

GEOMETRIE: VORLESUNG 3

VEKTORRECHNUNG

INHALTSVERZEICHNIS

[Text]

[Go to the Top]

MATHEMATIK: VORLESUNG 1

ELEMENTARE ALGEBRA

(Anmerkung: Theorie der elementaren reellen Funktionen)

INHALTSVERZEICHNIS

[Text]

Go to the Top

MATHEMATIK: VORLESUNG 2

DIFFERENTIALRECHNUNG

INHALTSVERZEICHNIS

Text

ANHANG :

UEBUNGEN ZU § 1 - § 7 DER VORLESUNG "DIFFERENTIALRECHNUNG"

Go to the Top

MATHEMATIK: VORLESUNG 3

KOMBINATORIK
WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
STATISTIK

INHALTSVERZEICHNIS

Text

Go to the Top

MATHEMATIK: VORLESUNG 4

INTEGRALRECHNUNG

INHALTSVERZEICHNIS

Text

Go to the Top

BERNER FACHHOCHSCHULE

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR BURGDORF

ABTEILUNG ARCHITEKTUR

GEOMETRIE : VORLESUNG 1

TRIGONOMETRIE

COPYRIGHT 2007: AMTSNACHFOLGER DES COPYRIGHTBESITZERS 2001

COPYRIGHT 2001: B. GYSLER, DIPL. MATHEMATIKER

PROFESSOR AN DER HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR

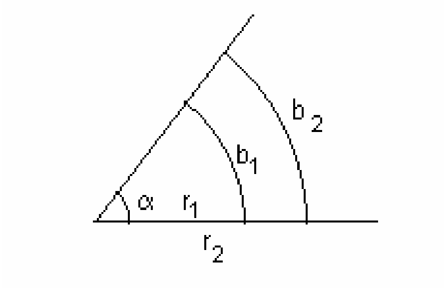
4. AUFLAGE, 2001, BURGDORF, SCHWEIZ

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1 WINKELMESSUNG UND KOORDINATENSYSTEME

1. Das Bogenmass eines Winkels

Bei einem fest gegebenen Zentriwinkel α ist das Verhältnis zwischen der Länge eines Kreisbogens b und dessen Radius r offensichtlich konstant:



Ähnlichkeit der Figuren

Dieses Verhältnis ist also nur gerade vom Winkel α abhängig und deshalb zur Messung dieses Winkels geeignet.

Def 1: Das Bogenmass eines Winkels α ist der Quotient aus Bogenlänge und Radius:

$$\alpha = b/r$$

Satz1: Für die Umrechnung von Bogenmass in Gradmass und umgekehrt gilt:

$$\alpha° = \alpha \cdot \frac{180°}{\pi} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \alpha° \cdot \frac{\pi}{180°}$$

Im Taschenrechner sind diese Umrechnungsformeln fest programmiert:

Bsp 1: $\alpha° = 77°$ $\rightarrow$ $\alpha = 77\cdot(\pi/180) = 1.344$
$\alpha = 0.369$ $\rightarrow$ $\alpha° = 0.369\cdot(180/\pi) = 21.14°$

Tabelle einiger wichtiger Winkel:

$\alpha°$	1	30	45	57.3	60	90	180	270	360
α	$\pi/360$ =0.017	$\pi/6$ =0.524	$\pi/4$ =0.785	1	$\pi/3$ =1.047	$\pi/2$ =1.571	π =3.142	$3\pi/2$ =4.712	2π =6.283

Aus den obigen Definitionen folgt mühelos:

Satz2: Länge eines Kreisbogens :

$$b = r\cdot\alpha$$

Fläche eines Kreissektors :

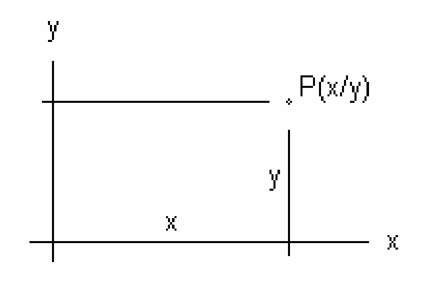
$$F = \frac{1}{2}\, b\cdot r = \frac{1}{2}\, r^2\cdot\alpha$$

Bsp 2: Ergänzen Sie folgende Tabelle:

Radius r [cm]	Bogenlänge b [cm]	Sektorfläche F [cm^2]	Zentriwinkel $\alpha°$	Zentriwinkel α []
6			43.3	
10	18			
4		6		
		4		0.5
	12	40		

2. Rechtwinklige Koordinaten (cartesisches Koordinatensystem)

Def 2: Um die Punkte einer Ebene festzulegen, verwendet man ein rechtwinkliges Achsenkreuz aus zwei Zahlengeraden mit gemeinsamem Nullpunkt und gleicher Einheit.
Die horizontale Achse nennt man x-Achse, die vertikale ist die y-Achse.



Jedem Punkt P entspricht genau ein geordnetes Zahlenpaar (x/y) und umgekehrt

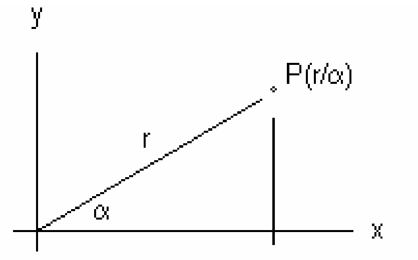
Die dem Punkt P zugeordneten Zahlen x und y heissen x-Koordinate bzw. y-Koordinate des Punktes P und sind seine rechtwinkligen (cartesischen) Koordinaten.

Not : Für den durch die Koordinaten x und y festgelegten Punkt P schreibt man: P(x/y).

3. Polarkoordinaten

Def 3: Die Festlegung eines Punktes P kann anstatt mit rechtwinkligen Koordinaten auch dadurch erfolgen, dass man seine Entfernung r vom Nullpunkt des Koordinatensystems O und den Winkel α zwischen dem Strahl OP und der positiven x-Achse angibt.

Damit eine eindeutige Angabe möglich ist, muss α auf den Bereich $-180° < \alpha \leq +180°$ eingeschränkt werden.



Jedem Punkt P entspricht genau ein geordnetes Zahlenpaar (r/α) und umgekehrt (ausser dem Nullpunkt O).

Die dem Punkt P zugeordneten Zahlen r und α heissen <u>Radius</u> und <u>(Richtungs)winkel</u> des Punktes P und sind seine <u>Polarkoordinaten</u>.

Not : Für den durch die Koordinaten r und α festgelegten Punkt P schreibt man: P(r/α).

4. Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten und umgekehrt

Die Umrechnung ohne weitere Hilfsmittel gelingt nur in Ausnahmefällen:

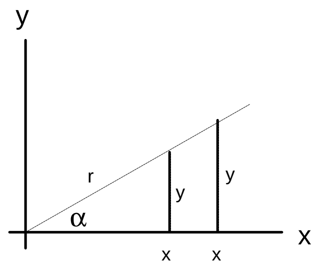
Bsp 3:	<u>rechtwinklig</u>		<u>polar</u>
	P(2/0)		P(2/0°)
	Q(0/5)		Q(5/90°)
	R(-4/4)		R(5.66/135°)
	S($\sqrt{3}$/-1)	S(2/-30°)	

Für die allgemeine Lösung des Problems braucht man offensichtlich genauere Vorstellungen über die Zusammenhänge zwischen Winkel und Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck.

Im Taschenrechner sind die Umrechnungen fest programmiert:

§ 2 DIE WINKELFUNKTIONEN

Wie im vorangegangenen Kapitel erwähnt, besteht das Bedürfnis, die Zusammenhänge zwischen Winkeln und Seiten im rechtwinkligen Dreieck näher zu untersuchen.



Offensichtlich sind die Verhältnisse der Strecken x, y und r untereinander nur vom gewählten Winkel α abhängig (ähnliche Dreiecke) !

Def 1: Der Quotient y/r der Koordinaten eines Punktes auf dem freien Schenkel des Winkels α nennt man SINUS von α,
geschrieben: **sin** a

Def 2: Der Quotient x/r der Koordinaten eines Punktes auf dem freien Schenkel des Winkels α nennt man COSINUS von α,
geschrieben: **cos** a

Def 3: Der Quotient y/x der Koordinaten eines Punktes auf dem freien Schenkel des Winkels α nennt man TANGENS von α,
geschrieben: **tan** a

Bsp 1: sin 45° = 0.707 ; cos 60° = 0.5 ; tan 135° = -1 ;

Im Taschenrechner sind die Winkelfunktionen fest programmiert:

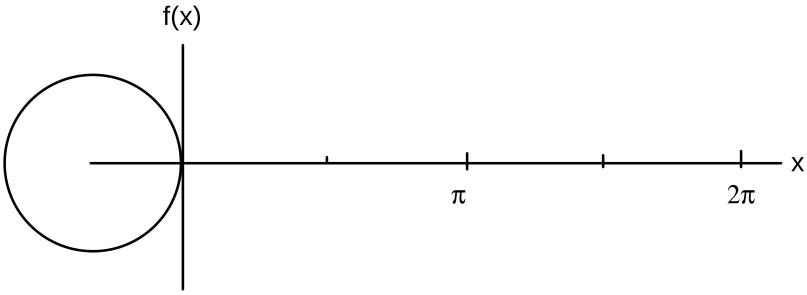
Bsp 2: sin 77° = 0.974 , sin 159° = 0.358 , sin 220° = -0.643
cos 56° = 0.559 , cos 110° = -0.342 , cos 317° = 0.731
tan 23° = 0.424 , tan 145° = -0.700 , tan 231° = 1.235

Die Graphen der drei Winkelfunktionen lassen sich am besten aus dem Einheitskreis (→ Kreis mit Radius r = 1) ableiten.

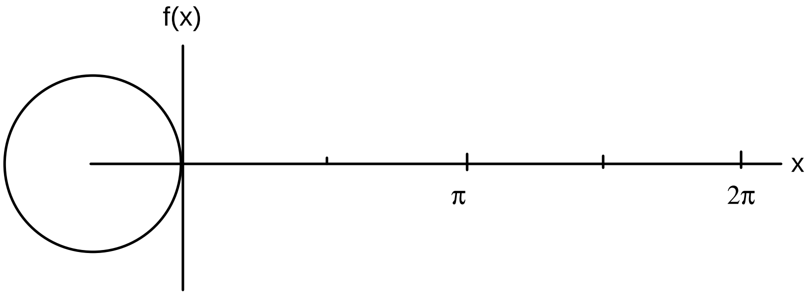
Da es sich um eine Funktionsdarstellung handelt, empfiehlt es sich, den Winkel α als Argument der Funktion im Bogenmass zu messen, damit beide Koordinatenachsen denselben Massstab tragen.

(Damit auch im Taschenrechner die benötigten Winkel im Bogenmass eingegeben werden können, muss dieser zuerst entsprechend umgestellt werden).

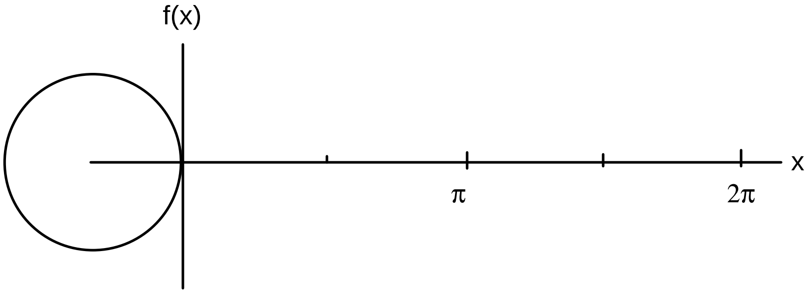
SINUS



COSINUS



TANGENS



Man bemerkt sofort folgende Eigenschaften:

Periodizität: Die Sinusfunktion hat eine Periode von 2π
Die Cosinusfunktion hat eine Periode von 2π
Die Tangensfunktion hat eine Periode von π

Definitionsbereich: Die Sinusfunktion ist überall definiert
Die Cosinusfunktion ist überall definiert
Die Tangensfunktion weist bei $\pi/2$ und $3\pi/2$ eine Definitionslücke auf

Wertebereich: Die Sinusfunktion nimmt nur Werte zwischen -1 und +1 an
Die Cosinusfunktion nimmt nur Werte zwischen -1 und +1 an
Die Tangensfunktion nimmt jeden Wert an

Zusammenhänge: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (trigonometrischer Pythagoras)

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Daraus ergibt sich folgende Tabelle für die Umrechnungsformeln einer bestimmten Winkelfunktion in eine andere:

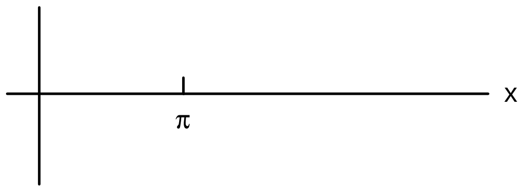
	SINUS	COSINUS	TANGENS
sin x =	---	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$
cos x =	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	---	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$
tan x =	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}$	---

Die jeweils gültigen Vorzeichen hängen vom betrachteten Winkel ab und können anhand der Funktionsgraphen leicht bestimmt werden.

Die Umkehrung der Winkelfunktionen bedarf wegen der fehlenden Injektivität gewisser Vorsichtsmassnahmen:

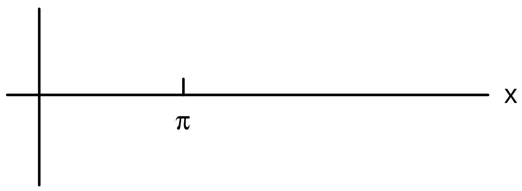
Zur Konstruktion der Umkehrfunktion wird ein injektives Teilstück der umzukehrenden Funktion ausgewählt und nur dieses der Umkehrung unterworfen:

SINUS



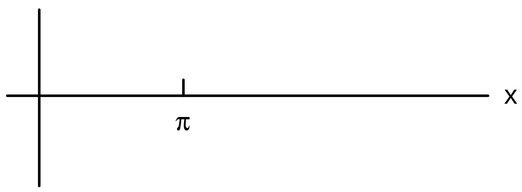
$-\pi/2 \leq x \leq +\pi/2$ $\qquad$ $(-90° \leq x \leq +90°)$

COSINUS



$0 \leq x \leq \pi$ $\qquad$ $(0° \leq x \leq 180°)$

TANGENS



$-\pi/2 < x < +\pi/2$ $\qquad$ $(-90° < x < +90°)$

Im Taschenrechner sind auch diese Umkehrfunktionen fest programmiert:

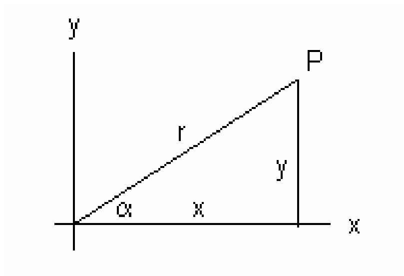
Beachten Sie, dass der Rechner nur die Winkel in den oben angegebenen Bereichen liefert. Allfällige weitere Lösungen lassen sich anhand der Funktionsgraphen und der Periodizität leicht finden:

Bsp 3: $\sin \alpha = 0.77 \;\rightarrow\; \alpha = 50.35°$
Aber auch $\alpha = 129.65°$, $\alpha = 410.35°$, $\alpha = -230.35°$ etc. wären richtig.

Ergänzungen

a) Koordinatenumrechnung

Mit Hilfe der Winkelfunktionen kann nun auch die Umrechnung von polaren in rechtwinklige Koordinaten und umgekehrt endgültig bewältigt werden:



polar → rechtwinklig	rechtwinklig → polar
$x = r \cdot \cos\alpha$	$r = +\sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r \cdot \sin\alpha$	$\tan\alpha = y/x \rightarrow \alpha$

Bsp 4: P(4/118°): $x = 4 \cdot \cos 118° = -1.88$; $y = 4 \cdot \sin 118° = 3.53$

Q(3/7) : $r = +\sqrt{3^2 + 7^2} = 7.62$; $\tan\alpha = 7/3 \rightarrow \alpha = 66.80°$

Diese Umrechnungen finden sich auch im Taschenrechner:

b) Steigung

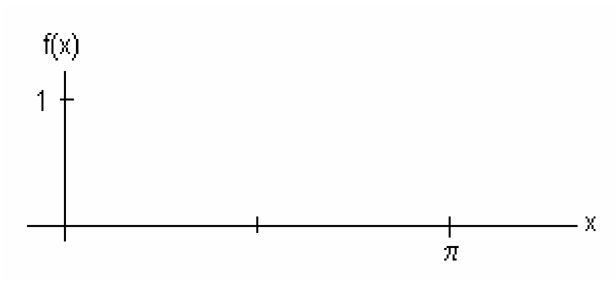
Die Steigung einer Strecke (z.B. einer Strasse) wird durch das Verhältnis von Höhenunterschied und Horizontaldistanz angegeben. Dies ist aber gerade der Tangens des Steigungswinkels.

Bsp 5: Eine Strasse überwinde bei einer Horizontaldistanz von 4832 [m] einen Höhenunterschied von 132 [m]. So ist die durchschnittliche Steigung $m = 132/4832 = 0.0273$ und weil $m = \tan\alpha$ ist der durchschnittliche Steigungswinkel also $\alpha = 1.564°$

Die Steigung wird im Strassenbau oft in Prozenten angegeben. Beim obigen Beispiel würde die Steigung der Strasse anstatt mit 0.0273 mit 2.73 % angegeben, was bedeutet, dass der Höhenunterschied 2.73 % der Horizontaldistanz ist.

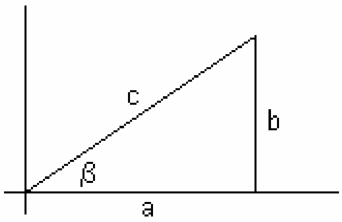
Auch bei Funktionskurven taucht der Begriff der Steigung auf. Die Steigung einer Funktionskurve in einem bestimmten Punkt ist definiert als die Steigung der Tangente an die Kurve in diesen Punkt.

Bsp 6: Bestimmen Sie graphisch die Steigung von $f(x) = \sin x$ an der Stellen $x = \pi/3$ und $x = 3\pi/4$.



§ 3 DAS RECHTWINKLIGE DREIECK

Aus der Definition der Winkelfunktionen ist sofort ersichtlich:



$\sin\beta = b/c$

$\cos\beta = a/c$

$\tan\beta = b/a$

allgemein merkt man sich :

$$\text{SINUS} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\text{COSINUS} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\text{TANGENS} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Sind von einem rechtwinkligen Dreieck ausser dem rechten Winkel zwei weitere Angaben bekannt, so lassen sich die restlichen Grössen berechnen.

Bsp 1: Gegeben : $a = 40$ [cm] , $\beta = 36°$

$\alpha = 90 - \beta = 54°$

$b/a = \tan\beta$ woraus $b = a \cdot \tan\beta = 29.06$ [cm] folgt
$a/c = \cos\beta$ bedeutet $c = a/\cos\beta = 49.44$ [cm]
$F = ½\, ab = 581.2$ [cm^2]

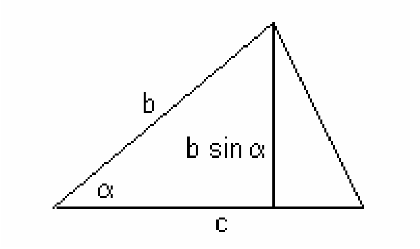
Bsp 2: Gegeben : h = 10 [cm] , $\alpha = 62°$

$\beta = 90 - \alpha = 28°$

$h/b = \sin\alpha \rightarrow b = h/\sin\alpha = 11.33$ [cm]
$h/a = \sin\beta \rightarrow a = h/\sin\beta = 21.30$ [cm]
$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = 24.13$ [cm]
$F = ½\, ch = 120.66$ [cm^2]

<u>Ergänzungen</u>

a) Flächenformel für das Dreieck

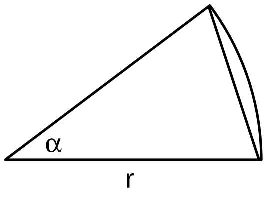


$F = ½\, bc \cdot \sin\alpha$

Bsp 3: b = 6.26 [cm] , c = 8.55 [cm] , $\alpha = 75.5°$

$F = ½ \cdot 6.26 \cdot 8.55 \cdot 0.9681 = 25.91$ [cm^2]

b) Flächenformel für das Kreissegment



$F = ½ \cdot r^2(\alpha - \sin\alpha)$

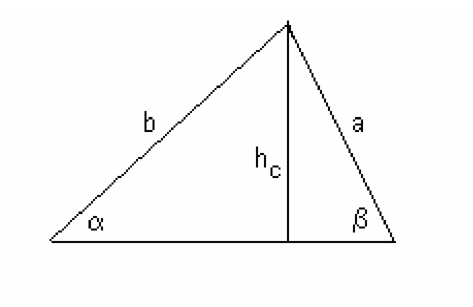
Bsp 4: r = 45 [mm] , $\alpha = 58.3° = 1.0175$

$F = ½ \cdot 45^2 \cdot (1.0175 - 0.8508) = 168.80$ [mm^2]

§ 4 DAS ALLGEMEINE DREIECK

1. Der Sinussatz

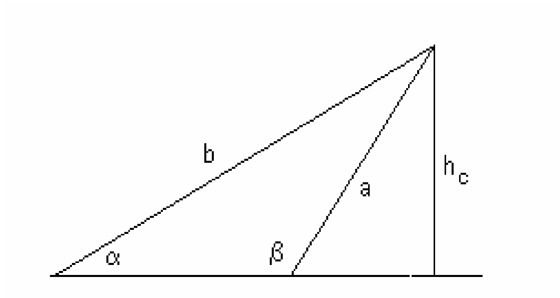
Im spitzwinkligen Dreieck gilt:



$h_c/b = \sin\alpha$
$h_c/a = \sin\beta$

also: $a/b = \sin\alpha / \sin\beta$

Im stumpfwinkligen Dreieck gilt:



$h_c/b = \sin\alpha$
$h_c/a = \sin(180° - \beta) = \sin\beta$

also: $a/b = \sin\alpha / \sin\beta$

Daraus folgt allgemein:

Satz1: Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.

$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$
$b : c = \sin\beta : \sin\gamma$
$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

Mit Hilfe des Sinussatzes kann also aus drei gegebenen Stücken ein viertes berechnet werden. Beachten Sie, dass in den drei gegebenen Grössen eine Seite samt Gegenwinkel enthalten sein muss.
Der Sinussatz kann also zu Beginn der Berechnungen nur in den Kongruenzfällen (WSW) und (SSW) benützt werden.

Bsp 1: Gegeben $c = 6.5$ [cm] , $\alpha = 65°$, $\beta = 42°$ (WSW)

Es folgt: $\gamma = 73°$

$b:c = \sin\beta : \sin\gamma \rightarrow b = c\cdot\sin\beta/\sin\gamma = 4.55$ [cm]
$a:c = \sin\alpha : \sin\gamma \rightarrow a = c\cdot\sin\alpha/\sin\gamma = 6.16$ [cm]

Bsp 2: Gegeben b = 7 [cm] , c = 5 [cm] , $\beta = 40°$ (SSW)

Es folgt:

$\sin\gamma : \sin\beta = c : b \rightarrow \sin\gamma = (c\cdot\sin\beta)/b = 0.4591 \rightarrow \gamma = 27.33°$

Beachten Sie, dass der zweite Winkel mit dem Sinuswert 0.4591, nämlich 152.67° wegen der Winkelsumme nicht in Frage kommt.

Schliesslich:

$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 112.67°$
$a:b = \sin\alpha : \sin\beta \rightarrow a = (b\cdot\sin\alpha)/\sin\beta = 10.05$ [cm]

Bsp 3: a = 4 [cm] , b = 6 [cm] , $\alpha = 38°$ (---)

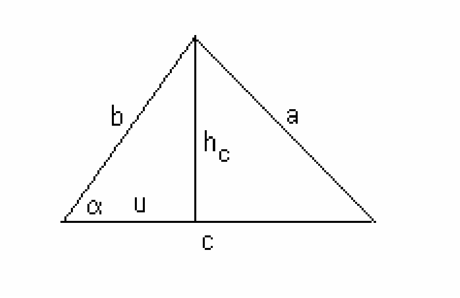
Diese Angaben entsprechen keinem Kongruenzsatz, also ist die Lösung nicht eindeutig !

$\sin\beta : \sin\alpha = b : a \rightarrow \sin\beta = (b\cdot\sin\alpha)/a = 0.9235$

$\beta = 67.44°$	oder	$\beta = 112.56°$
$\gamma = 74.56°$		$\gamma = 29.44°$
$c = (a\cdot\sin\gamma)/\sin\alpha$		$c = (a\cdot\sin\gamma)/\sin\alpha$
$= 6.26$ [cm]		$= 3.19$ [cm]

2. Der Cosinussatz

Im beliebigen Dreieck gilt:



$a^2 = h_c^2 + (c - u)^2$
wobei: $h_c^2 = b^2 - u^2$ und $u = b \cdot \cos\alpha$

also:
$a^2 = b^2 - b^2 \cdot \cos^2\alpha + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha$
$\quad = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

Durch Verallgemeinerung folgt daraus:

Satz2:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Mit Hilfe des Cosinussatzes kann wieder aus drei gegebenen Stücken ein viertes berechnet werden. Beachten Sie, dass unter den drei gegebenen Grössen mindestens zwei Seiten sein müssen.

Der Cosinussatz kann also zu Beginn der Berechnungen nur in den Kongruenzfällen (SSS) und (SWS) eingesetzt werden.

Bsp 4: $a = 20$ [cm] , $c = 65$ [cm] , $\beta = 38°$

Es folgt: $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta} = 50.76$ [cm]

Und: $\sin\alpha : \sin\beta = a : b \rightarrow \sin\alpha = (a \cdot \sin\beta)/b = 0.2426$
also $\alpha = 14.04°$ und $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 127.96°$

Bsp 5: $a = 6$ [cm] , $b = 9$ [cm] , $c = 11$ [cm]

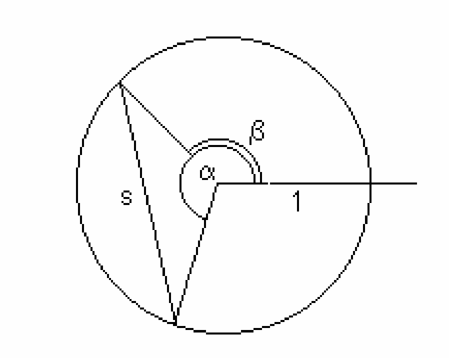
Es ist: $\cos\alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc = 0.8384$
also $\alpha = 33.03°$

Und: $\cos\beta = (a^2 + c^2 - b^2)/2ac = 0.5758$
also $\beta = 54.84°$ und $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 92.13°$

§ 5 GONIOMETRIE

Im folgenden werden weitere Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen und Lösungsverfahren für Winkelfunktionsgleichungen (goniometrische Gleichungen) dargestellt.

1. Additionstheoreme



Berechnen Sie die Strecke s !

a) $s^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cdot \cos(\alpha - \beta)$

b) $$\begin{aligned} s^2 &= (\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 \\ &= \sin^2\alpha - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos^2\beta \\ &= 2 - 2(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der beiden Resultate entnimmt man sofort:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Daraus werden weitere Formeln hergeleitet:

Satz1:
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

2. Doppelwinkelformeln

Aus obenstehenden Formeln entnimmt man für $\alpha = \beta$:

Satz2:
$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

3. Goniometrische Gleichungen

(Gleichungen, welche die Unbekannte in einer Winkelfunktion enthalten)

Goniometrische Gleichungen vereinfacht man wie folgt:

1. Vereinheitlichen des Winkels
2. Vereinheitlichen der Winkelfunktion
3. Lösen der Gleichung nach dieser Winkelfunktion
   (ev. mit Hilfe einer Substitution)
4. Kontrolle der Lösungen !

Bsp 1: $2 \cdot \sin x + \cos^2 x = 1.75$

1. nicht nötig
2. mit $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ergibt sich:
   $2 \cdot \sin x + 1 - \sin^2 x = 1.75$ bzw.
   $\sin^2 x - 2 \cdot \sin x + 0.75 = 0$
3. mit der Substitution $z = \sin x$ erhält man die
   quadratische Gleichung $z^2 - 2z + 0.75 = 0$ mit den Lösungen
   $z_1 = 1.5$ und $z_2 = 0.5$
   Da $-1 \le z = \sin x \le +1$ ist nur $z = \sin x = 0.5$ brauchbar
   und liefert die Lösungen $x_1 = 30°$ und $x_2 = 150°$
4. Kontrolle durch Einsetzen in der Ausgangsgleichung.

Bsp 2: $3 \cdot \cos(2x) - 2 \cdot \sin x = 0$

1. mit $\cos(2x) = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$ ergibt sich:
   $3(1 - 2 \cdot \sin^2 x) - 2 \cdot \sin x = 0$ bzw.
   $6 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sin x - 3 = 0$
2. nicht mehr nötig
3. Substitution $z = \sin x$ führt auf eine quadratische Gleichung
   mit den Lösungen $z_1 = (\sin x)_1 = 0.5598$ und
   $z_2 = (\sin x)_2 = -0.8931$ und so zu den Winkeln
   $x_1 = 34.04°$, $x_2 = 145.96°$ und
   $x_3 = 243.26°$, $x_4 = 296.73°$
4. Kontrolle durch Einsetzen in der Ausgangsgleichung.

Übungen zu § 1

1. Bestimmen Sie das Bogenmass von $\alpha = 70°12'$ und $\alpha = 212.34°$

2. Bestimmen Sie das Gradmass von $\alpha = 1.773$ und $\alpha = 5.109$

3. Rechnen Sie in Polarkoordinaten um:

   A(7/3), B(-5/13), C(8/-1)

4. Rechnen Sie in rechtwinklige Koordinaten um:

   A(14/37°), B(5/122°), C(9/-12°)

5. Wie lang ist der Bogen und welche Fläche hat der Sektor, der im Kreis mit Radius r = 13 [cm] zum Zentriwinkel $\alpha = 81.3°$ gehört ?

Übungen zu § 2

1. Bestimmen Sie mit dem Rechner folgende Funktionswerte:

$\sin 33°$	=	$\sin -33°$	=
$\cos 33°$	=	$\cos -33°$	=
$\tan 100°$	=	$\tan -100°$	=
$\sin 0.571$	=	$\cos 2.449$	=
$\tan 3.003$	=		

2. Bestimmen Sie die zu den folgenden Funktionswerten gehörenden Winkel im Grad- und im Bogenmass:

$\sin \alpha = 0.341$	$\alpha =$
$\sin \alpha = -0.88$	$\alpha =$
$\cos \alpha = 0.902$	$\alpha =$
$\cos \alpha = -0.55$	$\alpha =$
$\tan \alpha = 3.117$	$\alpha =$
$\tan \alpha = -1.33$	$\alpha =$

3. Eine a = 3.2 [m] lange Leiter wird gegen eine senkrechte Wand gelehnt.

   a) wie weit ist der Leiterfuss von der Wand entfernt, wenn die Leiter unter $\alpha = 77°$ gegen die Horizontale geneigt ist ?

   b) welches ist der Neigungswinkel der Leiter, wenn ihr Fuss c = 1.04 [m] von der Wand entfern ist ?

4. Eine Strasse steigt zwischen zwei Punkten A und B mit einer durchschnittlichen Steigung von 5.37 %. Welche Höhe überwindet sie, wenn

   a) die Horizontaldistanz von A und B gerade d = 500 [m] misst ?

   b) d = 500 [m] die effektive (schräge) Distanz von A und B ist ?

5. Geben Sie eine Beschreibung der folgenden Punktmengen:

   a) $A = \{ (r/\alpha) |\ r = 4 \cdot \sin \alpha \text{ und } 0 \le \alpha \le \pi \}$

   b) $B = \{ (r/\alpha) |\ r \cdot \cos \alpha = 1 \text{ und } -\pi/2 < \alpha < +\pi/2 \}$

   c) $C = \{ (r/\alpha) |\ r = 1 + \cos \alpha \text{ und } 0 \le \alpha \le 2\pi \}$

Übungen zu § 3

1. Berechnen Sie die fehlenden Stücke der folgenden rechtwinkligen Dreiecke:

   a) $a = 6.18$ [cm] , $\alpha = 18°$
   b) $b = 7.20$ [cm] , $\alpha = 37.6°$
   c) $p = 3.95$ [cm] , $\alpha = 32.5°$ (p : Hypothenusenabschnitt)
   d) $F = 13.43$ [cm^2] , $b = 6.32$ [cm]

2. Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man die Höhe auf die Basis $h = 7.33$ [cm] und den Basiswinkel $\alpha = 46.9°$.
   Berechnen Sie die restlichen Stücke.

3. Eine $a = 2.25$ [m] lange Stange wirft einen Schatten der Länge $s = 3.15$ [m].
   Wie hoch steht die Sonne (Winkel) ?

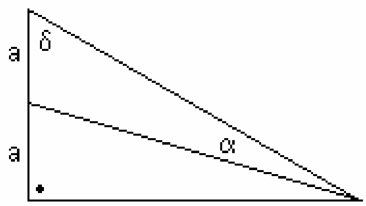
4. In einer Karte vom Massstab 1:5000 sind die Höhenlinien im Abstand von 10 [m] zu 10 [m] eingezeichnet. Wie steil ist das Gelände dort, wo der Abstand zweier Höhenlinien auf der Karte $d = 3.5$ [mm] misst ?

5. Wie lang ist die Sehne im Kreis mit Radius $r = 4.75$ [cm], welche zum Zentriwinkel $\delta = 73.74°$ gehört ?

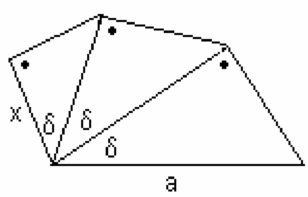
6. Einem Kreis mit Radius $r = 10$ [cm] ist je ein reguläres 20-eck um- und einbeschrieben.
   Berechnen Sie deren Flächen.

7. Berechnen Sie den Winkel α in nebenstehender Skizze.

   $\delta = 71°$



8. Wie gross muss in nebenstehender Skizze der Winkel δ gewählt werden, damit x gerade halb so lang wie a wird ?



9. Ein gerader Kreiskegel hat die Höhe $h = 8$ [cm] und das Volumen $V = 35$ [cm^3].
   Unter welchem Winkel sind seine Mantellinien gegen die Grundfläche geneigt ?

10. Der Umkreis eines Sehnenvierecks hat den Radius $r = 6$ [cm] und wird durch die Ecken des Vierecks im Verhältnis 1:2:4:5 geteilt.
Berechnen Sie die Vierecksfläche.

11. Berechnen Sie den Neigungswinkel α der Raumdiagonalen eines Würfels gegenüber seiner Grundfläche.

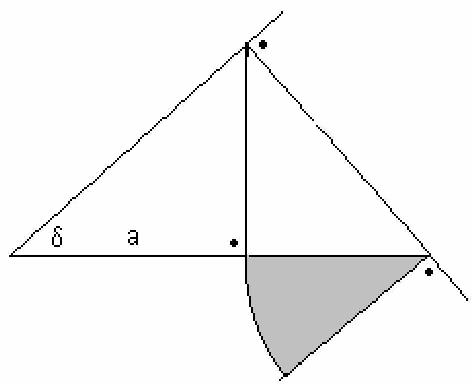
12. In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypothenuse $c = 134.65$ [cm] und dem Winkel $\alpha = 78°$ wird die Kathete a in 3 gleiche Teile geteilt und die Teilpunkte mit der Ecke A verbunden. In welche Teile wird dabei der Winkel α zerlegt ?

13. Von einem Punkt auf dem Umfang eines Kreises mit Radius $r = 16$ [cm] werden zwei Sehnen der Länge $s = 12$ [cm] bzw. $s' = 28$ [cm] gezogen.
Welches Flächenstück innerhalb des Kreises schliessen sie ein ? (2 Lösungen !)

14. Zwei Kräfte P und Q greifen rechtwinklig zueinander an. Ihre Resultante beträgt $R = 1'000$ [N], der Winkel zwischen P und R misst $\delta = 63.7°$.
Berechnen Sie P und Q.

15. Berechnen Sie die schraffierte

Gegeben sind:
$a = 9$ [cm], $\delta = 41°$



Übungen zu § 4

1. Berechnen Sie die fehlenden Stücke nachfolgender Dreiecke:

   a) $a = 198$ [cm] , $b = 147$ [cm] , $\alpha = 111.37°$

   b) $b = 24$ [cm] , $c = 17$ [cm] , $\alpha = 115.28°$

   c) $b + c = 168$ [cm] , $\alpha = 59°$, $\beta = 37°$

   d) $u = 1989$ [cm] , $\alpha = 115°$, $\beta = 22°$

   e) $c = 32$ [cm] , $\alpha = 37°$, $a : b = 7 : 9$

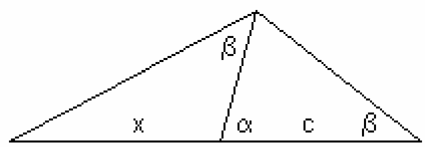
   f) $a = 6$ [cm] , $b = 4$ [cm] , $\beta = 69°$

   g) $h_a = 4$ [cm] , $h_b = 6$ [cm] , $h_c = 8$ [cm]

2. Ein Antennenmast steht auf einer horizontalen Ebene. Von einem Punkt dieser Ebene aus erscheint seine Spitze unter dem Höhenwinkel $\alpha = 19.5°$. Geht man $d = 330$ [m] auf den Mast zu, erscheint sie unter dem Höhenwinkel $\beta = 36.5°$. Wie hoch ist der Mast ?

3. Ein zylindrischer Turm hat ein halbkugeliges Dach vom Durchmesser $d = 10$ [m]. Auf dem höchsten Punkt des Dachs sitzt ein Blitzableiter der Höhe $h = 1.85$ [m]. Wie lang wird der auf dem Dach liegende krumme Schatten des Blitzableiters bei einer Sonnenhöhe von $\delta = 49.5°$?

4. Berechnen Sie die Länge der Strecke x in nebenstehender Figur.
   $c = 5$ [cm] , $\alpha = 70°$, $\beta = 40°$

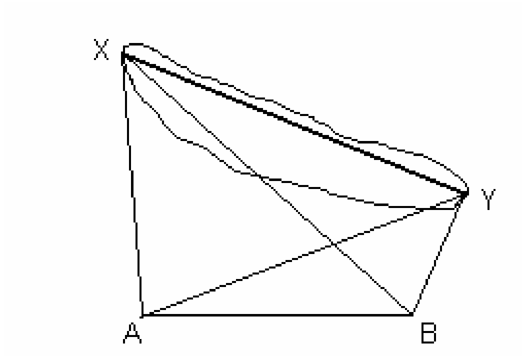


5. In einer geraden Pyramide mit Spitze S, deren Grundfläche ABCD ein Parallelogramm ist, kennt man $AB = 34$ [cm], $BC = 16$ [cm] und den Winkel zwischen AB und BC, nämlich $\alpha = 141°$. Der Neigungswinkel der Seitenkante BS gegenüber der Grundfläche misst $\delta = 56.7°$.
   Berechnen Sie das Volumen der Pyramide und den Neigungswinkel der Kante AS gegen die Grundfläche.

6. Drei Kräfte $P = 200$ [N], $Q = 130$ [N] und $R = 110$ [N] halten sich in einem Punkt das Gleichgewicht. Berechnen Sie ihre Zwischenwinkel.

7. Berechnen Sie die Länge XY der unzugänglichen Insel aus den untenstehenden Messungen.

AB = 200 [m] ,
∠XAB = 100° , ∠YAB = 30° ,
∠ABY = 121° , ∠ABX = 47°



8. In einem Dreieck misst die Seite c = 69.11 [cm]; die Winkel verhalten sich wie $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 5$.
Berechnen Sie die Seiten a und b, die Winkel, den Radius des Um- und des Inkreises sowie die Fläche des Dreiecks.

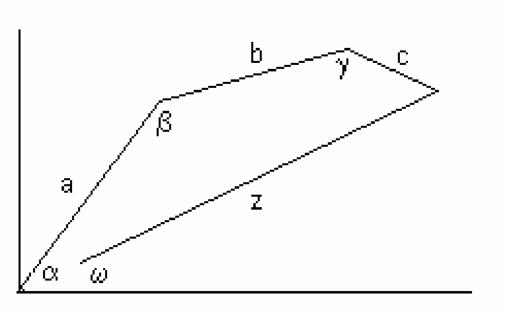
9. An einem Punkt greifen zwei Kräfte P = 120 [N] und Q = 180 [N] an, die einen Zwischenwinkel von $\delta = 52.13°$ bilden.
Berechnen Sie die Resultante R und den Winkel zwischen P und R.

10. In einem Drachenviereck misst die längere Seite AB = 11 [cm] und die kürzere BC = 9 [cm].
Der Winkel dazwischen misst $\alpha = 126.47°$.
Berechnen Sie die Fläche und die Länge der beiden Diagonalen des Drachenvierecks.

11. Berechnen Sie die Abschlussdistanz z und den Abschlusswinkel ω des nebenstehend skizzierten Polygonzugs.

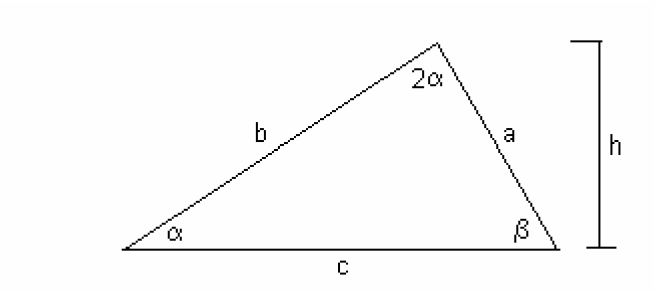
Die Messungen sind:

a = 95.33 [m] , α = 50.9°
b = 89.59 [m] , β = 145.1°
c = 55.94 [m] , γ = 140.2°



12. Von nebenstehenden Dreieck ist $\alpha = 40°$ und c = 12 [cm] gegeben.

Berechnen Sie a, b, β, h und die Fläche F des Dreiecks.



Übungen zu § 5

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

   a) $3 \cdot \sin(2x) - \cos x = 0$

   b) $\sin x + \cos x = 1.2$

   c) $3 \cdot \sin x - \tan x = 0$

   d) $\tan x + (\tan x)^{-1} = 1.77$

   e) $\tan(2x) = 3 \cdot \tan x$

   f) $2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x + 1 = 0$

   g) $\cos x + 4 \cdot \sin x = 0$

2. In einem Dreieck ist ein Winkel doppelt so gross wie ein anderer.
   Die respektiven Gegenseiten verhalten sich wie 5 : 3.

   Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks.

BERNER FACHHOCHSCHULE

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR BURGDORF

ABTEILUNG ARCHITEKTUR

GEOMETRIE : VORLESUNG 2

ANALYTISCHE GEOMETRIE

COPYRIGHT 2007: AMTSNACHFOLGER DES COPYRIGHTBESITZERS 2001

COPYRIGHT 2001: B. GYSLER, DIPL. MATHEMATIKER

PROFESSOR AN DER HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR

4. AUFLAGE, 2001, BURGDORF, SCHWEIZ

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1 GRUNDBEGRIFFE

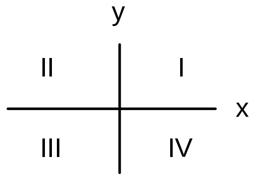
1. Einleitung

Die Aufgabe der analytischen Geometrie besteht in der rechnerischen (analytischen) Behandlung geometrischer Probleme. Die Voraussetzung für eine Anwendung rechnerischer Methoden ist die Möglichkeit einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung zwischen geometrischen und analytischen Elementen.

Diese Zuordnung findet man am leichtesten bei den einfachsten geometrischen Elementen, den Punkten. Jedem Punkt P der Ebene wird mit Hilfe eines recht-winkligen Koordinatensystems (KS) eindeutig ein Zahlenpaar (x/y) zugeordnet.
Für die exakte Festlegung dieser Zuordnung vergleiche man TRG, § 1, p.3

Die beiden Achsen des Koordinatensystems teilen die Ebene in 4 Quadranten:

	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-



2. Gleichungen in x und y und ihre geometrische Interpretation

Eine Gleichung in den zwei Variabeln x und y hat im allgemeinen unendlich viele Lösungen.

Bsp 1: $y = 2x + 3$ hat z.B. die Lösungen (x/y) = (1/5), = (2/7), = (0/3), = (-1/1) etc.

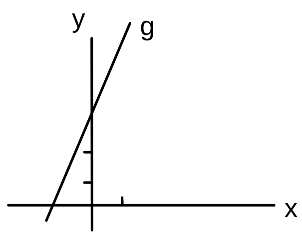
Die Lösungen lassen sich offenbar beliebig konstruieren, wenn man den Wert einer der beiden Variabeln vorgibt und die andere passend berechnet.

Es liegt nahe, die Lösungspaare (x/y) einer Gleichung als Koordinaten von Punkten aufzufassen. So ergibt sich zu jeder Gleichung in x und y eine Menge von Punkten, die die Lösungen der Gleichung repräsentieren.

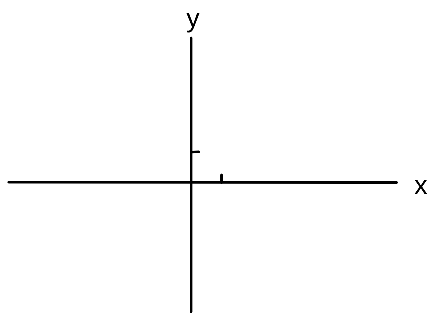
Def 1: Die Menge aller Punkte P(x/y), deren Koordinaten eine vorgegebene Gleichung erfüllen, nennt man die zu dieser Gleichung gehörende Kurve.

Gelingt es umgekehrt, zu einer vorgegebenen Kurve eine Gleichung in x und y so zu finden, dass die Lösungen dieser Gleichung, als Punkte dargestellt, gerade die in Frage stehende Kurve bilden, so nennt man diese Gleichung die Gleichung der Kurve.

Bsp 2: Die Lösungen der vorigen Gleichung y = 2x + 3 ergeben, als Punkte dargestellt, offenbar eine Gerade.



Bsp 3: Bestimmen Sie die zur Gleichung $x^2 + y^2 = 16$ gehörende Kurve.



3. Länge, Steigung und Mittelpunkt einer Strecke

Satz1: Die Länge d der Strecke $P_1(x_1/y_1)$ $P_2(x_2/y_2)$ beträgt:

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = +\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

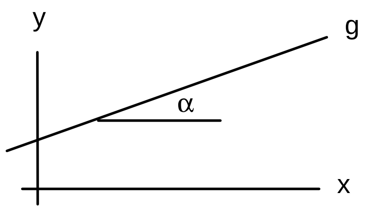
Bsp 4: $P_1(-6/3)$ $P_2(2/-7)$: $d = +\sqrt{8^2 + (-10)^2} = 12.81$ [E]

Def 2: Als Steigung m einer Strecke $P_1(x_1/y_1)$ $P_2(x_2/y_2)$ (wo $x_1 \neq x_2$) bezeichnet man das Verhältnis

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Die so definierte Steigung einer Strecke wird auch für alle Geraden verwendet, welche diese Strecke enthalten.

Bem : Die Steigung ist natürlich gerade der Tangens des Steigungswinkels α von g !



Bsp 5: Die Strecke von Bsp 4 hat also die Steigung $m = \frac{-7-3}{2-(-6)} = -1.25$

Ihr Steigungswinkel ist demnach $\alpha = -51.34°$

Satz2: Parallele Strecken haben die gleiche Steigung.

Satz3: Stehen zwei Strecken rechtwinklig aufeinander, so gilt:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{oder} \quad m_2 = -1/m_1$$

Spezialfälle:

Strecke parallel zur x-Achse :	$m = 0$
Strecke parallel zur 1. Winkelhalbierenden :	$m = 1$
Strecke parallel zur 2. Winklehalbierenden :	$m = -1$
Strecke parallel zur y-Achse :	m nicht definiert (weil $x_1 = x_2$)

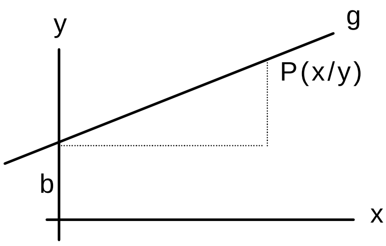
Satz4 : Der Mittelpunkt $M(x_M/y_M)$ einer Strecke $P_1(x_1/y_1)$ $P_2(x_2/y_2)$ hat die Koordinaten:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Bsp 6: Der Mittelpunkt der Strecke von Bsp 4 liegt also in $M(-2/-2)$.

§ 2 DIE GLEICHUNG DER GERADEN

1. Hauptform der Geradengleichung



Für die Koordinaten eines Punktes P(x/y) auf einer Geraden g mit Steigung m und y-Achsenabschnitt b muss offensichtlich gelten:

$$\frac{y-b}{x} = m$$

Daraus folgt unmittelbar:

Satz1: Die Gerade g mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b hat die Gleichung:

$$g:\ y = m \cdot x + b$$

HAUPTFORM DER GERADENGLEICHUNG

Bsp 1: g habe die Gleichung g: $y = 3 \cdot x - 2$
Liegen die Punkte A(2/4) und B(4/9) auf g ?

Kontrolle für A: $4 = 3 \cdot 2 - 2$ stimmt, also $A \in g$
Kontrolle für B: $9 = 3 \cdot 4 - 2$ ist falsch, also $B \notin g$

Bsp 2: g habe die Steigung m = 2 und gehe durch P(2/1).
Welches ist die Gleichung von g ?

Ansatz allgemein: g: $y = m \cdot x + b$ und weil m = 2 gegeben also
g: $y = 2 \cdot x + b$

Ausserdem sollen die Koordinaten von P die Gleichung erfüllen, was bedeutet:
$1 = 2 \cdot 2 + b$, also $b = -3$

Damit findet man: g: $y = 2 \cdot x - 3$

Bsp 3: g soll durch A(3/8) und B(1/-6) laufen.

Ansatz allgemein: g: $y = m \cdot x + b$

$$\begin{array}{lll} \text{Da } A \in g & : & 8 = m \cdot 3 + b \\ \text{und } B \in g & : & \underline{-6 = m \cdot 1 + b} \\ & & 14 = m \cdot 2 \quad \rightarrow \quad m = 7 \quad \rightarrow \quad b = -13 \end{array}$$

also schliesslich: g: $y = 7 \cdot x - 13$

2. Andere Formen der Geradengleichung

Je nachdem, durch welche Stücke eine Gerade gegeben ist, kann es nützlich sein, weitere Formen der Geradengleichung zu kennen:

a) Gerade gegeben durch einen Punkt $P_1(x_1/y_1)$ und die Steigung m

g: $y - y_1 = m(x - x_1)$

PUNKT-STEIGUNGS-FORMEL

b) Gerade gegeben durch 2 Punkte $P_1(x_1/y_1)$, $P_2(x_2/y_2)$

g: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$

ZWEI-PUNKTE-FORMEL

c) Gerade durch den x-Achsenabschnitt a und den y-Achsenabschnitt b gegeben

g: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

ACHSENABSCHNITTS-FORMEL

Bem : Im allgemeinen ist es üblich, die Geradengleichungen in ihrer <u>expliziten</u>, d.h. nach y aufgelösten, Form darzustellen.

Bsp 4: Gerade durch P(7/3) mit der Steigung m = 2

$$g: y - 3 = 2\cdot(x - 7) \rightarrow g: y = 2x - 11$$

Bsp 5: Gerade durch A(3/5) und B(6/3)

$$g: \ y-5 = \frac{3-5}{6-3}\cdot(x-3) \quad \rightarrow \quad g: \ y = -\frac{2}{3}x + 7$$

Bsp 6: Gerade mit den Achsenabschnitten a = 7 und b = -3

$$g: \ \frac{x}{7} + \frac{y}{-3} = 1 \quad \rightarrow \quad g: \ y = \frac{3}{7}x - 3$$

3. <u>Die allgemeine Gleichung 1. Grades in x und y</u>

Die allgemeine Gleichung 1. Grades in x und y

$$A\cdot x + B\cdot y + C = 0 \qquad (B \neq 0)$$

stellt immer eine Gerade dar, nämlich die Gerade mit der Steigung m = - A/B und dem y-Achsenabschnitt b = - C/B

Die Darstellung der Geradengleichung in der Form A·x + B·y + C = 0 nennt man die <u>implizite</u> Form.

Bsp 7: Die Gerade des Bsp 6 würde in impliziter Form (geeignet erweitert) also lauten:

$$g: 3x - 7y - 21 = 0$$

§ 3 SCHNITTPUNKT UND SCHNITTWINKEL ZWEIER GERADEN, GEGENSEITIGER ABSTAND VON PUNKT UND GERADE

1. Schnittpunkt zweier Geraden

Der Schnittpunkt S zweier Geraden g_1: $y = m_1 \cdot x + b_1$ und g_2: $y = m_2 \cdot x + b_2$ ist ein Punkt, dessen Koordinaten (x_S/y_S) beide Gleichungen zugleich erfüllen müssen.

Man erhält $S(x_S/y_S)$ also als Lösung des Gleichungssystems $\left| \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix} \right|$

Dabei können folgende Fälle eintreten:

$g_1 < g_2$	$\rightarrow$	eindeutige Lösung	$\rightarrow$	unabhängige Gleichungen
$g_1 > g_2$	$\rightarrow$	keine Lösung	$\rightarrow$	widersprechende Gleichungen
$g_1 = g_2$	$\rightarrow$	∞ viele Lösungen	$\rightarrow$	abhängige Gleichungen (eine Gleichung ist ein Vielfaches der andern)

Bsp 1:

g: $y = 3x - 5$
h: $y = -x + 11$

$g \cap h$: $3x - 5 = -x + 11 \rightarrow 4x = 16 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 7$

also: S(4/7)

Bsp 2:

$$
\begin{array}{lrl}
g: & 3x - 7y - 10 = 0 & |\cdot 2 \\
h: & 5x + 2y - 3 = 0 & |\cdot 7 \quad \text{addieren} \\
\hline
g \cap h: & 41x \quad - 41 = 0 &
\end{array}
$$

$\rightarrow x = 1 \rightarrow y = -1$

also: S(1/-1)

2. Schnittwinkel zweier Geraden

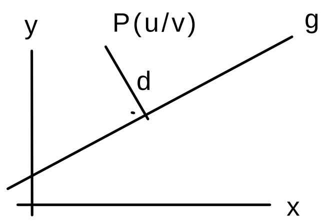
Der Schnittwinkel zweier Geraden ist die Differenz der Steigungswinkel der Geraden.

Bsp 3: g: $y = 5x - 11 \quad \rightarrow \quad m_g = 5 \quad \rightarrow \quad \alpha_g = 78.69°$
h: $y = -2x + 3 \quad \rightarrow \quad m_h = -2 \quad \rightarrow \quad \alpha_h = -63.43°$

also: Schnittwinkel $\omega = 78.69° - (-63.43°) = 142.12°$ (bzw. $\omega = 37.88°$)

3. Abstand Punkt - Gerade

Die Messung des Abstandes Punkt - Gerade setzt voraus, dass die Geraden-gleichung in ihrer impliziten Form, d.h. als g: $Ax + By + C = 0$ dargestellt ist.
Der Abstand d eines Punktes P(u/v) von der Geraden g berechnet sich dann wie folgt:



$$d = \frac{|Au + Bv + C|}{+\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Bsp 4: g: $y = \frac{3}{4}x + 4$; P(1/2)

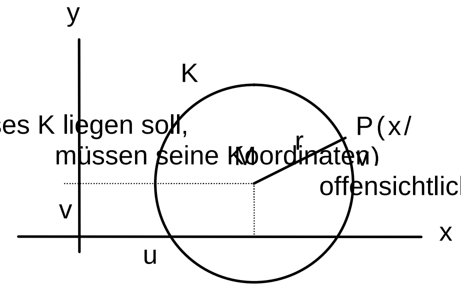
g: $\frac{3}{4}x - y + 4 = 0$ oder g: $3x - 4y + 16 = 0$

also:

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 16|}{+\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{11}{5} = 2.2 \text{ [E]}$$

§ 4 DIE KREISGLEICHUNG

Mittelpunkt des Kreises M(u/v); Radius r



Falls ein Punkt P(x/y) auf der Peripherie des Kreises K liegen soll, müssen seine Koordinaten offensichtlich der folgenden Gleichung genügen (Pythagoras):

$$K: (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

HAUPTFORM DER KREISGLEICHUNG, M(u/v), r

Falls der Mittelpunkt des Kreises gerade in M(0/0) liegt, ergibt sich die vereinfachte Version:

$$K: x^2 + y^2 = r^2$$

HAUPTFORM DER KREISGLEICHUNG, M(0/0), r

Bsp 1: M(2/-1.5), r = 3.5

K: $(x - 2)^2 + (y + 1.5)^2 = 3.5^2$ (Hauptform)

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 3y + 2.25 = 12.25$

oder:

K: $x^2 + y^2 - 4x + 3y - 6 = 0$ (implizite Form)

Bem: Beachten Sie, dass in dieser impliziten Form M und r nicht mehr direkt ablesbar sind ! Benützen Sie zu diesem Zweck die Zusammenstellung auf Seite 22 !

Bsp 2: Gesucht die Koordinaten des Mittelpunkts M und der Radius r des Kreises
K: $4x^2 + 4y^2 + 24x - 20y + 45 = 0$

Man identifiziert : A = 4, B = 4, C = 24, D = -20, E = 45
und also : $\delta = 16$
daraus folgt : M(-3/2.5) und r = 2

§ 5 KREIS UND GERADE

1. Schnitt Kreis - Gerade

Sind ein Kreis K: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ und eine Gerade g: $y = m \cdot x + b$ gegeben, so lässt sich ihre gegenseitige Lage an den Lösungen des Gleichungssystems $\left| \begin{matrix} g \\ K \end{matrix} \right|$ ablesen.

Dieses Gleichungssystem wird am einfachsten gelöst, indem man die Gleichung von g in K einsetzt. Die daraus resultierende quadratische Gleichung für die Variable x hat dann entweder:

2 verschiedene reelle Lösungen $\rightarrow$ g schneidet K

2 zusammenfallende reelle Lösungen $\rightarrow$ g berührt K

2 komplexe Lösungen $\rightarrow$ g meidet K

Die Lösungen für x (und die aus der Gleichung von g anschliessend berechneten zugehörigen Lösungen für y) sind gerade die Koordinaten der Schittpunkte $g \cap K$ bzw. des Berührungspunktes.

Bsp 1: K: $(x - 12)^2 + (y - 3)^2 = 85$; g: $y = - 4x + 17$

$K \cap g$:
$$(x - 12)^2 + (- 4x + 17 - 3)^2 = 85$$
$$x^2 - 24x + 144 + 16x^2 - 112x + 196 = 85$$
$$17x^2 - 136x + 255 = 0$$

$$x_1 = 5 \;;\; x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad y_1 = -3 \;;\; y_2 = 5$$

g schneidet K in den beiden Punkten $S_1(5/-3)$ und $S_2(3/5)$

Bsp 2: K: $x^2 + y^2 = 169$; g: $y = - 2.4x + 33.8$

$K \cap g$:
$$x^2 + (- 2.4x + 33.8)^2 = 169$$
$$x^2 + 5.76x^2 - 162.24x + 1142.44 = 169$$
$$6.76x^2 - 162.24x + 973.44 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 12 \quad \rightarrow y_1 = y_2 = 5$$

g ist Tangente an K mit Berührungspunkt T(12/5)

2. Allgemeine Lösung des Kreistangentenproblems

Def 1: Ist ein Kreis K: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ in seiner Hauptform und ein Punkt $P(x_0/_0)$ gegeben, so nennt man

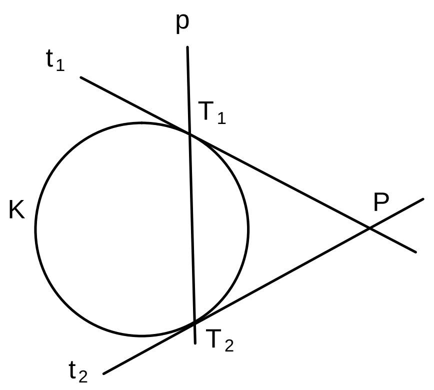
$$p: (x_0 - u)(x - u) + (y_0 - v)(y - v) = r^2$$

die symmetrisierte Kreisgleichung.

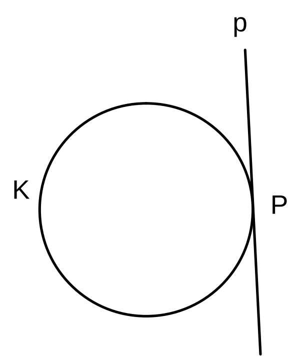
Durch die Gleichung p wird offensichtlich eine Gerade dargestellt.
Man nennt sie die Polare des Punktes P in Bezug auf den Kreis K.

Satz1: Falls der Punkt P ausserhalb des Kreises K liegt, so ist die Polare p von P bezüglich K gerade die Verbindungsgerade der Berührungspunkte der beiden Tangenten von P aus an K.
Falls der Punkt P auf dem Kreis K liegt, so ist die Polare p von P bezüglich K gerade die Kreistangente in P.

P ausserhalb K



P auf K



Durch diese Erkenntnis werden also alle Probleme im Zusammenhang mit Kreistangenten gelöst:

Fall a) Gesucht die beiden Tangenten an einen Kreis von einem Punkt ausserhalb:
$\rightarrow$ die symmetrisierte Kreisgleichung p ergibt die Verbindungsgerade der beiden Berührungspunkte. Diese werden als Schnittpunkte $p \cap K$ berechnet und die beiden Tangentengleichungen mit der Zwei-Punkte-Formel hergeleitet.

Fall b) Gesucht die Tangente an einen Kreis in einem Kreispunkt selbst:
$\rightarrow$ die symmetrisierte Kreisgleichung p ist gerade die gesuchte Tangentengleichung

Bsp 3: Gesucht die Gleichung der Tangente im Punkt P(9/12) des Kreises mit M(3/4) und r = 10

K: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 100$ (Kontrolle $P \in K$: o.k.)
p: $(9 - 3)(x - 3) + (12 - 4)(y - 4) = 100$

$6x - 18 + 8y - 32 = 100 \rightarrow$ Tangente : t: $y = - 0.75x + 18.75$

Bsp 4: Gesucht die Tangenten von P(15/5) aus an den Kreis mit M(0/0) und $r = \sqrt{50}$

K: $x^2 + y^2 = 50$

p: $15x + 5y = 50 \rightarrow y = -3x + 10$

$p \cap K$: $x^2 + (-3x + 10)^2 = 50 \rightarrow x^2 + 9x^2 - 60x + 100 = 50$
$10x^2 - 60x + 50 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$
$x_1 = 5$; $x_2 = 1 \rightarrow y_1 = -5$; $y_2 = 7$

Die beiden Berührungspunkte sind also $T_1(5/-5)$ und $T_2(1/7)$.

Zusammen mit P(15/5) ergibt das mit der Zwei-Punkte-Formel:
t_1: $y = x - 10$ und t_2: $y = -\frac{1}{7}x + \frac{50}{7}$

3. Ergänzung: Schnitt zweier Kreise an einem Beispiel

Gegeben seien zwei sich schneidende Kreise
K_1: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ und K_2: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$
Gesucht die Koordinaten ihrer Schnittpunkte.

Natürlich sind die Koordinaten der Schnittpunkte die Lösungen des Gleichungssystems $\begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \end{vmatrix}$

Da es sich um ein System mit zwei quadratischen Gleichungen in x und y handelt, ist folgendes Vorgehen zu empfehlen:

1. Differenz der beiden Kreisgleichungen in ihrer impliziten Form bilden, so dass die quadratischen Glieder in x und y wegfallen:

   K_1: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$
   K_2: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$

   Differenz der Gleichungen: $6x - 2y - 34 = 0$

2. Nach x oder y auflösen und in K_1 oder K_2 einsetzen:

   $6x - 2y - 34 = 0 \rightarrow y = 3x - 17 \rightarrow$ in K_1 einsetzen

   $x^2 + (3x-17)^2 - 2x + 2(3x-17) - 23 = 0$
   $x^2 + 9x^2 - 102x + 289 - 2x + 6x - 34 - 23 = 0$

   $10x^2 - 98x + 232 = 0 \rightarrow x_1 = 5.8$; $x_2 = 4$

   aus $y = 3x - 17$ folgt: $y_1 = 0.4$; $y_2 = -5$

   Die beiden Schnittpunkte sind $S_1(5.8/0.4)$ und $S_2(4/-5)$

§ 6 DIE ELLIPSE

1. Affinität

Def 1: Zwei ebene Figuren heissen affin zueinander, wenn jedem Punkt der einen Figur ein Punkt der andern Figur so entspricht, dass:

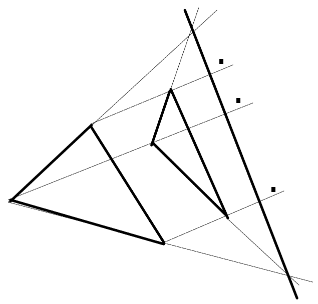
- die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte parallel sind
- entsprechende Geraden sich auf einer festen Achse schneiden

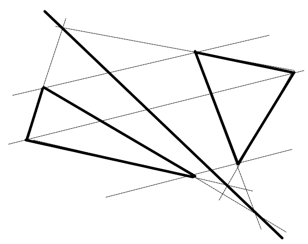
Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte heissen Affinitätsstrahlen, ihre Richtung Affinitätsrichtung.

Die feste Achse, auf der sich entsprechende Geraden schneiden, heisst Affinitätsachse.

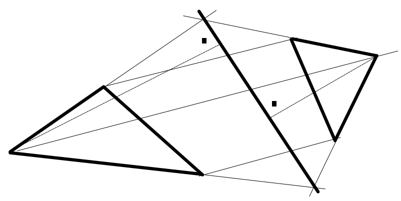
Stehen die Affinitätsstrahlen senkrecht auf der Affinitätsachse, so nennt man die Abbildung normalaffin, andernfalls schiefaffin.

Bsp 1: normalaffin schiefaffin





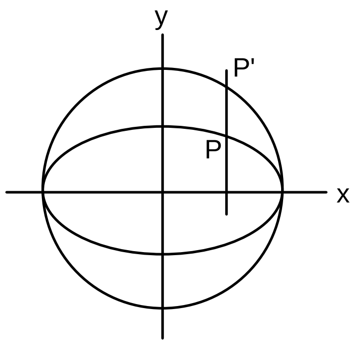
Satz1: Die Affinitätsachse teilt alle Affinitätsstrahlen in einem festen Verhältnis μ , dem Affinitätsverhältnis.
Dieses Verhältnis ist gleich dem Verhältnis der Abstände einander entsprechender Punkte von der Affinitätsachse.



2. Die Ellipse als affines Bild eines Kreises

Def 2: Das affine Bild eines Kreises heisst Ellipse.

Bsp 2: Kreis, Mittelpunkt M(0/0), Radius r, normalaffin,
Affinitätsachse = x-Achse, Affinitätsverhältnis μ .



Wenn der Punkt P(x/y) auf der Ellipse liegt, hat P' offenbar die Koordinaten

$P'(x/\frac{y}{\mu})$, d.h. für ihn gilt:

$x^2 + (\frac{y}{\mu})^2 = r^2$ bzw.

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{(\mu r)^2} = 1$$

Anstatt r bezeichnet man üblicherweise die horizontale Halbachse der Ellipse mit a. Die vertikale Halbachse wird mit b bezeichnet, wobei offenbar gerade $b = \mu \cdot r$ ist.

Satz2: Die Ellipse E mit Mittelpunkt M(0/0) und den Halbachsen a und b hat die Gleichung:

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Satz3: Eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems um die Strecken u beziehungsweise v in x- bzw. y-Richtung ergibt die Verallgemeinerung:

Die Ellipse E mit Mittelpunkt M(u/v) und den Halbachsen a und b hat die Gleichung

$$E: \frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

HAUPTFORM DER ELLIPSENGLEICHUNG

Bsp 3: Die Ellipse mit M(3/-5) und den Achsen a = 7 und b = 4 hat die Gleichung:

$$E: \frac{(x-3)^2}{49} + \frac{(y+5)^2}{16} = 1 \qquad \text{(Hauptform)}$$

$$16\cdot(x-3)^2 + 49\cdot(y+5)^2 = 16\cdot 49$$
$$16x^2 - 96x + 144 + 49y^2 + 490y + 1225 = 784$$

oder $$E: 16x^2 + 49y^2 - 96x + 490y + 585 = 0 \qquad \text{(implizite Form)}$$

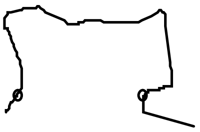
3. Die Fadenkonstruktion der Ellipse

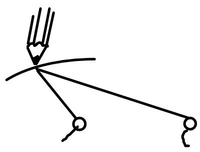
Die Ellipse lässt sich auch als geometrischer Ort (g.O.) definieren:

Welches ist der g.O. aller Punkte, bei denen die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten immer gleich gross ist ?

Dieser g.O. lässt sich zeichnerisch realisieren, indem man zwischen den beiden festen Punkten einen Faden einspannt, dessen Länge gerade der gewünschten Abstandssumme entspricht.

Führt man bei angespannten Faden nun den Stift um die beiden festen Punkte herum, so entsteht das Bild des g.O.:





Behauptung: dieser g.O. ist gerade eine Ellipse !

Zur rechnerischen Bestimmung eines g.O. empfiehlt sich das folgende Vorgehen:

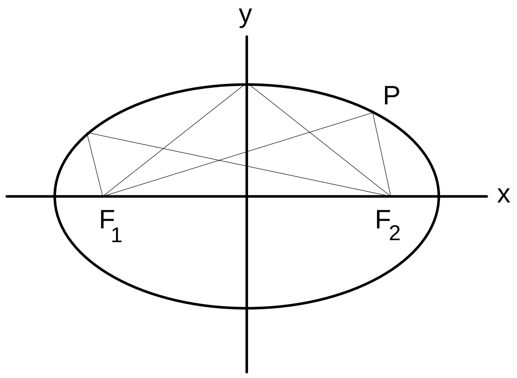
1. Man wählt einen Punkt P, von dem man voraussetzt, dass er die Bedingungen des g.O. erfüllt, und hält die Ortsbedingung für diesen Punkt fest

2. Man wählt ein geeignetes Koordinatensystem, gibt P die Koordinaten P(x/y) und übersetzt die Ortsbedingung in Koordinaten

3. Man vereinfacht die entstandene Koordinatengleichung für den Punkt P(x/y) durch Umformung

4. Man interpretiert das Resultat anhand dieser Gleichung

Für die Fadenkonstruktion ergibt dies:



Die Länge L des Fadens muss gerade gleich dem horizontalen Durchmesser der Ellipse sein, also:

$$L = 2a$$

Die beiden festen Punkte müssen symmetrisch zu O auf der x-Achse liegen, z.B.

$F_1(-e/0)$; $F_2(e/0)$

Bestimmung des g.O.:

1. $d_1 + d_2 = 2a$

2. $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$

3. $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$
   $x^2 + 2xe + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2xe + e^2 + y^2$
   $4a\cdot\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xe$
   $a\cdot\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a^2 - xe$
   $a^2x^2 - 2a^2xe + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xe + x^2e^2$
   $x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2 = a^2(a^2 - e^2)$

   Nun ist aber $a^2 - e^2 = b^2$, wie obige Zeichnung zeigt.
   Es folgt also:

   $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

4. Dies ist eine Ellipse, M(0/0), Halbachsen a und b

<u>Def 3</u>: Die verwendeten Punkte F_1 und F_2 heissen <u>Brennpunkte</u> der Ellipse. Ihr Abstand e vom Mittelpunkt nennt man die <u>lineare Exzentrizität</u>, das Verhältnis $\varepsilon = e/a$ ist die <u>numerische Exzentrizität</u>.

<u>Satz4</u>: Für die Ellipse gilt:

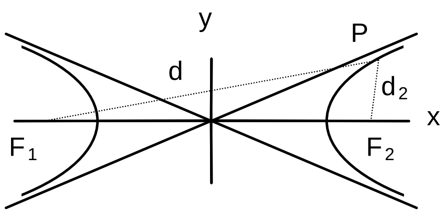
lineare Exzentrizität: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

numerische Exzentrizität: $0 \le \varepsilon = e/a < 1$ ($\varepsilon = 0 \rightarrow$ Kreis)

§ 7 DIE HYPERBEL

<u>Def 1</u>: Die Hyperbel ist der g.O. aller Punkte, deren Differenz der Entfernungen von 2 festen Punkten F_1 und F_2 immer gleich gross ist.

Bestimmung der Ortsgleichung:
Differenz $d_1 - d_2 = 2a$
Feste Punkte $F_1(-e/0)$ und $F_2(e/0)$



$d_1 - d_2 = 2a$ mit
$d_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$ und
$d_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$
Die gleiche Rechnung wie bei der Ellipse führt auf

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wobei $b^2 = e^2 - a^2$ eine reine Abkürzung ohne geometrische Bedeutung ist.

Nach Parallelverschiebung des Koordinatensystems erhält man:

<u>Satz1</u>: Die Hyperbel H mit dem Mittelpunkt M(u/v) und den Halbachsen a und b hat die Gleichung

$$H: \frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

HAUPTFORM DER HYPERBELGLEICHUNG

Bsp 1: Die Gleichung der Hyperbel mit M(-7/2) und den Halbachsen a = 6 und b = 3 lautet:

$$H: \frac{(x+7)^2}{36} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \qquad \text{(explizite Form)}$$

$9\cdot(x + 7)^2 - 36\cdot(y - 2)^2 = 9\cdot 36$
$9x^2 + 126x + 441 - 36y^2 + 144y - 144 = 324$

oder H: $9x^2 - 36y^2 + 126x + 144y - 27 = 0$ (implizite Form)

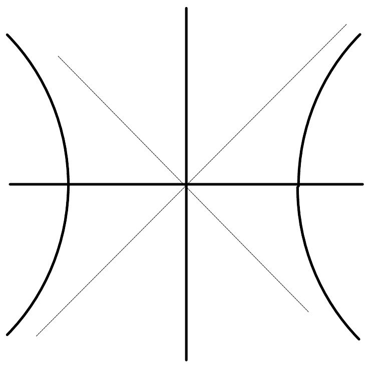
<u>Def 2</u>: F_1 und F_2 sind wieder die beiden <u>Brennpunkte</u>, e heisst <u>lineare Exzentrizität</u>, $\varepsilon = e/a$ ist die <u>numerische Exzentrizität</u>.

Die beiden Geraden durch den Mittelpunkt M mit den Steigungen +b/a bzw. -b/a, an die sich die Hyperbel für $x \to \pm\infty$ annähert, heissen <u>Asymptoten</u> der Hyperbel.

<u>Satz2</u>: Für die Hyperbel gilt:

lineare Exzentrizität: $e = \sqrt{a^2 + b^2}$

numerische Exzentrizität: $\varepsilon = e/a > 1$



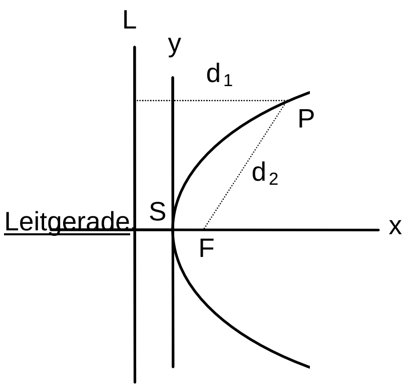
Ist a = b so sind die beiden Asymptoten parallel zu den beiden Winkelhalbierenden.

Man nennt die Hyperbel in diesem Spezialfall eine <u>rechtwinklige</u> Hyperbel.

§ 8 DIE PARABEL

Def 1: Der g.O. aller Punkte, die von einem festen Punkt und einer festen Geraden den gleichen Abstand haben, heisst Parabel.

Bestimmung der Ortsgleichung:



fester Punkt $F(\frac{p}{2} / 0)$

feste Gerade: L: $x = -\frac{p}{2}$

F heisst Brennpunkt, die

Gerade L

Die Distanz p von L zu F nennt man Quermass der Parabel.

Der Punkt S auf der Symmetrieachse ist der Scheitel der Parabel.

1. $d_1 = d_2$

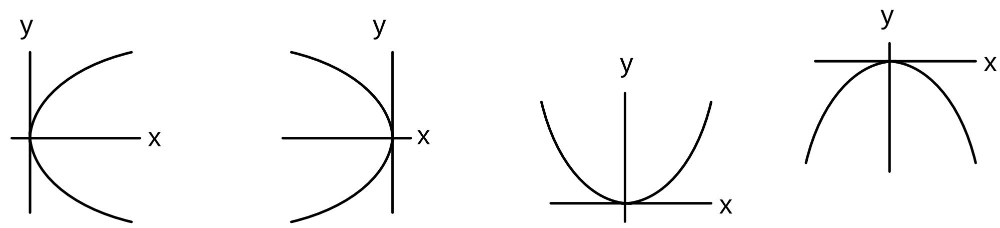
2. $x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$

3. $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$

   also: $y^2 = 2px$

4. Parabel, Scheitel S(0/0), Oeffnung nach rechts

Die 4 Hauptlagen der Parabel



$y^2 = 2px$ $\qquad$ $y^2 = -2px$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2p}x^2$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{2p}x^2$

Nach Parallelverschiebung des Koordinatensystems ergibt sich die Verallgemeinerung:

Satz1: Die Parabel mit Scheitel in S(u/v) und Quermass p hat die Gleichung:

Oeffnung nach rechts / links : $(y - v)^2 = \pm 2p(x - u)$

Oeffnung nach oben / unten : $y - v = \pm \frac{1}{2p}(x - u)^2$

Für die beiden Lagen mit senkrechter Achse verwendet man häufig auch die Darstellung als Funktionsgraph:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Bsp 1: Man lege durch Q(4/10) je eine liegende und eine stehende Parabel mit Scheitel in S(0/0)

a) liegend: Ansatz P: $y^2 = 2px$ und da $Q \in P$ ergibt sich
$100 = 2p \cdot 4 \rightarrow p = 12.5$

P: $y^2 = 25x$

b) stehend: Ansatz P: $y = \frac{1}{2p}x^2$ und da $Q \in P$ ergibt sich

$10 = 16/2p \rightarrow p = 0.8$

P: $y = \frac{x^2}{16} = \frac{5}{8}x^2$

§ 9 DIE ALLGEMEINE GLEICHUNG 2. GRADES, TANGENTEN AN KEGELSCHNITTE

Def 1: Die implizite Form der Gleichungen von Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel

$$A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0$$

wo A und B nicht beide gleichzeitig = 0 sind, heisst
allgemeine Gleichung 2. Grades in x und y.

Die oben genannten, durch diese Gleichung dargestellten Kurven, nennt man Kegelschnitte, weil sie ebenfalls durch den Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene erzeugt werden können.

1. Analyse der allgemeinen Gleichung 2. Grades

Art der Kurve:

	$>$	$\rightarrow$	Ellipse (speziell: A=B $\rightarrow$ Kreis)
$A \cdot B$	$= 0$	$\rightarrow$	Parabel
	$<$	$\rightarrow$	Hyperbel

Lage und Grösse:

a) Kreis/Ellipse/Hyperbel

$$M\left(\frac{-C}{2A} \,/\, \frac{-D}{2B}\right) \;;\quad a^2 = \left|\delta / A\right| \;;\quad b^2 = \left|\delta / B\right|$$

$$\text{wobei}\quad \delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E$$

b) Parabel

1) $$A = 0 : S\left(\frac{D^2}{4BC} - \frac{E}{C} \,/\, \frac{-D}{2B}\right) \;;\quad p = \left|C / 2B\right|$$

	$<$	$\rightarrow$	Oeffnung nach rechts
$B \cdot C$	0		
	$>$	$\rightarrow$	Oeffnung nach links

2) $$B = 0 : S\left(\frac{-C}{2A} \,/\, \frac{C^2}{4AD} - \frac{E}{D}\right) \;;\quad p = \left|D / 2A\right|$$

	$<$	$\rightarrow$	Oeffnung nach oben
$A \cdot D$	0		
	$>$	$\rightarrow$	Oeffnung nach unten

Bsp 1: $4x^2 - y^2 + 20x + 6y = 0$ (A=4, B=-1, C=20, D=6, E=0)

$A \cdot B < 0 \;\rightarrow\;$ Hyperbel ; $\delta = 16$
M(-2.5/3) ; a = 2 , b = 4

Bsp 2: $x^2 + 2x - 10y + 6 = 0$ (A=1, B=0, C=2, D=-10, E=6)

$A \cdot B = 0 \;\rightarrow\;$ Parabel
S(-1/0.5) ; p = 5 ; Oeffnung nach oben

2. Tangenten an Kegelschnitte

Das beim Kreis angewendete Verfahren des Symmetrisierens der Hauptform wird auch bei den anderen Kegelschnitten angewandt.

Die symmetrisierten Gleichungen lauten:

Ellipse: $$p:\ \frac{(x_0-u)(x-u)}{a^2} + \frac{(y_0-v)(y-v)}{b^2} = 1$$

Hyperbel: $$p:\ \frac{(x_0-u)(x-u)}{a^2} - \frac{(y_0-v)(y-v)}{b^2} = 1$$

Parabel liegend: $$p:\ (y_0-v)(y-v) = \pm[p(x_0-u) + p(x-u)]$$

Parabel stehend: $$p:\ (y_0-v)+(y-v) = \pm\frac{1}{p}(x_0-u)(x-u)$$

Dabei ist p wieder die Polare des Punktes $P(x_0/y_0)$ in Bezug auf die jeweilige Kurve.

Es gilt (wie beim Kreis; vgl p.12) :

- Liegt $P(x_0/y_0)$ auf der Kurve, so ist p gerade die Tangente an die Kurve in diesem Punkt P.
- Liegt $P(x_0/y_0)$ ausserhalb der Kurve, so ist p die Verbindungsgerade der Berührungspunkte der beiden Tangenten von P aus an die Kurve.

Die Berührungspunkte der Tangenten können also durch den Schnitt von p mit der Kurve berechnet und anschliessend mit der Zwei-Punkte-Formel die Tangenten-gleichungen bestimmt werden.

Bsp 3: Man lege von Q(-3/0) aus die Tangenten an die Parabel
$P: y^2 - 8x - 4y + 12 = 0$

1. Hauptform durch Analyse: (A=0, B=1, C=-8, D=-4, E=12)
   S(1/2) ; p = 4 ; Oeffnung nach rechts

   $P: (y - 2)^2 = 8(x - 1)$

2. Symmetrisieren:
   $p: (0 - 2)(y - 2) = [4(-3 - 1) + 4(x - 1)]$
   $- 2y + 4 = - 16 + 4x - 4$

   $p: y = - 2x + 12$

3. $p \cap P$: $(- 2x + 12)^2 - 8x - 4(- 2x + 12) + 12 = 0$
   $4x^2 - 48x + 144 - 8x + 8x - 48 + 12 = 0$
   $x^2 - 12x + 27 = 0 \rightarrow x_1 = 9$; $x_2 = 3 \rightarrow y_1 = -6$; $y_2 = 6$

   Berührungspunkte : $T_1(9/-6)$; $T_2(3/6)$

4. Tangenten mit dem Punkt Q (Zwei-Punkte-Formel):

   $t_1: y = - 0.5x - 1.5$; $t_2: y = x + 3$

Übungen zu § 1

1. Bestimmen Sie eine Gleichung in x und y so, dass ihre Kurve eine Gerade durch den Nullpunkt mit der Steigung $m = 2$ ist.

2. Berechnen Sie die Länge der Seiten und der Diagonalen des Vierecks
A(0/-2.5), B(6/0), C(3/4), D(-3/1.5)

3. Untersuchen Sie das folgende Viereck auf seine Form:
A(-2/-3), B(2.8/-1.4), C(1.4/2.8), D(-3.5/1.5)

4. Bestimmen Sie für das Viereck A(-3/0), B(5/0), C(4/4), D(0/6) die Koordinaten 4 Seitenmitten E, F, G, H und dann diejenigen der Mittelpunkte M und N der Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten.

5. Der Mittelpunkt eines Parallelogramms ist M(2/1), zwei Ecken sind A(6/1) und B(4/3). Berechnen Sie die Koordinaten der beiden anderen Ecken C und D.

6. Welche Punkte haben von O(0/0) und A(4/8) je die Entfernung $d = 5$ [E] ?

Übungen zu § 2

1. Geben Sie die Gleichung der Geraden durch O(0/0) mit dem Steigungswinkel $\alpha = 30°$.

2. Wie lautet die Gleichung der Parallele zur x-Achse durch den Punkt A(3/2) ?

3. Liegen P(3/4) bzw. Q(8/7) auf der Geraden durch A(0/2) mit m = 2/3 ?

4. Wählen Sie m so, dass g: $y = mx + 2$ durch A(2/3) geht.

5. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g: A(5/4), B(1/2)

6. Bestimmen Sie die Gleichungen der Seiten des Dreiecks A(-2/-3), B(6/1), C(0/3)

7. Legen Sie durch P(3/4) die Parallele p zu g: $y = 2x - 5$

8. Legen Sie durch P(-3/8) die Senkrechte s zu g: $y = -3x + 4$

9. Gesucht die Gleichung der Geraden g mit den Achsenabschnitten a = 2.5 und b = 6

10. Gesucht die Gleichung der Senkrechten s auf die Gerade g: $5x - 7y - 15 = 0$ im Punkt P(3/?) von g.

11. Durch den Punkt P(5/4) lege man die Geraden, die mit g: $3x + 4y + 6 = 0$ einen Winkel von 45° einschliessen.

12. Gesucht die Koordinaten eines Punktes P auf der x-Achse, der von P(1/7) und Q(9/2) gleich weit entfernt ist.

13. Gesucht derjenige Punkt auf der Geraden g: A(4/0), B(10/9), der am nächsten bei P(11/4) liegt.

Übungen zu § 3

1. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g: $y = 0.75x - 2$ und h: $y = -0.5x + 3$

2. Bestimmen Sie die Eckpunkte und die Winkel des Dreiecks, dessen Seiten auf den Geraden g: $3x - 2y + 4 = 0$, h: $2x - 6y - 9 = 0$ und i: $2x + 2y - 9 = 0$ liegen.

3. Untersuchen Sie, ob die folgenden Geraden alle durch einen Punkt gehen:
g: $y = -0.25x$, h: $y = 0.5x - 2$, i: $y = -1.5x + 3.5$

4. Beweisen Sie, dass die 3 Höhen des Dreiecks A(-5/0), B(3/-4), C(0/5) sich in einem Punkt schneiden.

5. Berechnen Sie den Schnittpunkt S und den Schnittwinkel ω der beiden Geraden
g: A(-5/6), B(3/2) und h: C(-1/-1), D(2/-10).

6. Gegeben 2 Eckpunkte A(5/-2) und B(-3/5) sowie der Schwerpunkt S(2/3) eines Dreiecks. Berechnen Sie die Koordinaten der 3. Ecke C

7. Berechnen Sie den Abstand des Punkts P(-3/2) von den folgenden Geraden:

   a) g: $6x - 8y + 25 = 0$

   b) g: $3x + 3y - 7 = 0$

   c) g: $12x + 5y + 26 = 0$

   d) g: $y = -0.75x + 4$

8. Berechnen Sie den Abstand der beiden parallelen Geraden
g: $3x - 4y + 10 = 0$ und h: $3x - 4y + 20 = 0$

9. Bestimmen Sie Radius r und Mittelpunkt M des Umkreises des Dreiecks
A(-4/0), B(3/-1), C(0/8).

10. Bestimmen Sie die Koordinaten des Inkreismittelpunkts des Dreiecks
A(14/9), B(-10/2), C(2/-7).

Übungen zu § 4

1. Wie lautet die Gleichung des Kreises mit M(2/-3) und r = 4 ?

2. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises mit M(3/0), der die y-Achse berührt.

3. Gesucht die Gleichung des Kreises mit M(-3/3), der durch den Punkt P(9/8) geht.

4. Berechnen Sie Mittelpunkt und Radius der folgenden Kreise:

   a) K: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$

   b) K: $x^2 + y^2 + 10x + 14y + 70 = 0$

5. Wie lautet die Gleichung des Kreises durch die 3 Punkte P(1/3), Q(3/-3) und R(7/1) ?

6. Berechnen Sie die kleinste Entfernung der Geraden g: $y = 2x + 10$ von der Peripherie des Kreises K: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 14 = 0$

7. Bestimmen Sie den Kreis, der durch A(1/1) und B(2/2) läuft und seinen Mittelpunkt auf der Geraden g: $y = 2x$ hat.

8. Bestimmen Sie den zu K: $5x^2 + 5y^2 + 24x - 32y - 9 = 0$ konzentrischen Kreis K*, der die x-Achse berührt.

9. Berechnen Sie die Schnittpunkte des Kreises K: $x^2 + y^2 - 12x + 15y + 36 = 0$ mit den beiden Koordinatenachsen.

Übungen zu § 5

1. Berechnen Sie die Länge der Sehne, welche der Kreis K: $x^2 + y^2 = 10$ von der Geraden g: $y = 2x - 5$ abschneidet.

2. Schneidet die Gerade g: $y = -0.6x + 0.5$ den Kreis K mit Mittelpunkt M(0/-3) und Radius $r = 3$?

3. Der Kreis K: $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$ ist der Umkreis eines gleichschenkligen Dreiecks ABC, dessen Basis AB auf der Geraden g: $x + 7y - 11 = 0$ liegt.

   Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte A, B und C.

4. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K: $x^2 + y^2 + 5x = 0$ im Punkt P(-1/2).

5. Gesucht die Tangenten an den Kreis K: $x^2 + y^2 = 13$, welche parallel zur Geraden g: $2x - 3y = 0$ laufen.

6. Legen Sie von P(8/6) aus die Tangenten an den Kreis K mit Mittelpunkt M(3/1) und Radius $r = \sqrt{10}$

7. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Kreise K_1: $x^2 + y^2 = 25$ und K_2: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$

8. Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Hypothenuse A(2/6) B(-6/0). Gesucht sind die Koordinaten der 3. Ecke C, wenn diese auf dem Kreis K: $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 28 = 0$ liegen soll.

9. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Gerade g: $x + 2y - 14 = 0$ mit dem Kreis K: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 35 = 0$

10. Zwei verschiedene Kreise berühren je beide Koordinatenachsen und gehen ausserdem durch den Punkt P(3/6). Wie lauten ihre Gleichungen und wie die Gleichungen ihrer Tangenten in P ?

Übungen zu § 6

1. Eine Ellipse mit M(0/0) und $a = 5$ soll durch P(3/2) laufen. Wie lautet ihre Gleichung ?

2. Bestimmen Sie die Ellipse mit M(0/0), welche durch P(2/2) und Q(4/1) läuft.
   Wieviel messen ihre Halbachsen ?

3. Benützen Sie die Zuammenstellung auf Seite 22 um die Mittelpunktskoordinaten und die beiden Halbachsen der Ellipse $E: 9x^2 + 16y^2 - 36x - 32y - 92 = 0$ zu bestimmen.

4. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden $g: y = -0.5x + 5$ mit der Ellipse $E: x^2 + 4y^2 - 52 = 0$

5. Gesucht die Gleichung der Ellipse mit den beiden Brennpunkten $F_1(-1/2)$ und $F_2(7/2)$ und der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = 0.5$

6. Die Bahn der Erde um die Sonne ist eine Ellipse mit der grossen Halbachse $a = 149'600'000$ [km], der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = 0.0167217$ und der Sonne in einem Brennpunkt.
   Berechnen Sie die minimale und die maximale Entfernung des Erdmittelpunktes vom Sonnenmittelpunkt und die kleine Halbachse b der Bahn.

7. Gesucht der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Quadrate der Entfernungen von A(-3/0) und B(3/0) gleich 50 ist.

8. Gesucht die Gleichung der Ellipse mit M(0/0) und $e = 5$, die durch den Punkt P(3/4) läuft.

9. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden $g: 10x + 9y + 75 = 0$ mit der Ellipse $E: 25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$

10. Gesucht der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die Strecke A(2/1) B(10/7) unter einem rechten Winkel erscheint.

11. Gesucht der geometrische Ort aller Punkte, die von O(0/0) doppelt so weit entfernt sind, wie vom Punkt A(6/0).

12. Welches ist der geometrische Ort aller Punkte im Innern eines Halbkreises mit Radius $r = 10$ [E], welche vom Kreisdurchmesser, der den Halbkreis begrenzt, doppelt so weit entfernt sind, wie vom nächstliegenden Punkt der Kreisperipherie ?

Übungen zu § 7

1. Gesucht die Gleichung der Hyperbel mit den Brennpunkten $F_1(3/1)$ und $F_2(-7/1)$ und der Halbachse $a = 4$

2. Gesucht die Gleichung der Hyperbel mit Mittelpunkt M(0/0), der Halbachse $a = 5$ und der linearen Exzentrizität $e = 7$

3. Bestimmen Sie die Achsen und die Asymptoten der Hyperbel H: $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$

4. Gesucht die Gleichung der rechtwinkligen Hyperbel mit M(0/0), welche durch P(8/-4) läuft.

Übungen zu § 8

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit senkrechter Achse, die durch A(-4/0), B(0/8) und C(6/5) geht.

   Welche Koordinaten hat ihr Scheitel ?

2. Lösen Sie Aufgabe 1 unter Verwendung des Funktionsansatzes.

3. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit horizontaler Achse, die durch A(-3/-3), B(0/0) und C(5/3) geht.

   Welche Koordinaten hat ihr Scheitel ?

4. Wo muss der Leuchtfaden in einem Scheinwerfer sitzen, dessen Parabolspiegel einen Durchmesser von d = 16 [cm] hat und der h = 8 [cm] tief ist, wenn das Licht parallel gebündelt werden soll ?

5. Gesucht die Parabel mit vertikaler Symmetrieachse und Scheitel S(1.5/-1.75), die durch P(9/32) läuft.

Übungen zu § 9

1. Analysieren Sie die folgenden Kurven:

   a) $4x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 37 = 0$

   b) $3y^2 - 5x - 9y - 2 = 0$

   c) $4x^2 + 5y^2 + 40y = 0$

   d) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 128y - 319 = 0$

   e) $y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$

   f) $5x^2 + y^2 - 50x + 8y + 121 = 0$

2. Bestimmen Sie die Tangente an die Ellipse mit M(0/0) und horizontaler Halbachse a = 5 im Kurvenpunkt T(4/1.8)

3. Bestimmen Sie die Tangente an die Hyperbel H: $x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ im Kurvenpunkt T mit der x-Koordinate x = 10 im 1. Quadranten.

4. Legen Sie die Tangente an die Parabel P: $y^2 = 8x$ im Kurvenpunkt T(2/-4)

5. Bestimmen Sie den geometrischen Ort aller Punkte, die von der y-Achse doppelt so weit entfernt sind wie vom Punkt P(6/0).

6. Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch P(10/0) gehen und den Kreis K: $x^2 + y^2 = 36$ berühren.

7. Gesucht der geometrische Ort aller Punkte, für die das Quadrat ihres Abstandes vom Punkt O(0/0) doppelt so gross ist, wie ihr Abstand von der Vertikalen bei x = 10

BERNER FACHHOCHSCHULE

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR BURGDORF

ABTEILUNG ARCHITEKTUR

GEOMETRIE: VORLESUNG 3

VEKTORRECHNUNG

COPYRIGHT 2007: AMTSNACHFOLGER DES COPYRIGHTBESITZERS 2001

COPYRIGHT 2001: B. GYSLER, DIPL. MATHEMATIKER

PROFESSOR AN DER HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR

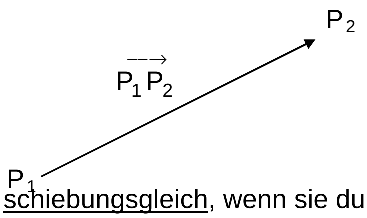
4. AUFLAGE, 2001, BURGDORF, SCHWEIZ

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1 VEKTOREN, LAENGE UND RICHTUNG

Def 1: Ein Pfeil im 3-dimensionalen Raum ist ein geordnetes Punktepaar (P_1,P_2).
P_1 heisst Anfangspunkt, P_2 heisst Spitze des Pfeils.

Man bezeichnet den Pfeil (P_1,P_2) auch etwa mit $\overrightarrow{P_1P_2}$ und zeichnet ihn als Pfeil:



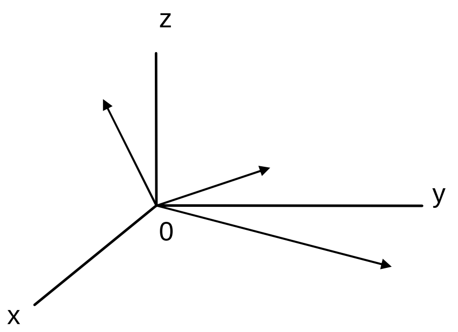
Def 2: Zwei Pfeile heissen schiebungsgleich, wenn sie durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen, das heisst, wenn sie gleiche Länge und Richtung haben.

Def 3: Der Pfeil $\overrightarrow{PP}$ heisst Nullpfeil. Seine Länge ist 0, seine Richtung nicht definiert.
Alle Nullpfeile sind schiebungsgleich.

Def 4: Alle unter sich schiebungsgleichen Pfeile werden in eine Pfeilklasse zusammengefasst. Eine solche Klasse nennt man Vektor.
Ein einzelner Pfeil aus einer derartigen Klasse heisst Repräsentant des Vektors, weil durch i hn der Inhalt der gesamten Klasse eindeutig beschrieben wird.
Die Klasse der Nullpfeile heisst Nullvektor.

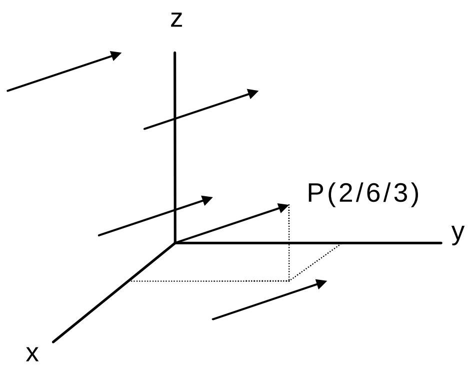
Not : Für Vektoren und deren Repräsentanten benützt man kleine Buchstaben, die mit einem Pfeilchen versehen werden:
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, ...$; Nullvektor: $\vec{0}$

Wählt man ein 3-dimensionales cartesisches Koordinatensystem, so lässt sich jeder Vektor (dh. jede Klasse von unter sich schiebungsgleichen Pfeilen) durch einen ganz speziellen Repräsentanten darstellen: durch denjenigen Pfeil in der Klasse nämlich, dessen Anfangspunkt im Koordinatenursprung O(0/0/0) liegt.



Die Pfeile, deren Anfangspunkte in O(0/0/0) liegen, nennt man Ortspfeile

Jedem Ortspfeil entspricht nun offensichtlich genau ein Punkt im 3-dimensionalen Raum, seine Spitze nämlich, und umgekehrt. Es existiert also eine umkehrbar-eindeutige Zuordnung zwischen Ortspfeilen und Punkten. Weil nun jeder Ortspfeil gleichzeitig Repräsentant eines Vektors ist, lässt sich letztlich jeder Vektor durch die Angabe eines einzigen Punktes - der Spitze seines Ortspfeils - eindeutig darstellen:



Vektor = Klasse von schiebungsgleichen Pfeilen, dargestellt durch seinen Ortspfeil, welcher wiederum durch die Angabe des Punktes P eindeutig beschrieben ist

Not : Um zwischen Punkten und Vektoren unterscheiden zu können, wird folgende Schreibweise vereinbart:

Für den Punkt: P(2/6/3) Für den zugehörigen Vektor: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

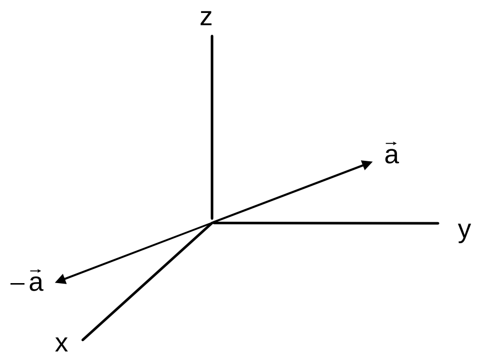
Die Bezeichnung des Vektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird auch für alle seine Repräsentanten gebraucht.

<u>Def 5</u>: Die Koordinaten der zum Ortspfeil eines Vektors gehörenden Spitze werden <u>Vektorkoordinaten</u> genannt.

<u>Def 6</u>: Zu jedem Pfeil $\overrightarrow{P_1 P_2}$ gehört ein <u>Gegenpfeil</u> $\overrightarrow{P_2 P_1}$.

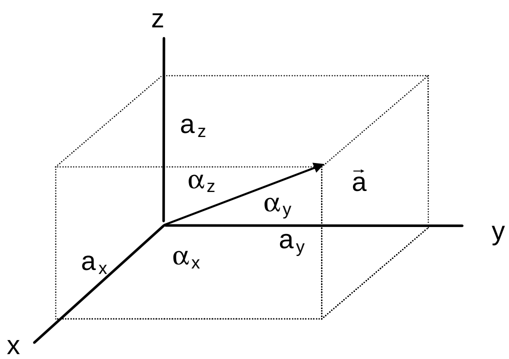
Entsprechend gehört zu jedem Vektor $\vec{a}$ ein Gegenvektor $-\vec{a}$:

Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ so gilt: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$



Vektor und Gegenvektor (dargestellt durch ihre Ortspfeile als Repräsentanten)

<u>Länge und Richtung eines Vektors</u>



Länge von $\vec{a}$: " $\vec{a}$ Betrag ":

$$\left|\vec{a}\right| = +\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

Richtung von $\vec{a}$: "Richtungscosinus"

$$\cos\alpha_x = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|} \ ; \ \cos\alpha_y = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|} \ ; \ \cos\alpha_z = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}$$

Es gilt: $\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1$

Bsp 1: Der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat die Länge $\left|\vec{p}\right| = 7$ [E]

und seine Richtungswinkel sind $\alpha_x = 73.4°$, $\alpha_y = 31.0°$ und $\alpha_z = 64.6°$.

§ 2 ADDITION, SUBTRAKTION, MULTIPLIKATION MIT SKALAREN, BASIS, KOMPONENTEN

Def 1: Die Summe bzw. Differenz zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ ist der

Vektor $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$

Geometrische Interpretation:

Addition:

Addition durch "Aneinandersetzen“ zweier Repräsentanten des Vektors

Subtraktion:

Subtraktion durch Addition mit Gegenvektor:

Satz1: Die Addition von Vektoren ist

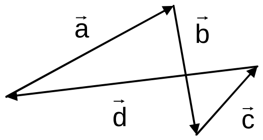
kommutativ : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

assoziativ : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

neutrales Element : $\vec{0}$

inverses Element zu $\vec{a}$: $-\vec{a}$

Satz2: Bildet eine Kette von aneinandergereihten Pfeilen ein geschlossenes Vieleck, so ist die Summe der durch sie repräsentierten Vektoren gleich dem Nullvektor.



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

Def 2: Ist $\vec{a}$ ein Vektor und $k \in \mathbb{R}$ so bedeutet $k \cdot \vec{a}$ ein Vektor, dessen Richtung für $k > 0$ dieselbe, für $k < 0$ die entgegengesetzte Richtung von $\vec{a}$ ist und dessen Betrag (Länge) das $|k|$-fache des Betrags von $\vec{a}$ ist.

Insbesondere ist also: $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Satz3: Für die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl gilt:

$$m \cdot (n \cdot \vec{a}) = (mn) \cdot \vec{a} = n \cdot (m \cdot \vec{a})$$
$$(m + n) \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a}$$
$$k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$$

Def 3: Unter einer <u>Linearkombination</u> der n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ mit den n Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ versteht man den Vektor

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$$

Def 4: Drei Vektoren im 3-dimensionalen Raum, die die Eigenschaft haben, dass jeder weitere Vektor sich als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen lässt, nennt man eine <u>Basis</u>.

Die einfachste Basis bilden die drei Einheitsvektoren parallel zu den drei Koordinatenachsen:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz4: Im 3-dimensionalen Raum lassen sich alle Vektoren als Linearkombination von $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ darstellen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Def 5: Im Unterschied zu den Koordinaten a_x, a_y, a_z des Vektors $\vec{a}$ nennt man $a_x \vec{i}$, $a_y \vec{j}$ und $a_z \vec{k}$ die <u>Komponenten</u> des Vektors bezüglich der Koordinatenachsen.

§ 3 SKALARPRODUKT, VEKTORPRODUKT

Def 1: Unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Zwischenwinkel $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \alpha$ versteht man die folgende Zahl (Skalar):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Satz1: Das Skalarprodukt ist kommutativ und distributiv, das heisst es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Spezialfälle:

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}|^2$

2) für $\vec{a} \parallel \vec{b}$ gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

3) für $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° = 0$

4) $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$; $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

Berechnung des Skalarprodukts in rechtwinkligen Koordinaten:

Ist $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ und $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ so ergibt sich:

Satz2: Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

Im Rechner zu finden unter :

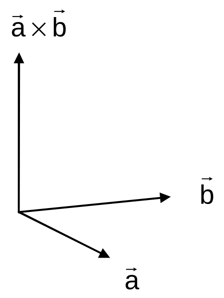
Bsp 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Dann ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-7) + 6 \cdot 3 = 16$

Def 2: Unter dem Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Zwischenwinkel $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$ versteht man folgenden Vektor:

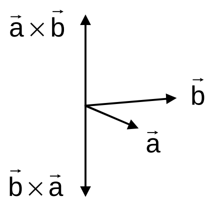
1) Länge : $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$

2) Richtung : senkrecht auf der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene so, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden
.



Rechtssystem:
Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand zeigen in die Richtung von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$.

Satz3: Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ !



Es gilt:
$\vec{b} \times \vec{a} = - \vec{a} \times \vec{b}$

Spezialfälle:

1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ (denn $\alpha = 0°$ und deshalb $\sin\alpha = 0$)

2) für $\vec{a} \parallel \vec{b}$ gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

3) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$; $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

4) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

<u>Berechnung des Vektorprodukts in rechtwinkligen Koordinaten</u>:

Ist $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ und $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ so ergibt sich:

<u>Satz4</u>: Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \cdot \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot \vec{k}$$

Im Rechner zu finden unter :

Bsp 2: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

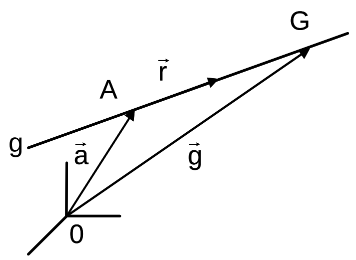
Dann ist:

x-Koordinate:	$4 \cdot 7 - (-1) \cdot 1 = 29$
y-Koordinate:	$1 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = -9$
z-Koordinate:	$2 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 = -22$

also: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 29 \\ -9 \\ -22 \end{pmatrix}$

§ 4 PARAMETERDARSTELLUNG DER GERADEN

1. Gerade gegeben durch Anfangspunkt A und Richtungsvektor $\vec{r}$



G(x/y/z): beliebiger Punkt der Geraden g

Wenn G auf g liegen soll, muss für den Ortspfeil $\vec{g}$ des Punktes G offensichtlich gelten:

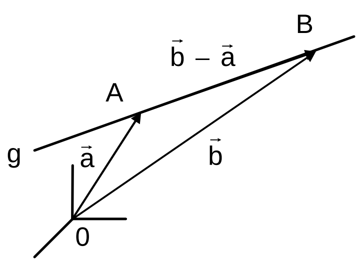
Satz1: Geradengleichung: $\vec{g} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{r}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Parameterdarstellung der Geraden

Bsp 1: Gerade g gegeben durch A(2/4/1) und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Gerade gegeben durch 2 Punkte A und B



Lässt sich sofort auf den 1. Fall zurückführen:

als Richtungsvektor $\vec{r}$ verwendet man den Vektor von A nach B, das heisst:

$\vec{r} = \vec{b} - \vec{a}$

Bsp 2: Gerade g gegeben durch A(6/3/-3) und B(3/4/1)

$$\vec{r} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{also ist: } \vec{g} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bsp 3: Liegen die Punkte G(2/-1/3) bzw. H(-2/-5/3) auf der Geraden g durch A(1/-2/0) und B(6/3/-5) ?

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Existiert ein λ so, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gilt ?

Versuch mit G:	x-Koordinate:	$1 + 5 \cdot \lambda = 2$	also $\lambda = 0.2$
Kontrolle:	y-Koordinate:	$-2 + 5 \cdot 0.2 = -1$	stimmt
Kontrolle:	z-Koordinate:	$0 - 5 \cdot 0.2 = -1 = 3$	ist falsch

G liegt nicht auf g !

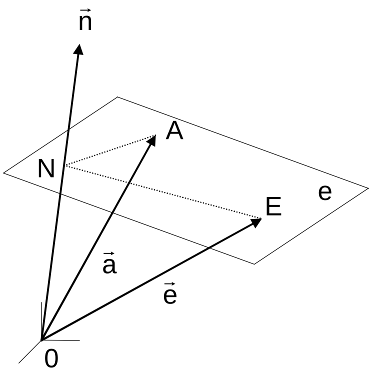
Versuch mit H:	x-Koordinate:	$1 + 5 \cdot \lambda = -2$	also $\lambda = -0.6$
Kontrolle:	y-Koordinate:	$-2 + 5 \cdot (-0.6) = -5$	stimmt
Kontrolle:	z-Koordinate:	$0 - 5 \cdot (-0.6) = 3$	stimmt

H liegt tatsächlich auf g !

§ 5 GLEICHUNG DER EBENE

1. Ebene gegeben durch einen Punkt und die Normalenrichtung

Die Ebene e gehe durch den Anfangspunkt A und stehe senkrecht zum Vektor $\vec{n}$:



E(x/y/z): beliebiger Punkt der Ebene e

Wenn E in e liegen soll, muss $\overrightarrow{NE} \perp \vec{n}$ sein und daher $\vec{n} \cdot \overrightarrow{NE} = 0$ gelten.
Nun ist aber $\overrightarrow{NE} = \vec{e} - \overrightarrow{ON}$ und $\overrightarrow{ON} = \vec{a} - \overrightarrow{NA}$, also $\overrightarrow{NE} = \vec{e} - \vec{a} + \overrightarrow{NA}$

Daraus ergibt sich $\vec{n} \cdot \overrightarrow{NE} = \vec{n} \cdot (\vec{e} - \vec{a} + \overrightarrow{NA}) = \vec{n} \cdot \vec{e} - \vec{n} \cdot \vec{a} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{NA}$
und weil $\vec{n} \cdot \overrightarrow{NA} = 0$ (nach Voraussetzung ist ja $\overrightarrow{NA} \perp \vec{n}$) folgt schliesslich

$\vec{n} \cdot \vec{e} - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$, beziehungsweise $\vec{n} \cdot \vec{e} = \vec{n} \cdot \vec{a}$

wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

in ausgeschriebener Form also:

Satz1: Ebenengleichung e: $n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = n_x \cdot a_x + n_y \cdot a_y + n_z \cdot a_z$

Bem : Merken Sie sich folgende Regel für das Aufstellen der Ebenengleichung:

- linke Seite : Koordinaten des Normalenvektors sind die Koeffizienten der 3 Variablen x, y und z

- rechte Seite: durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes A in die linke Seite ($\rightarrow$ konstantes Glied)

Bsp 1: Man lege senkrecht zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ durch P(-1/4/2) eine Ebene e.

e: $2\cdot x + 1\cdot y + (-3)\cdot z = 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 + (-3)\cdot 2 = -4$

also

e: $2x + y - 3z = -4$ beziehungsweise e: $2x + y - 3z + 4 = 0$

Auch das umgekehrte Problem lässt sich nun leicht lösen:

Man lege zu einer gegebenen Ebene e: $Ax + By + Cz + D = 0$ eine Normale n durch einen beliebigen Punkt $P(p_x/p_y/p_z)$:

Richtungsvektor der Normalen n: $\vec{r} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$; Anfangspunkt $P(p_x/p_y/p_z)$

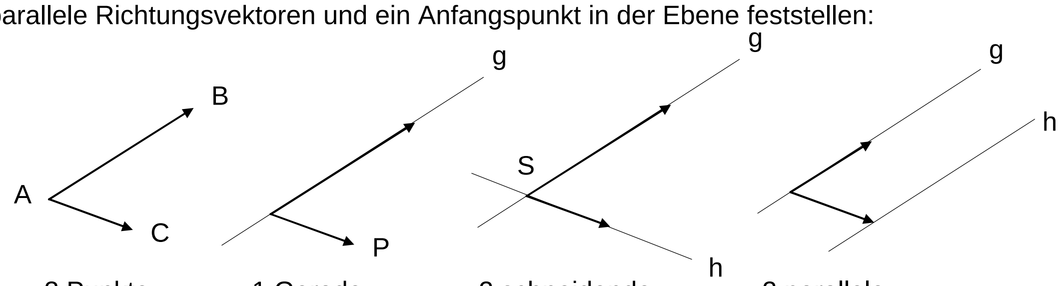
also: $\vec{n} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

Bsp 2: Gesucht die Normale zu e: $8x - 3y + 4z - 2 = 0$ durch P(1/1/-8)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Ebene anders gegeben

Es lassen sich immer - unabhängig davon durch welche Angaben eine Ebene bestimmt wird - zwei nichtparallele Richtungsvektoren und ein Anfangspunkt in der Ebene feststellen:



3 Punkte nicht kolli-near	1 Gerade und ein Punkt ausserhalb	2 schneidende Geraden	2 parallele Geraden

Da das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren stets einen zur gesuchten Ebene senkrechten Vektor liefert, lassen sich alle diese Fälle auf den 1. Fall zurückführen.

Bsp 3: Gesucht die Gleichung der Ebene e durch die Punkte A(2/4/-5), B(-1/1/6) und C(4/0/1).

1. Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$; 2. Richtungsvektor: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Normalenvektor : $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 26 \\ 40 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow$ e: $26x + 40y + 18z = 122$

also: e: $13x + 20y + 9z - 61 = 0$

Bsp 4: Man bestimme die Gleichung der Ebene e, welche durch die Gerade g und den Punkt P gegeben ist:

$\vec{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; P(6/1/-7)

Normalenvektor : $\vec{n} = \vec{r}_g \times \overrightarrow{A_gP} = \begin{pmatrix} -9 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ e: $-9x + 20y + z = -41$

also: e: $9x - 20y - z - 41 = 0$

§ 6 SCHNITTPROBLEME

1. Schnitt zweier Geraden

Gegeben zwei Geraden g und h: $\vec{g} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{r}$

$\vec{h} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{s}$

Schneiden sich die Geraden g und h und wenn ja, wo liegt ihr Schnittpunkt S ?

Das heisst: gibt es zwei Zahlen λ und μ so, dass $\vec{a} + \lambda \cdot \vec{r} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{s}$ gilt ?

Bsp 1: $\vec{g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

x-Koordinate: $4 - \lambda = 3 + 2\mu$

y-Koordinate: $\underline{3 + 4\lambda = -2 + \mu}$

$-2 - 9\lambda = 7 \quad \rightarrow \lambda = -1 \, ; \, \mu = 1$

z-Koordinate: $1 + 5 \cdot (-1) = 8 + 2 \cdot 1$ ist falsch,
das heisst, g und h schneiden sich nicht !

Bsp 2: $\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

x-Koordinate: $1 - \lambda = 0 - \mu$

y-Koordinate: $\underline{1 + 0\lambda = 3 - 2\mu}$

$1 - 2\lambda = -3 \quad \rightarrow \lambda = 2 \, ; \, \mu = 1$

z-Koordinate: $1 + 2 \cdot 2 = 2 + 3 \cdot 1$ stimmt,
das heisst, g und h schneiden sich !

Die Koordinaten des Schnittpunkts S ergeben sich durch Einsetzen von $\lambda = 2$ in g (beziehungsweise von $\mu = 1$ in h):

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow S(-1/1/5)$$

oder:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow S(-1/1/5)$$

2. Schnitt Gerade - Ebene (Durchstosspunkt)

Gegeben eine Gerade g und eine Ebene e: $\vec{g} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{r}$

e: $Ax + By + Cz + D = 0$

Die Koordinaten des Durchstosspunktes P (falls er existiert) müssen sowohl die Parameterdarstellung von g wie auch die Gleichung von e erfüllen.

Man bestimmt den Parameter λ durch Einsetzen der Koordinatengleichungen von g in die Ebenengleichung e.

Bsp 3: $\vec{g} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$; e: $13x - 11y + 16z + 34 = 0$

$13(-7 + 3\lambda) - 11(10 - 2\lambda) + 16(11 - 4\lambda) + 34 = 0 \;\rightarrow\; -3\lambda + 9 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 3$

eingesetzt in g ergibt dies den Durchstosspunkt: P(2/4/-1)

3. Schnitt zweier Ebenen (Schnittgerade)

Gegeben 2 Ebenen e_1 und e_2 : e_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

e_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Die Schnittgerade s (falls sie existiert) ist bestimmt, falls von ihr zwei Punkte bekannt sind. Diese können mit verschiedenen Methoden bestimmt werden:

- durch Schneiden der Grundriss-, Aufriss- oder Seitenrissspuren der Ebenen
- durch Schneiden von Hauptgeraden gleicher Kote
- durch Berechnen der Durchstosspunkte zweier beliebiger Geraden aus einer der beiden Ebenen mit der anderen Ebene

Bsp 4: e_1: $7x + 10y - 3z - 24 = 0$
e_2: $3x + 7y - 4z - 13 = 0$

Grundrissspuren (z = 0): $7x + 10y - 24 = 0$
bzw.: $\underline{3x + 7y - 13 = 0}$
$-19y + 19 = 0 \quad \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2$

$\rightarrow P_1(2/1/0)$

Aufrisspuren (x = 0): $10y - 3z - 24 = 0$
bzw.: $\underline{7y - 4z - 13 = 0}$
$19y - 57 = 0 \quad \rightarrow y = 3 \rightarrow z = 2$

$\rightarrow P_2(0/3/2)$

Schnittgerade : $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

§ 7 METRISCHE GRUNDAUFGABEN

1. Schnittwinkelberechnungen

Aus der Definition des Skalarprodukts (vgl. p.7, Def 1) ergibt sich für den Winkel α zwischen den Richtungen zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sofort:

Satz1: Zwischenwinkel zweier Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Bsp 1: Bestimmen Sie den Winkel α zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 8 + 5\cdot(-3) + (-2)(-6) = 29$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2+5^2+(-2)^2} = \sqrt{45}\ ;\ |\vec{b}| = \sqrt{8^2+(-3)^2+(-6)^2} = \sqrt{109}$$

also: $\cos\alpha = \dfrac{29}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{109}} = 0.4141 \quad\rightarrow\quad \alpha = 65.54°$

a) Schnittwinkel zweier Geraden

Berechnet sich als Winkel zwischen den Richtungsvektoren der beiden Geraden.

b) Schnittwinkel einer Gerade mit einer Ebene

Berechnet sich als Ergänzung auf 90° des Winkels zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und einem Normalenvektor der Ebene.

c) Schnittwinkel zweier Ebenen

Berechnet sich als Winkel zwischen je einem Normalenvektor der beiden Ebenen.

Bsp 2: Berechnen Sie den Winkel α zwischen der Geraden g: A(2/5/-4) B(1/1/1) und der Ebene e: X(-2/5/3) Y(2/3/0) Z(7/-1/4)

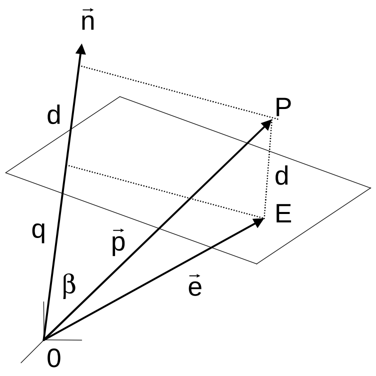
Richtungsvektor von g: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von e: $\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -31 \\ -6 \end{pmatrix}$

also: $\cos\alpha^* = \dfrac{114}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{1397}} = 0.4706 \rightarrow \alpha^* = 61.92°$

das heisst : $\alpha = 90° - 61.92° = 28.08°$

2. Abstand eines Punktes von einer Ebene



Der nebenstehenden Skizze ist zu entnehmen:

$\vec{p} \cdot \vec{n} = |\vec{p}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\beta = |\vec{n}| \cdot (q + d) \rightarrow d = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} - q$

wobei: $q = \dfrac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$

daher ist: $d = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} - \dfrac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$

also: $d = \left| \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{n} - \vec{e} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$

Bem : Nun ist der Zähler $\vec{p} \cdot \vec{n} - \vec{e} \cdot \vec{n}$ gerade die linke Seite der Ebenengleichung von e, wobei anstelle eines Ebenenpunktes der Punkt P ausserhalb von e eingesetzt wurde.

Man kann also wie folgt vorgehen:

- Einsetzen des Punktes P in die Gleichung von e
- Dividieren durch $|\vec{n}|$, wobei ja $\vec{n}$ aus der Gleichung von e abgelesen werden kann

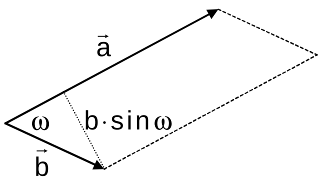
Bsp 3: Gesucht der Abstand des Punktes P(1/4/-2) von der Ebene
e: $2x + 3y + z - 2 = 0$

- Einsetzen von P in e: $2\cdot 1 + 3\cdot 4 + 1\cdot(-2) - 2 = 10$
- $\vec{n}$ aus der Ebenengleichung: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, daher $|\vec{n}| = \sqrt{14}$

also: $d = \dfrac{10}{\sqrt{14}} = 2.673$ [E]

3. Flächenberechnungen

Der Definition des Vektorprodukts (vgl. p.8, Def 2) kann man für die Fläche eines von 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms entnehmen:



$F = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\omega = |\vec{a}\times\vec{b}|$
also für die Parallelogrammfläche:

$F_{par} = |\vec{a}\times\vec{b}|$

Daraus folgt natürlich sofort auch die Fläche des Dreiecks mit den Seiten a und b :

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

Bsp 4: Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks A(1/2/1) B(3/3/4) C(2/-1/2) .

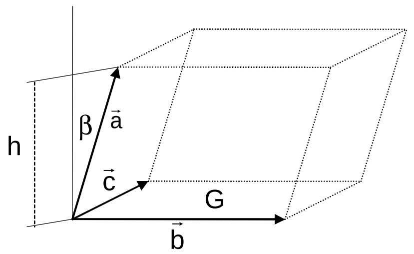
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \rightarrow |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{150} = 12.24$$

$F_{\Delta} = 6.12$ [E^2]

4. Berechnung des Spatvolumens und der 3-seitigen Pyramide

Def 1: Unter einem Spat (Parallelflach) versteht man ein Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche.

Zur Berechnung des Spatvolumens erkennt man in untenstehender Skizze:



$V_{spat} = G \cdot h$, wobei $G = \left|\vec{b} \times \vec{c}\right|$ und $h = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta$

daher ist: $V_{spat} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| \cdot \cos\beta = \left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right|$

also für das Spatvolumen:

$$V_{spat} = \left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right|$$

Daraus folgt nun auch das Volumen der durch a, b und c aufgespannten
3-seitigen Pyramide:

$$V_{pyr} = \frac{1}{6} \cdot \left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right|$$

Bsp 5: Berechnen Sie das Volumen der 3-seitigen Pyramide
A(3/0/0) B(1/4/2) C(-2/-2/1) S(0/0/-4)

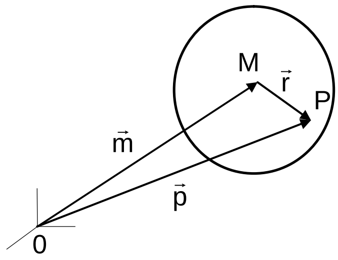
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 8 \\ -23 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AS}) \right| = \left|(-2) \cdot 8 + 4 \cdot (-23) + 2 \cdot (-6)\right| = \left|-120\right| = 120$$

also: $V_{pyr} = \dfrac{120}{6} = 20 \ [E^3]$

§ 8 GLEICHUNG DER KUGEL, TANGENTIALEBENEN

1. Die Gleichung der Kugel



Für einen beliebigen Punkt P(x/y/z) auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius r und Mittelpunkt M(u/v/w) muss offenbar gelten:

$\vec{p} - \vec{m} = \vec{r}$ und daher auch: $\left|\vec{p} - \vec{m}\right| = \left|\vec{r}\right|$

Da $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\vec{m} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ und damit: $\vec{p} - \vec{m} = \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \\ z-w \end{pmatrix}$ ergibt sich in Koordinaten:

Satz1: Gleichung der Kugel mit Mittelpunkt M(u/v/w) und Radius r:

K: $(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2$

Ist der Mittelpunkt in M = O(0/0/0) so gilt speziell:

K: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Bsp 1: Gesucht die Gleichung der Kugel K mit M(2/4/-1) und r = 7 .

K: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = 49$ (Hauptform)

beziehungsweise

K: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z - 28 = 0$ (implizite Form)

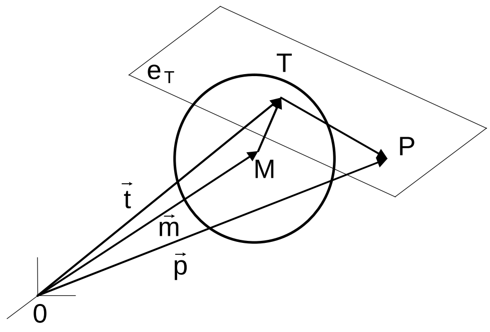
Bsp 2: Gesucht die Gleichung der Kugel mit M(-3/4/12), deren Oberfläche durch O(0/0/0) geht.

$r = MO = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ also:

K: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 12)^2 = 169$ bzw.:

K: $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 24z = 0$

2. Die Gleichung der Tangentialebene an eine Kugel



Bei gegebener Kugel mit Mittelpunkt M(u/v/w) und Radius r und gegebenem Berührungspunkt $T(x_T / y_T / z_T)$ muss für einen beliebigen Punkt P(x/y/z) der Tangentialebene e_T gelten:

$(\vec{t} - \vec{m}) \perp (\vec{p} - \vec{t})$ und daher

$(\vec{t} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{t}) = 0$

Daraus folgt:

$(\vec{t} - \vec{m})^2 + (\vec{t} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{t}) = (\vec{t} - \vec{m})^2 = r^2 \rightarrow (\vec{t} - \vec{m}) \cdot [(\vec{t} - \vec{m}) + (\vec{p} - \vec{t})] = r^2 \rightarrow (\vec{t} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{m}) = r^2$

und da $\vec{t} = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix}$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{m} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ und somit $\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_T - u \\ y_T - v \\ z_T - w \end{pmatrix}$ und $\vec{p} - \vec{m} = \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \\ z - w \end{pmatrix}$

folgt für die Darstellung in Koordinaten:

Satz2: Tangentialebene an eine Kugel bei gegebenem Berührungspunkt $T(x_T/y_T/z_T)$:

e_T : $(x_T - u)(x - u) + (y_T - v)(y - v) + (z_T - w)(z - w) = r^2$

Bsp 3: Gesucht die Tangentialebene t an die Kugel mit Mittelpunkt M(2/1/-2) im Kugelpunkt T(3/-2/5).

$r = MT = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{59}$

K: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 59$

e_T : $(3 - 2)(x - 2) + (-2 - 1)(y - 1) + (5 + 2)(z + 2) = 59$ das heisst:

e_T : $x - 3y + 7z - 44 = 0$

Übungen zu § 1

1. Gegeben zwei Pfeile $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ mit: P(2/-1/5), Q(-2/3/1) und R(-11/3/0), S(2/0/-3).

   Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden Vektoren, aus welchen diese Pfeile stammen.

2. Gegeben sind 6 Pfeile, nämlich:

   A_1(1/0/-1) B_1(-2/0/-6); A_2(-1/2/-3) B_2 (2/2/2); A_3(-2/1/5) B_3(1/1/0);
   A_4(0/3/-5) B_4(3/3/0); A_5(1/-2/1) B_5(4/-2/6); A_6(-3/4/-5) B_6(3/4/6).

   Untersuchen Sie, ob sich darunter schiebungsgleiche Pfeile befinden.

3. Gegeben der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

   Bestimmen Sie die Spitzen seiner Repräsentanten mit den Anfangspunkten
   A_1(0/0/0), A_2(1/-2/3), A_3(-4/0/9), A_4(14/-3/7).

4. Untersuchen Sie die Gestalt des Vierecks A(3/2/1), B(6/3/4), C(5/-1/2), D(2/-2/-1).

5. Bestimmen Sie Länge und Richtungswinkel des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

6. Welches sind die Koordinaten des durch den Ortspfeil $\vec{a}$ dargestellten Vektors und wie gross ist sein Betrag $|\vec{a}|$, falls er mit der positiven x-Achse einen Winkel von 135°, mit der positiven y-Achse einen Winkel von 60° einschliesst und falls seine z-Koordinate $a_z = -2$ ist ?

7. Bestimmen Sie die Länge der Projektion des Vektors $\vec{a}$ in Richtung des Vektors $\vec{b}$.

   $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

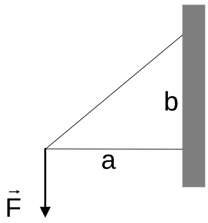
Übungen zu § 2

1. Gegeben die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie:
   $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ und $\vec{z} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

2. In nebenstehender Skizze sehen Sie die Darstellung eines an einem Ausleger und einer Kette befestigten Wirtshausschildes. Es misst a = 200 [cm] und b = 150 [cm].

   Bestimmen Sie Druck- und Zugkräfte.
   Es sei $|\vec{F}| = 600$ [N].



3. Prüfen Sie nach, ob die 3 Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis des 3-dimensionalen Raumes sind.

4. Wie 3. für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Übungen zu § 3

1. Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. Was stellen Sie anhand des Skalarprodukts für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ fest ?

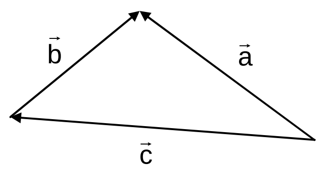
3. Gegeben die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie die Vektoren

   $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

   Was stellen Sie fest ?

4. In nebenstehendem Dreieck ist offensichtlich $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$



   Multiplizieren Sie die Gleichung vektoriell mit $\vec{c}$ und betrachten Sie die Beträge der beiden Seiten der Gleichung.

Übungen zu § 4

1. Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Geraden g durch P(3/2/4) und Q(2/4/2).

   In welchen Punkten durchstösst g die 3 Koordinatenebenen ?

2. Eine Gerade g hat die Richtung des Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und geht durch A(3/4.5/1).

   Zeigen Sie, dass g die z-Achse schneidet.

3. Ein Punkt P bewegt sich geradlinig gleichförmig und ist zur Zeit t = 1 [s] in A(5/-4/7) und zur Zeit t = 3 [s] in B(1/2/4).

   a) Stellen Sie den Ort von P als Funktion der Zeit t dar

   b) Wo befand sich P zur Zeit t = 0 [s] ?

   c) Wann und wo erreicht P die y-z-Ebene (Aufrissebene) ?

Übungen zu § 5

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene e, welche senkrecht zu $\vec{n}$ steht und durch den Punkt P(1/4/-2) geht.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Legen Sie zur Ebene e: $4x - 5y + 2z - 33 = 0$ eine Senkrechte durch den Punkt P(3/4/-1).

3. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene e durch die 3 Punkte A(1/2/3), B(6/-2/0) und C(-2/0/4).

4. Die Ebene e sei durch die beiden parallelen Geraden p und q gegeben. Bestimmen Sie ihre Gleichung.

   p durch P(5/-2/3) in Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; q durch Q(1/-4/2), parallel zu p

5. Gesucht die Gleichungen der beiden winkelhalbierenden Ebenen der schneidenden Geraden g: O(0/0/0) A(4/-4/2) und h: O(0/0/0) B(-2/6/-3)

Übungen zu § 6

1. Bestimmen Sie den Durchstosspunkt der Geraden g durch P(-1/2/1) und Q(3/4/-1) mit der Ebene e: $3x - 2y + z - 3 = 0$.

2. Prüfen Sie, ob sich die beiden Geraden g: P(-2/1/0), Q(3/11/5) und h: R(2/4/2), S(-4/2/0) schneiden und bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts W.

3. Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen e_1: A(1/1/1), B(1/0/2), C(3/-1/-1) und e_2: D(0/1/1), E(2/0/-2), F(2/-1/0) .

4. Bestimmen Sie die Transversale t durch den Punkt P(3/1/-1) zu den beiden Geraden g: A(0/0/0), B(1/1/1) und h: C(-2/3/6), D(2/4/2)

5. Gesucht die Transversale t der Geraden g und h, welche senkrecht auf der Ebene e steht.

   g: A(-2/15/8) B(-6/11/4) ; h: C(6/1/3) D(3/-5/-3)
   e: P(-1/1/1) Q(1/-1/9) R(-3/-1/3)

6. Von einem ebenen Rechteck ABCD kennt man die Seite A(0/0/0) B(2/5/4). Die Ecke C, welche A diagonal gegenüberliegt, soll sich auf der y-Achse befinden.

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte C und D.

   b) Berechnen Sie zur Kontrolle die Längen der Diagonalen AC und BD.

Übungen zu § 7

1. Berechnen Sie die Abstände der Punkte A(-2/9/3), B(1/2/4), C(2/3/5) und O(0/0/0) von der Ebene e: $3x + 6y - 2z - 14 = 0$

2. Legen Sie durch den Punkt P(3/7/5) die Senkrechte s zur Ebene e: $x + 2y + 2z - 9 = 0$ und bestimmen Sie Fusspunkt F von s in e.

   Bestimmen Sie anschliessend die Distanz des Punktes P von e zuerst als Strecke PF und dann mit der Abstandsformel.

3. Legen Sie eine Ebene e senkrecht zu $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ durch den Punkt P(2/3/3).

   Berechnen Sie den Abstand von e zum Koordinatenursprung O

4. Unter welchem Winkel und in welchem Durchstosspunkt D schneidet die Gerade g die Ebene e ?

   g: X(-1/2/9) Y(5/-7/0) ; e: A(6/-2/0) B(-3/4/0) C(1/0/1)

5. Berechnen Sie den kürzesten Abstand zwischen den Geraden g: A(1/2/-1) B(5/6/-3) und h: C(9/-9/2) D(1/-10/5).

6. Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen e_1: $6x + 3y + 4z - 10 = 0$ und e_2: A(0/0/0) B(2/1/6) C(3/1/-2) .

7. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen der 3-seitigen Pyramide mit der Grundfläche A(1/3/1) B(3/5/3) C(0/6/2) und der Spitze S(2/-1/4).

8. Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Schnittgeraden s der Ebenen e_1 und e_2 und bestimmen Sie den Schnittwinkel α dieser beiden Ebenen.

   e_1: A(2/1/0) B(2/0/1) C(4/-1/-2)
   e_2: D(1/1/0) E(3/0/-3) F(3/-1/-1)

Übungen zu § 8

1. Bestimmen Sie die Durchstosspunkte der Geraden g: A(0/5/3) B(-7/8/3) mit der Kugel K: M(6/-10/-9); r = 17 .

2. a) Gesucht die Gleichung der Kugel K mit Mittelpunkt M(5/1/-1), welche die Ebene e: $x - 2y + 2z - 10 = 0$ berührt.

   b) Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Berührungspunktes T.

3. Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel, deren Oberfläche durch die vier Punkte A(1/-4/2), B(-1/0/-4), C(7/5/5) und D(4/-3/0) geht.

4. a) Zeigen Sie, dass die drei Punkte P(2/2/3.5), Q(3/3/-1.5) und R(-0.5/2/4) alle auf derselben Kugel K um O(0/0/0) liegen und bestimmen Sie die Gleichung von K.

   b) Bestimmen Sie die Gleichungen der drei Tangentialebenen in den Punkten P, Q und R und berechnen Sie den Schnittpunkt S dieser drei Ebenen.

BERNER FACHHOCHSCHULE

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR BURGDORF

ABTEILUNG ARCHITEKTUR

MATHEMATIK : VORLESUNG 1

ELEMENTARE ALGEBRA

COPYRIGHT 2007: AMTSNACHFOLGER DES COPYRIGHTBESITZERS 2001

COPYRIGHT 2001: B. GYSLER, DIPL. MATHEMATIKER

PROFESSOR AN DER HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR

4. AUFLAGE, 2001, BURGDORF, SCHWEIZ

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1 MENGEN

Def 1: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohldefinierten Objekten zu einem Ganzen (Georg Cantor 1845-1918).

Def 2: Die Objekte einer Menge nennt man die Elemente der Menge.

Not : Mengen werden durch grosse lateinische Buchstaben A, B, C, ... bezeichnet, ihre Elemente durch geschweifte Klammern { } zusammengefasst.

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, eine Menge zu beschreiben:

a) durch Aufzählen ihrer Elemente
b) durch eine charakterisierende Eigenschaft ihrer Elemente

Bsp 1: $A = \{1,2,3\}$; $B = \{a,b,g,k,x\}$
$C = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$; $D = \{x \mid x > 3\}$

Not : Ist x ein Element der Menge A, so schreibt man kurz $x \in A$;
gehört x hingegen nicht zur Menge A schreibt man $x \notin A$

Bsp 2: Ist $A = \{a,b,c,d\}$ so ist $a \in A$, aber $f \notin A$

Not : Für die Zahlenmengen werden folgende Symbole festgelegt:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4, ...\}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{0,-1,1,-2,2, ...\}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} = \{x/y \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}\}$	die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	die Menge der rellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen

Def 3: Eine Menge heisst endlich, falls sie nur endlich viele Elemente enthält, andernfalls heisst sie unendlich.

Bsp 3: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ etc. sind unendliche Mengen.

Def 4: Eine Menge A heisst Teilmenge einer Menge B, falls jedes Element von A auch ein Element von B ist.

Not : Ist A eine Teilmenge von B, so schreibt man $A \subset B$

Bsp 4: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\{a,b,c\} \subset \{a,b,c,d,e,f\}$, hingegen $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$

Def 5: Die Menge, die kein Element enthält, nennt man die leere Menge.

Not : Die leere Menge wird mit $\varnothing$ bezeichnet.

Bsp 5: $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$

Satz1: Für alle Mengen gilt:

$A \subset A$ (jede Menge ist Teilmenge von sich selbst)
$\varnothing \subset A$ (die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge)
aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt $A \subset C$ ("$\subset$" ist transitiv)

Def 6: Unter der Potenzmenge einer gegeben Menge A versteht man die Menge aller Teilmengen von A.

Not : Die Potenzmenge einer Menge A wird mit $\Omega(A)$ bezeichnet.

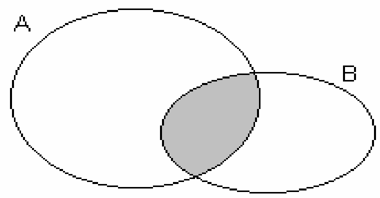
Bsp 6: Ist $A = \{a,b,c\}$ so ist $\Omega(A) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$

Satz2: Die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen hat 2^n Elemente.

Def 7: Der Schnitt zweier Mengen A und B ist die Menge derjenigen Elemente aus A und B, welche beiden Mengen angehören.

Not : Der Schnitt von A und B wird mit $A \cap B$ bezeichnet.

$A \cap B$:

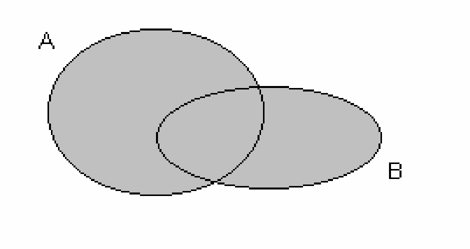


Bsp 7: Ist $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{c,d,e\}$ und $C = \{e,f,g,h\}$ so ist $A \cap B = \{c,d\}$, $B \cap C = \{e\}$ und $A \cap C = \varnothing$

<u>Def 8</u>: Die <u>Vereinigung</u> zweier Mengen A und B ist die Menge derjenigen Elemente aus A und B, welche mindestens einer der beiden Mengen angehören.

Not : Die Vereinigung von A und B wird mit $A \cup B$ bezeichnet.

$A \cup B$:

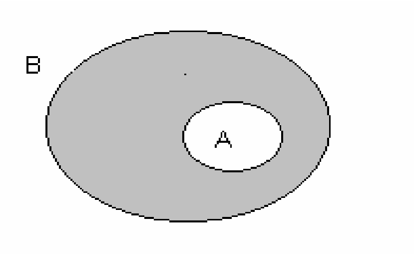


Bsp 8: Mit den gleichen Mengen wie in Bsp 7 ergibt sich: $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$,
$B \cup C = \{c,d,e,f,g,h\}$, $A \cup C = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

<u>Def 9</u>: Ist $A \subset B$ so versteht man unter dem <u>Komplement</u> von A bezüglich B die Menge aller Elemente in B, die <u>nicht</u> zu A gehören.

Not : Das Komplement von A wird mit A^c bezeichnet.

A^c :



Bsp 9: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, also bedeutet $\mathbb{Q}^c$ die Menge aller irrationalen Zahlen.

<u>Satz3</u>: Es gelten die folgenden Aussagen:

a) $\cap$ und $\cup$ sind kommutativ, d.h.

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{und} \quad A \cup B = B \cup A$$

b) $\cap$ und $\cup$ sind assoziativ, d.h.

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{und} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

c) $\cap$ und $\cup$ sind distributiv, d.h.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ und $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Def10: Unter dem Produkt zweier Mengen A und B versteht man die Menge aller geordneten Paare (a,b), wobei $a \in A$ und $b \in B$.

Not : Das Produkt zweier Mengen A und B wird mit A x B bezeichnet.
Anstatt A x A schreibt man kurz A^2.

Bsp10: Ist A = {a,b} und B = {1,2,3} so ist

A x B = {(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)} und
B x A = {(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)}

A x A = A^2 = {(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)}

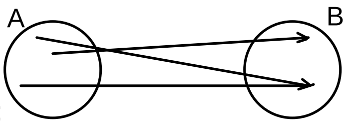
Merke: x ist nicht kommutativ, d.h.: $A \times B \neq B \times A$

Satz4: Ist A eine Menge mit n Elementen und B eine Menge mit m Elementen, so haben A x B und B x A beide je $n \cdot m$ Elemente.

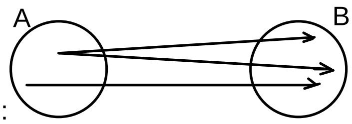
§ 2 FUNKTIONEN

Def 1: Eine Funktion von einer Menge A in eine Menge B ist eine Zuordnungsvorschrift, nach welcher jedem Element von A genau ein Element von B zugeordnet wird.

korrekt:



falsch:



Not : Eine Funktion wird mit kleinen Buchstaben f, g, h, ... bezeichnet:

$f{:}A \to B$

A heisst Definitionsbereich, B heisst Wertebereich der Funktion.

Not : Ist a ein Element aus A und b dasjenige Element aus B, das durch die Funktion $f{:}A \to B$ dem Element a zugeordnet wird, so schreibt man kurz:

$f(a) = b$

Dabei nennt man a das Argument und b den Funktionswert (von a unter der Funktion f).

Bsp 1:

a) A = Menge aller Studierenden an der HTA Burgdorf
B = $\mathbb{R}$
f: jedem Studierenden wird seine Körpergrösse in [mm] zugeordnet

b) A = $\mathbb{N}$
B = $\mathbb{N}$
f: jeder Zahl aus $\mathbb{N}$ wird ihr Quadrat zugeordnet

c) A = $\mathbb{Z}$
B = $\mathbb{Z}$
f: jeder Zahl aus $\mathbb{Z}$ wird die um 3 grössere Zahl zugeordnet

In Zukunft interessieren uns nun vor allem die Funktionen zwischen Zahlenmengen, im allgemeinen also Funktionen $f{:}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Für Funktionen zwischen zwei Zahlenmengen unterscheidet man drei Arten der Darstellung:

1. tabellarisch: in einer Tabelle werden Argumente x und zugehörige Funktionswerte f(x) zusammengestellt.

2. graphisch : in einem rechtwinkligen Koordinatensystem wird das Argument x als horizontale, der Funktionswert f(x) als vertikale Koordinate eines Punktes aufgefasst und graphisch dargestellt.

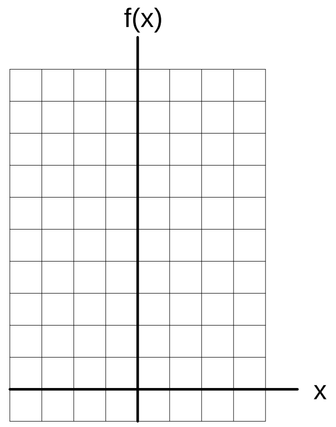
3. analytisch : durch eine Formel (falls eine solche existiert) wird angegeben, wie sich der Funktionswert f(x)aus dem Argument x berechnen lässt.

Bsp 2: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, f: jeder Zahl aus $\mathbb{R}$ wird ihr Quadrat zugeordnet.

1. tabellarisch:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	.....
f(x)	4	1	0	1	4	9	16	.....

2. graphisch :



3. analytisch : $f(x) = x^2$

<u>Def 2</u>: Eine Funktion $f: A \to B$ heisst <u>injektiv</u>, falls zwei verschiedene Argumente immer auch v erschiedene Funktionswerte haben.

<u>Def 3</u>: Eine Funktion $f: A \to B$ heisst <u>surjektiv</u>, falls jedes Element von B als Funktionswert tatsächlich gebraucht wird.

Bsp 3: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 1$ ist injektiv und surjektiv
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = x^2$ ist surjektiv aber nicht injektiv
$f: \boldsymbol{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ ist injektiv aber nicht surjektiv

<u>Def 4</u>: Als <u>Umkehrfunktion</u> f(x) einer Funktion $f{:}A \rightarrow B$ versteht man eine Funktion : $\hat{f}$ $:B \rightarrow A$, für welche gilt:

$$\hat{f}\,[f(x)] = x \quad \text{für alle } x \in A$$

Eine Funktion f, deren Umkehrfunktion $\hat{f}$ existiert, heisst <u>umkehrbar</u>.

Frage: Sind die Funktionen im Bsp 1 auf Seite 6 umkehrbar ?

<u>Satz1</u>: Eine Funktion f ist genau dann umkehrbar, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

<u>Satz2</u>: Ist eine umkehrbare Funktion f analytisch gegeben, findet man die analytische Darstellung i hrer Umkehrfunktion $\hat{f}$, indem man:

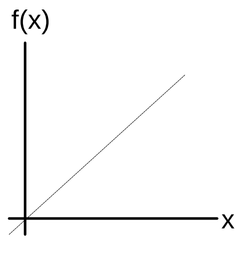
- f(x) durch x ersetzt
- x durch $\hat{f}$ (x) ersetzt
- nach $\hat{f}$ (x) auflöst (falls möglich)

Bsp 4: $f(x) = 3 \cdot x - 7$ ist umkehrbar. Also: $x = 3 \cdot \hat{f}(x) - 7$, woraus $\hat{f}(x) = \frac{x+7}{3}$ folgt.

Bsp 5: $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv und deshalb nicht umkehrbar.

<u>Satz3</u>: Die graphische Darstellung der Umkehrfunktion $\hat{f}$ (x) einer umkehrbaren Funktion f(x) erhält man, indem man den Graphen von f(x) an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten spiegelt.

Bsp 6:



§ 3 ZAHLENSYSTEME

1. Operationen und algebraische Strukturen

Def 1: Eine Operation $*$ auf einer Menge A ist eine Funktion $* : A \times A \rightarrow A$, d.h. eine Funktion, die einem Paar von Elementen aus einer Menge A ein Einzelelement aus A zuordnet.

Def 2: Eine algebraische Struktur ist eine nichtleere Menge A, auf der eine oder mehrere Operationen definiert sind.

Not : Trägermenge und Operation(en) einer algebraischen Struktur schreibt man in eckigen Klammern: $<A;*>$ bzw. $<A;*,\#,...>$

Bsp 1: $<\mathbb{N};+>$; $<\mathbb{Q};+,\cdot>$; $<\Omega(M);\cap,\cup>$

Def 3: Eine Operation $*$ auf einer Menge A

(K) heisst kommutativ, falls $a*b = b*a$ für alle Elemente aus A gilt

(A) heisst assoziativ, falls $a*(b*c) = (a*b)*c$ für alle Elemente aus A gilt

(N) hat ein neutrales Element, falls in A ein Element n existiert, für welches $n*a = a*n = a$ ist für alle Elemente aus A

(I) hat inverse Elemente, falls zu jedem Element a aus A ein Element â aus A so existiert, dass $a*\hat{a} = \hat{a}*a = n$ ist.

Merke: (I) ist nur unter der Voraussetzung (N) möglich.

Eine Operation $*$ heisst bezüglich einer zweiten Operation #

(D) distributiv, falls $a\#(b*c)=(a\#b)*(a\#c)$

Bsp 2:
- Die Addition auf $\boldsymbol{N}$ ist (K) und (A), aber nicht (N) und (I)
- Die Multiplikation auf $\boldsymbol{Z}$ ist (K), (A) und (N), aber nicht (I)
- Die Multiplikation ist bezüglich der Addition (D), aber nicht umgekehrt.
- $\cup$ und $\cap$ von Mengen sind wechselseitig (D) wie Satz3c, p.4 zeigt.

Untersuchen Sie die nachfolgenden algebraischen Strukturen auf die Eigenschaften (K), (A), (N), (I):

$< \boldsymbol{N} ;+>$	$< \boldsymbol{N} ; \cdot>$
$< \boldsymbol{Z} ;+>$	$< \boldsymbol{Z} ; \cdot>$
$< \mathbb{Q} ;+>$	$< \mathbb{Q} ; \cdot>$
$< \mathbb{R} ;+>$	$< \mathbb{R} ; \cdot>$

<u>Def 4</u>: Eine algebraische Struktur $< A ; *, \# >$ heisst <u>Körper</u>, falls:

a) die Operation $*$ (K), (A), (N) und (I) ist

b) die Operation # (K), (A) und (N) ist und ausserdem (I),
(mit Ausnahme des $*$ -neutralen Elements)

c) die Operation # (D) ist bezüglich der Operation $*$

2. Die Menge $\boldsymbol{N}$ der natürlichen Zahlen

Die Menge $\boldsymbol{N}$ wird üblicherweise axiomatisch definiert, d.h. man stellt eine Liste von geforderten Eigenschaften (sogenannten Axiomen) zusammen, die voneinander unabhängig und so gegeneinander abgewogen sein müssen, dass nur gerade diejenige Menge, die man definieren will, alle diese Forderungen erfüllt.

Die Axiome für die Menge $\boldsymbol{N}$ gehen im wesentlichen auf Giuseppe Peano (1858 - 1932) zurück und lauten (in die moderne Umgangssprache übertragen) wie folgt:

Eine Menge M ist genau dann die Menge der natürlichen Zahlen $\boldsymbol{N}$, wenn:

1. M nicht leer ist

2. zu jedem Element $k \in M$ ein weiteres Element $k' \in M$ existiert.
   Dieses Element k' bezeichne man als "Nachfolger" von k.
   In der Wahl dieser "Nachfolger-Funktion" ist man frei.

3. Es gibt in M genau ein Element, das nicht als "Nachfolger" auftritt.
   Dieses Element bezeichnet man mit dem Symbol ***1***.

4. Sind zwei Elemente aus M voneinander verschieden, so sind
   auch ihre "Nachfolger" voneinander verschieden.

5. Falls in einer Teilmenge $T \subset M$ das Element ***1*** und weiter mit jedem Element k auch der "Nachfolger" k' enthalten ist, dann ist T = M (d.h. die "Nachfolger-Funktion" schöpft bei ***1*** beginnend die ganze Menge M aus).

Bem : Die "Nachfolger-Funktion" kann im Prinzip frei definiert werden. Falls eine Addition auf der Menge M eingeführt werden kann, so ist die Funktion $k' = k + 1$ die offensichtliche Wahl.

Bem : Das 5. Axiom führt zur Beweistechnik der vollständigen Induktion:

Wenn eine Behauptung über natürliche Zahlen allgemeingültig bewiesen werden soll, so kann dies natürlich wegen der Unendlichkeit der Menge $\boldsymbol{N}$ nicht durch simples Nachprüfen getan werden.

Man teilt die Menge $\boldsymbol{N}$ in zwei Teilmengen T (welche alle Zahlen aus $\boldsymbol{N}$ enthält, für welche die Behauptung stimmt) und T^c (in der die Zahlen aus $\boldsymbol{N}$ liegen, für welche die Behauptung falsch ist).

Gelingt es nachzuweisen, dass T die Bedingungen des 5. Axioms erfüllt, ist $T = \boldsymbol{N}$ und daher $T^c = \varnothing$, d.h. die Behauptung ist für alle Zahlen aus $\boldsymbol{N}$ als richtig nachgewiesen.

Bsp 1: Behauptung: $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Zu zeigen ist nun:

a) die Behauptung ist richtig für n = 1 : $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ (stimmt)

b) falls die Behauptung für n = k richtig ist, muss daraus die Richtigkeit für den Nachfolger k' d.h. für n = k + 1 gefolgert werden können:

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \cdot (\frac{k}{2} + 1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

(wie gewünscht)

3. Die weitere Entwicklung von $\mathbb{N}$ über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$

Die Entwicklung von $\mathbb{N}$ aus über $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ und schliesslich zu $\mathbb{R}$ ist von der Motivation her leicht zu durchschauen:

$3x + 8 = 2$ ist eine Gleichung in $\mathbb{N}$, welche in $\mathbb{N}$ nicht lösbar ist, deshalb der Ausbau $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$4x - 7 = 0$ ist eine Gleichung in $\mathbb{Z}$, die in $\mathbb{Z}$ nicht gelöst werden kann, deshalb die Erweiterung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$

$x^2 - 2 = 0$ schliesslich kann auch in $\mathbb{Q}$ nicht gelöst werden, was zum weiteren Ausbau $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ führt.

Aber: auch $\mathbb{R}$ ist offenbar noch nicht ein vollständiges System, denn zum Beispiel die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ kann in $\mathbb{R}$ nicht gelöst werden.

§ 4 DIE RECHENREGELN IN $\mathbb{R}$

Satz1: $< \mathbb{R}\ ; +, \cdot >$ ist ein Körper.

Aus der Körpereigenschaft von $\mathbb{R}$ ergeben sich im Wesentlichen alle als bekannt vorausgesetzten Regeln über das Rechnen mit reellen Zahlen.

Als Ergänzung seien hier noch die Regeln für das Rechnen mit Potenzen erwähnt:

Def 1: Ist $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, so nennt man ein Produkt von n gleichen Faktoren a die n-te Potenz von a.

a heisst Basis, n heisst Exponent der Potenz.

Not : Die n-te Potenz von a schreibt man kurz als a^n ("a hoch n")

Def 2: Sinnvollerweise ergänzt man : $a^1 = a$

Def 3: Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, so bedeutet:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ; \quad \text{insbesondere also:} \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Def 4: Weiter ergänzt man : $a^0 = 1$

Def 5: Die n-te Wurzel aus einer positiven reellen Zahl a ist diejenige Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist.

Not : Für die n-te Wurzel aus der Zahl a schreibt man $\sqrt[n]{a}$

Satz2: Es gilt also: $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

Not : Für die Quadratwurzel ist anstelle $\sqrt[2]{a}$ einfach $\sqrt{a}$ üblich.

Def 6: Ist $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $p \in \boldsymbol{N}$, $q \in \boldsymbol{N}$, so bedeutet:

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a} \quad ; \quad a^{-1/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a}}$$

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \quad ; \quad a^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$$

Satz3: Summen und Differenzen von Potenzen lassen sich nur zusammenfassen, wenn Basis und Exponent aller Potenzen gleich sind.

Dann gilt: $r \cdot a^n + s \cdot a^n = (r+s) \cdot a^n$

und: $r \cdot a^n - s \cdot a^n = (r-s) \cdot a^n$

Bsp 1: $5t^3 + 13t^3 = 18t^3$

Satz4: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert (bzw. dividiert), indem man die gemeinsame Basis mit der Summe (bzw. der Differenz) der Exponenten potenziert.

Es gilt also: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

und: $a^m / a^n = a^{m-n}$

Bsp 2: $q^5 / q^9 = q^{-4}$

Satz5: Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert (bzw. dividiert), indem man das Produkt (bzw. den Quotienten) der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

Es gilt also: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

und: $a^n / b^n = (a / b)^n$

Bsp 3: $r^6 \cdot s^6 = (rs)^6$

Satz6: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

Es gilt also: $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$

Bsp 4: $(p^3)^{-4} = p^{-12}$

§ 5 DIE KOMPLEXEN ZAHLEN $\mathbb{C}$

Wie am Schluss von § 3 erwähnt, ist auch das Zahlensystem $\mathbb{R}$ nicht vollständig, weil auch in $\mathbb{R}$ noch nicht alle in $\mathbb{R}$ formulierbaren Gleichungen lösbar sind.

Aus den Eigenschaften der bereits bekannten Erweiterungen $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ kann entnommen werden, dass die Erweiterung von $\mathbb{R}$ in den neu zu konstruierenden Zahlenraum $\mathbb{C}$ den folgenden Forderungen genügen muss:

a) $\mathbb{C}$ soll $\mathbb{R}$ als Teilmenge enthalten

b) in $\mathbb{C}$ sollen alle Gleichungen lösbar sein, insbesondere auch die Gleichung $x^2 + 1 = 0$

c) $\mathbb{C}$ soll ein Körper sein, das heisst, in $\mathbb{C}$ sollen die gleichen Rechenregeln gelten wie in $\mathbb{R}$

Diese Forderungen lassen sich durch die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aller Zahlenpaare aus reellen Zahlen erfüllen, falls man die beiden Operationen + und · wie folgt definiert:

Addition + : $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
Multiplikation · : $(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d,\ a \cdot d + b \cdot c)$

<u>Def 1</u>: Die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ heisst Menge der <u>komplexen Zahlen.</u>

<u>Satz1</u>: $< \mathbb{C}\, ; +, \cdot >$ ist ein Körper.

<u>Satz2</u>: $\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}$ als Teilmenge einbettbar; den reellen Zahlen entsprechen dabei die komplexen Zahlen der Form (r, 0).

<u>Satz3</u>: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ die Lösung $x = (0,1)$.

Die Schreibweise der komplexen Zahlen als reelle Zahlenpaare (a,b) ist - vor allem im Zusammenhang mit der Multiplikation - recht umständlich. Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich mit:

Def 2: $(0,1) = \sqrt{-1} = i$ d.h. $i^2 = -1$

Damit können beliebige komplexe Zahlen (a,b) als Binome geschrieben werden, nämlich:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = a + b\cdot i$$

Die Addition und die Multiplikation werden wie bei Binomen durchgeführt:

Addition: $a+bi + c+di = a+c + (b+d)i$

Multiplikation: $(a+bi)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = ac-bd + (ad+bc)i$

Bsp 1: Berechnen Sie:

$(4+i) + (3-2i) =$	$(5-3i) - (6+i) =$
$(3+4i)\cdot(4+2i) =$	$(4+i)\cdot(4-i) =$
$i\cdot(6-3i)\cdot(2+i) =$	$(1+i)^3 =$

Def 3: In der komplexen Zahl (a,b) = a + bi heissen

a : Realteil von z und b : Imaginärteil von z

Def 4: Die Zahl $\overline{z} = a - bi$ heisst die zu $z = a + bi$ konjugiert komplexe Zahl.

Bsp 2: $z = 7 + 13i \rightarrow \overline{z} = 7 - 13i$; $z = -8 - 2i \rightarrow \overline{z} = -8 + 2i$
$z = 25 \rightarrow \overline{z} = 25$; $z = 9i \rightarrow \overline{z} = -9i$

Die Division zweier komplexer Zahlen könnte - ausser mit dem Rechner - durch folgenden Trick auch von Hand gelingen:

Zwei komplexe Zahlen werden durcheinander dividiert, indem man den Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitert.
Dadurch wird die Division auf eine Division mit reellem Nenner zurückgeführt.

Bsp 3: $\frac{14+8i}{2+3i} = \frac{14+8i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{28-42i+16i-24i^2}{4-6i+6i-9i^2} = \frac{52-26i}{13} = 4-2i$

<u>Fundamentalsatz der Algebra</u>

Jede Gleichung n-ten Grades mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ hat genau n Lösungen in $\mathbb{C}$
(von denen eventuell mehrere zusammenfallen können).

Eventuelle komplexe Lösungen treten dabei immer <u>paarweise</u> auf:

Ist nämlich z eine komplexe Lösung einer reellen Gleichung, so ist auch $\overline{z}$ eine Lösung.

Dies bedeutet, dass jede reelle Gleichung ungeraden Grades mindestens eine relle Lösung haben muss.

Bsp 4: $x^2 + 4x + 13 = 0$ hat die Lösungen

$x_1 = -2 + 3i$ und $x_2 = -2 - 3i$

Bsp 5: $x^3 - 7x^2 + 16x - 10 = 0$ hat die Lösungen

$x_1 = 1$; $x_2 = 3 + i$ und $x_3 = 3 - i$

§ 6 POTENZFUNKTIONEN

1. Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten: $f(x) = a \cdot x^n$

Def 1: Durch die Gleichung $f(x) = a \cdot x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$) wird jedem $x \in \mathbb{R}$ eindeutig ein Funktionswert $f(x) \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

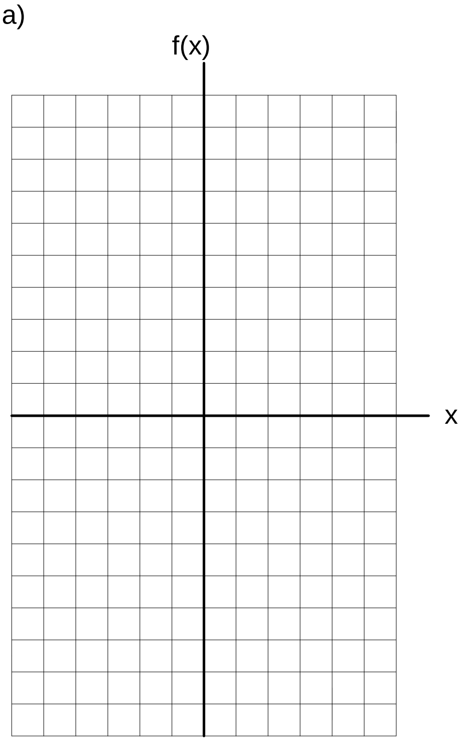
Die so definierten Funktionen heissen Potenzfunktionen n-ten Grades.

Ihre Graphen nennt man Parabeln n-ten Grades.

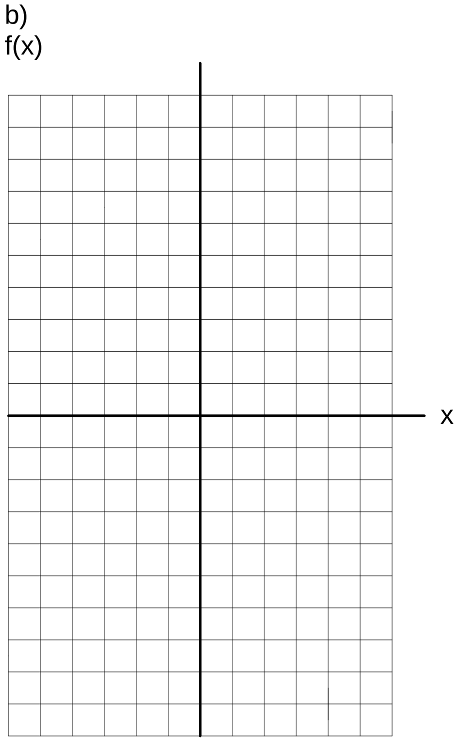
Bsp 1: Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x^n$ für

a) $n = 2$ und $n = 4$ b) $n = 3$ und $n = 5$

a)

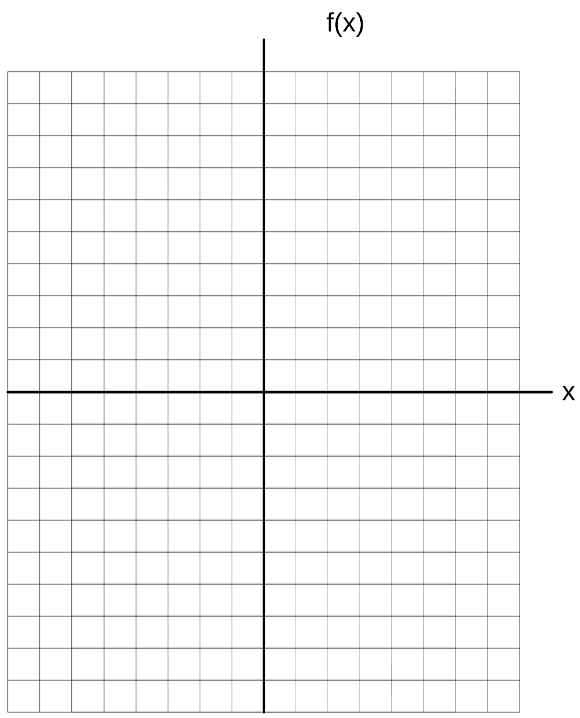


b)



Satz1: Für gerade Exponenten sind die Parabeln bezüglich der f(x)-Achse achsensymmetrisch, für ungerade Exponenten sind sie punktsymmetrisch bezüglich des Nullpunkts des Koordinatensystems.

Bsp 2: Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = a \cdot x^2$ für $a = 1$, $a = 2$, $a = 0.5$, $a = -0.5$



Also : Auch die Graphen der Funktionen $f(x) = a \cdot x^n$ ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$) zeigen Parabeln n-ten Grades. Sie entstehen aus den Graphen von $f(x) = x^n$ durch Streckung oder Pressung in vertikaler Richtung.

Bei negativem Koeffizienten a kommt eine Spiegelung an der x-Achse dazu.

2. Potenzfunktionen mit negativem, ganzzahligem Exponent : $f(x) = a \cdot x^{-n}$

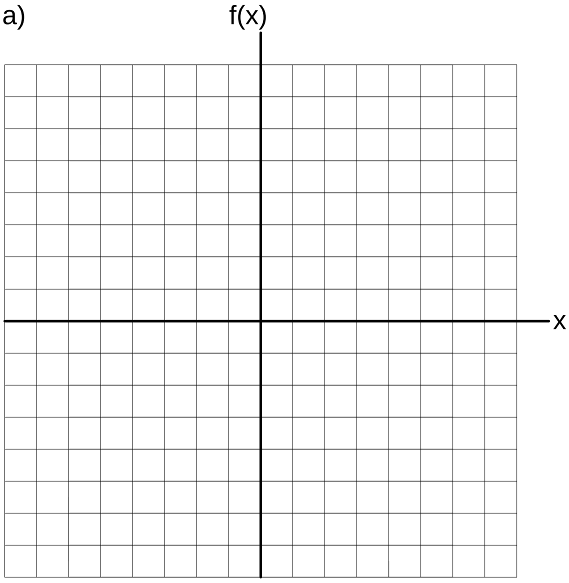
Def 2: Durch die Gleichung $f(x) = a \cdot x^{-n}$ ($n \in \boldsymbol{N}$, $a \in \mathbb{R}$) wird jedem $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, eindeutig ein Funktionswert $f(x) \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Die Graphen der so definierten Funktionen nennt man Hyperbeln n-ten Grades.

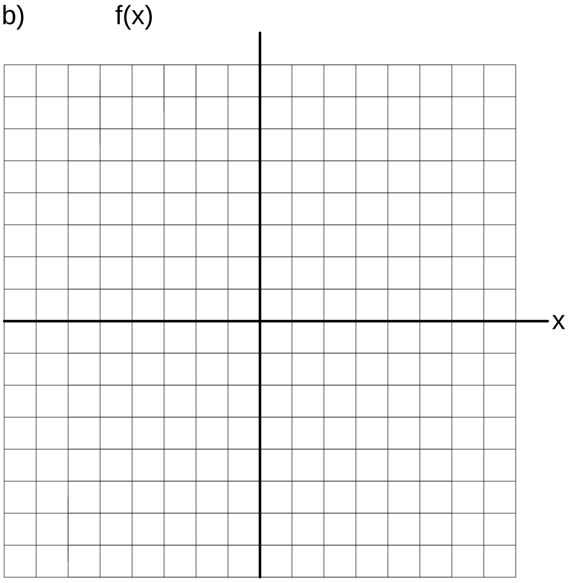
Bsp 3: Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x^{-n}$ für

a) $n = 2$ und $n = 4$ b) $n = 1$ und $n = 3$

a)



b)



<u>Satz2</u>: Für gerade Exponenten sind die Hyperbeln bezüglich der f(x)-Achse achsensymmetrisch, für ungerade Exponenten sind sie punktsymmetrisch bezüglich des Nullpunkts des Koordinatensystems.

Die sogenannte <u>gleichseitige Hyperbel</u> $f(x) = x^{-1} = 1/x$ ist ausserdem bezüglich der Winkelhalbierenden achsensymmetrisch.

Die x-Achse ist Kurvenasymptote (Grenzgerade) für $x \to \pm \infty$, die f(x)-Achse ist Kurvenasymptote für $x \to 0$.

Die Funktionen $f(x) = a \cdot x^{-n}$ sind an der Stelle $x = 0$ <u>nicht definiert</u>.

<u>3. Potenzfunktionen mit gebrochenen Exponenten (Wurzelfunktionen)</u>

Die Wurzelfunktionen können als Umkehrfunktionen der in Ziffer 1. diskutierten Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten aufgefasst werden, sofern diese umkehrbar sind.

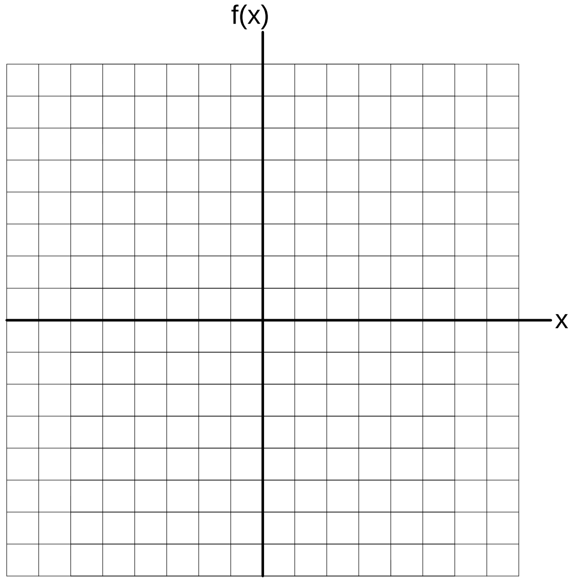
Dies ist, wie die Zeichnungen auf p.18 zeigen, nur bei ungeraden Exponenten der Fall.

Man unterscheidet deshalb:

<u>Fall 1</u> : $f(x) = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, n ungerade , hat als Umkehrfunktion

$$\hat{f}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Bsp 4: $f(x) = x^3 \rightarrow \hat{f}(x) = \sqrt[3]{x}$



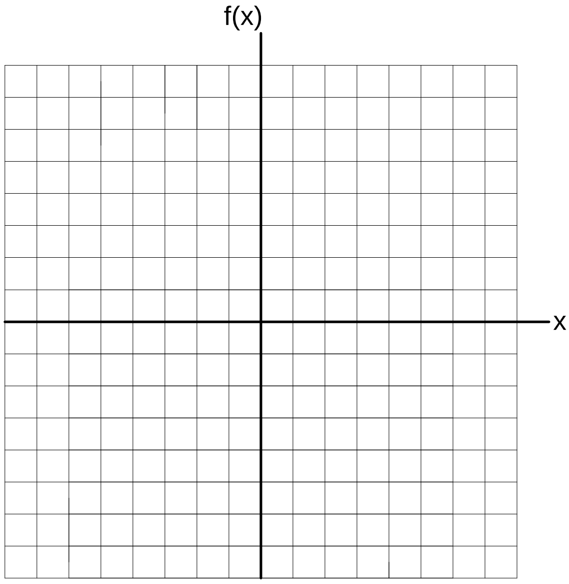
<u>Fall 2</u> : $f(x) = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, n gerade, ist nicht injektiv und deshalb nicht direkt umkehrbar.

Eine Aufteilung von f(x) in zwei je injektive Teilfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist aber durch eine Zerlegung des Definitionsbereichs $\mathbb{R}$ in die Teile $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^-$ möglich:

$f_1(x) = x^n$ (f_1: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$) ergibt $\hat{f}_1(x) = \sqrt[n]{x}$

$f_2(x) = x^n$ (f_2: $\mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$) ergibt $\hat{f}_2(x) = -\sqrt[n]{x}$

Bsp 5: $f(x) = x^2 \rightarrow \hat{f}_1(x) = +\sqrt{x}$ und $\hat{f}_2(x) = -\sqrt{x}$



Merke:

$\hat{f}_1$ und $\hat{f}_2$ sind zwei unabhängige Funktionen.
Sie lassen sich <u>nicht</u> zu einer einheitlichen
Funktion zusammenfassen

§ 7 POTENZGLEICHUNGEN

1. Allgemeine Potenzgleichungen mit ganzzahligen Exponenten

Nachdem eventuelle negative Exponenten durch Wegmultiplizieren der Nenner entfernt wurden, hat eine Potenzgleichung mit ganzzahligen Exponenten die Form

$$ax^n + bx^{n-1} + ... + cx + d = 0$$

Potenzgleichung vom Grad n

Sie hat nach dem Fundamentalsatz genau n Lösungen in $\mathbb{C}$, von denen eventuell mehrere zusammenfallen können (Mehrfachlösungen).

Falls komplexe Lösungen auftreten, so immer in gerader Anzahl.

Exakte Lösungsverfahren existieren bis zum Grad 4.
Allerdings sind die Verfahren für Grad 3 und Grad 4 recht kompliziert, so dass man für Grade grösser als 2 im allgemeinen zu Näherungsverfahren ($\rightarrow$ Rechner) greift.

Gelingt es, eine Lösung x_0 der Gleichung zu finden, so lässt sich der Faktor $(x - x_0)$ von der Gleichung abspalten:

$$(x - x_0) \cdot [\text{Restgleichung}] = 0$$

Da das Produkt zweier Faktoren nur 0 sein kann, falls einer der beiden Faktoren selbst 0 ist, ergibt sich aus obiger Gleichung

- entweder: $(x - x_0) = 0$
  (was zur bereits bekannten Lösung $x = x_0$ führt)

- oder: [Restgleichung] = 0
  (wobei der Grad der noch zu lösenden Restgleichung um 1 niedriger als in der ursprünglichen Gleichung ist).

Mit jeder gefundenen Lösung kann der Grad der Gleichung also um 1 vermindert werden.

Bsp 1: $x^2 - 7x + 10 = 0$ hat die Lösung $x = 2$. Also muss eine Zerlegung $(x - 2)\cdot[\text{Restgleichung}] = 0$ möglich sein.

In der Tat ist $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)\cdot(x - 5) = 0$, d.h.

- entweder $(x - 2) = 0 \rightarrow$ 1. Lösung: $x_1 = 2$
- oder $(x - 5) = 0 \rightarrow$ 2. Lösung: $x_2 = 5$

Bsp 2: $x^3 - 2x^2 + 5x = 0$ hat die Lösung $x = 0$.
Tatsächlich ist eine Zerlegung $x\cdot(x^2 - 2x + 5) = 0$ möglich, wobei die Restgleichung nur noch den Grad 2 aufweist.

2. Die lineare Gleichung (Potenzgleichung vom Grad 1)

Satz1: Die Lösung der linearen Gleichung $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ ist:

$$x = -b/a$$

3. Die quadratische Gleichung (Potenzgleichung vom Grad 2)

Satz2: Die 2 Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ sind:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ueber die Art der Lösungen entscheidet die sogenannte Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ der quadratischen Gleichung:

$$D \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} 0 \begin{array}{l} \rightarrow \text{ 2 verschiedene reelle Lösungen} \\ \rightarrow \text{ 2 zusammenfallende reelle Lösungen} \\ \rightarrow \text{ 2 komplexe Lösungen} \end{array}$$

Bsp 3: $x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$

also: $x_1 = 3$ und $x_2 = 2$

Bsp 4: $x^2 - 10x + 25 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-100}}{2}$

also: $x_1 = x_2 = 5$

Bsp 5: $x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2}$

also: $x_1 = 3 + 2i$ und $x_2 = 3 - 2i$

4. Gleichungen höheren Grades, Spezialfälle

Unter Umständen lassen sich Potenzgleichungen höheren Grades durch eine geeignete Substitution der Variabeln in Gleichungen niedrigeren Grades verwandeln.

Bsp 6: Die Gleichung $9x^4 - 85x^2 + 36 = 0$ ist eine sogenannte biquadratische Gleichung.
Die Substitution $z = x^2$ liefert sofort eine gewöhnliche quadratische Gleichung für z, nämlich:

$9z^2 - 85z + 36 = 0$ mit den Lösungen $z_1 = 9$ und $z_2 = 4/9$

Daraus finden sich durch Rücksubstitution die 4 Lösungen für x:

$x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2/3$; $x_4 = -2/3$

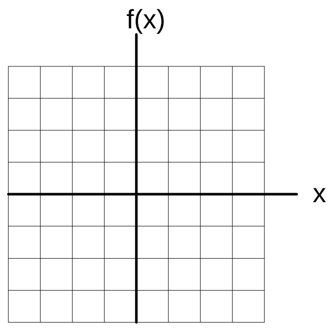
Analoge Substitutionen lassen sich auch in anderen geeigneten Fällen finden.

5. Näherungsverfahren

Zu jeder Potenzgleichung $a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + ... + c \cdot x + d = 0$ lässt sich sofort in natürlicher Weise eine Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + ... + c \cdot x + d$ definieren.

Offensichtlich sind die Lösungen der Potenzgleichung gerade die Nullstellen der zugehörigen Potenzfunktion f(x), d.h. diejenigen Stellen, wo der Graph von f(x) die x-Achse schneidet.

Bsp 7: $x^3 - 2x^2 + 2 = 0$; zugehörige Funktion: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$



herausgelesene Lösung: $x_0 \approx$

Dieses Verfahren ist nun natürlich auch ohne Zeichnung durchführbar:

Als Anfangsintervall braucht man zwei x-Werte, deren Funktionswerte unterschiedliches Vorzeichen haben. Die Näherung lässt sich nun mit beliebiger Genauigkeit durchführen, indem man die Intervallgrenzen einander schrittweise annähert.

Anmerkung :

Dieses (oder ähnliche) Lösungsverfahren verwendet auch der Rechner. Es lässt sich auch für andere Gleichungsarten einsetzen, allerdings nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen.

5. Potenzgleichungen mit gebrochenen Exponenten (Wurzelgleichungen)

Def 1: Eine Gleichung, bei der die Variable x in Wurzelausdrücken vorkommt, nennt man Wurzelgleichung.

Wurzelgleichungen lassen sich allenfalls dann exakt lösen, wenn es gelingt, alle Wurzeln zu entfernen. Dabei geht man wie folgt vor:

1. Isolieren einer Wurzel, in der die Variable enthalten ist
2. Potenzieren der Gleichung
3. Wenn noch Wurzeln vorhanden $\rightarrow$ 1.
   Wenn keine Wurzeln mehr vorhanden: Lösen der Gleichung
4. Kontrolle der gefundenen Lösungen obligatorisch.

Bsp 8: $\sqrt{8x-4} - \sqrt{3x+1} = 2$

1. $\sqrt{8x-4} = 2 + \sqrt{3x+1}$
2. $8x - 4 = 4 + 4\sqrt{3x+1} + 3x + 1 = 4\sqrt{3x+1} + 5 + 3x$
1. $5x - 9 = 4\sqrt{3x+1}$
2. $25x^2 - 90x + 81 = 48x + 16 \rightarrow 25x^2 - 138x + 65 = 0$
3. $x_1 = 5$ und $x_2 = 0.52$
4. Kontrolle:

x_1: $\sqrt{40-4} - \sqrt{15+1} = 2$ stimmt

x_2: $\sqrt{4.16-4} - \sqrt{1.56+1} = 2$ ist falsch

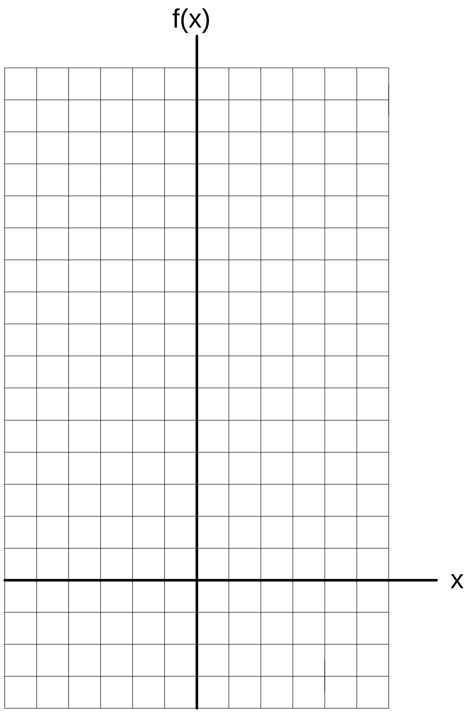
Also: einzige richtige Lösung: x = 5

§ 8 EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

1. Die Exponentialfunktion

Def 1: Die Funktion $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, heisst Exponentialfunktion.

Bsp 1: Zeichnen Sie die beiden Exponentialfunktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 2^{-x} = (1/2)^x$



$f(x) = 2^{-x}$ entsteht aus $f(x) = 2^x$ natürlich durch Spiegelung an der f(x)-Achse.

Falls $a > 1$: $f(x) = a^x$ steigt mit wachsendem x an
Falls $a = 1$: $f(x) = 1^x = 1$ ist eine horizontale Gerade der Höhe 1
Falls $0 < a < 1$: $f(x) = a^x$ fällt mit wachsenden x ab

Die x-Achse ist Asymptote falls $a \neq 1$

Alle Graphen laufen unabhängig von a durch den Punkt A(0/1).

2. Die Logarithmusfunktion

Da die in Ziffer 1 definierten Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ für $a \neq 1$ offensichtlich injektiv sind, müssen Umkehrfunktionen $\hat{f}(x)$ existieren.

Für diese Umkehrfunktionen muss gemäss Def p.8 gelten:

$$\hat{f}\left[a^x\right] = a^{\hat{f}(x)} = x$$

Bsp 2: Die Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ gibt folgende Zuordnungen:

$1 \to 2\ ;\ 2 \to 4\ ;\ 3 \to 8\ ;\ -1 \to 0.5\ ;\ 0.5 \to \sqrt{2}$ etc.

Die Umkehrfunktion muss also genau das Umgekehrte tun, nämlich:

$2 \to 1\ ;\ 4 \to 2\ ;\ 8 \to 3\ ;\ 0.5 \to -1\ ;\ \sqrt{2} \to 0.5$ etc.

Sie löst also im Wesentlichen die Gleichung $2^x = z$ bei gegebenem z nach dem Exponenten x auf:

$2^x = 32 \quad \to \quad x =$ $\qquad$ $2^x = 1 \quad \to \quad x =$

$2^x = 0.25 \quad \to \quad x =$ $\qquad$ $2^x = \sqrt[3]{2} \quad \to \quad x =$

Def 2: Die gesuchte Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ (mit $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) heisst Logarithmusfunktion zur Basis a.

Sie ordnet jedem positiven reellen Argument x einen Funktionswert $\log_a x$ zu, den sogenannten Logarithmus von x zur Basis a.

Es gilt also: $\log_a\left[a^x\right] = a^{\log_a x} = x$

Merke: Die Logarithmusfunktionen sind nur für positive Argumente definiert.

Satz1: Unabhängig von der gewählten Basis a gilt:

$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a a^r = r$

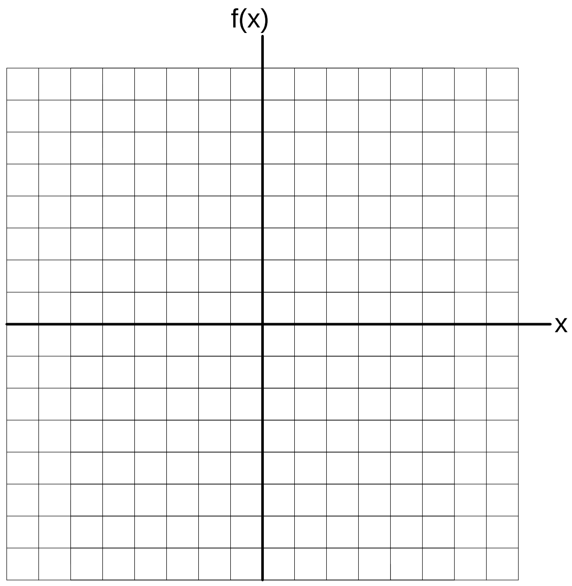
Anmerkung:

Sind in der Gleichung $a^x = z$, $a > 0$, $a \neq 0$, $z > 0$

- a und x gegeben, so findet man z durch Potenzieren
- z und x gegeben, so findet man a durch Radizieren (Wurzelziehen)
- a und z gegeben, so findet man z durch Logarithmieren

Das Potenzieren hat offenbar zwei verschiedene Umkehroperationen, das Radizieren und das Logarithmieren. Dies ist natürlich deshalb so, weil das Potenzieren nicht kommutativ ist.

Bsp 3: Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \log_2 x$ als Umkehrfunktion von $f(x) = 2^x$



Satz2: Für Logarithmen beliebiger Basis a gilt:

a) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

b) $\log_a(u / v) = \log_a u - \log_a v$

c) $\log_a(u^k) = k \cdot \log_a u$

d) $\log_a(1/v) = -\log_a v$

e) $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_a u$

Bsp 4: $\log_a(\frac{x \cdot y}{z}) = \log_a x + \log_a y - \log_a z$

$\log_a(\sqrt{d} \cdot b^3) = 0.5 \cdot \log_a d + 3 \cdot \log_a b$

Merke: Logarithmen von Summen und Differenzen lassen sich nicht vereinfachen.

Def 3: Die Logarithmen zur Basis 10 heissen Zehnerlogarithmen.

Sie sind aus dem Rechner mit der Taste **log** abrufbar.

Not : Für Zehnerlogarithmen schreibt man anstatt $\log_{10}$ kurz log

Def 4: Die Logarithmen zur Basis e = 2.7182818 ... (Eulersche Zahl, vgl. p.50) heissen natürliche Logarithmen (logarithmus naturalis).

Sie sind aus dem Rechner mit der Taste **ln** abrufbar.

Not : Für natürliche Logarithmen schreibt man kurz ln

Die Logarithmen zu anderen Basen sind - falls überhaupt je gebraucht - durch nachstehende Umrechnungsformel erhältlich:

Satz3: $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ oder $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Bsp 5: $\log_5 17 = \frac{\log 17}{\log 5} = 176037$ d.h.: $5^{1.76037} = 17$

§ 9 EXPONENTIALGLEICHUNGEN

Def 1: Eine Gleichung, bei der die gesuchte Variable im Exponenten einer Potenz steht, nennt man Exponentialgleichung.

Bsp 1: $4^x = 64$ ist eine Exponentialgleichung (mit der Lösung $x = 3$).

Falls Exponentialgleichungen weder Summen noch Differenzen aufweisen, lassen sie sich durch Logarithmieren vereinfachen und eventuell lösen.

Bsp 2: $2^x = 25 \rightarrow x \cdot \log 2 = \log 25 \rightarrow x = 4.644$

Bsp 3: $6^{2x-1} = 33 \rightarrow (2x - 1) \cdot \log 6 = \log 33 \rightarrow x = 1.4757$

Bsp 4: $9 \cdot 7^{2x} = 13^{x+2} \rightarrow \log 9 + 2x \cdot \log 7 = (x+2) \cdot \log 13 \rightarrow$
$\rightarrow x \cdot [2 \cdot \log 7 - \log 13] = 2 \cdot \log 13 - \log 9 \rightarrow x = 2.210$

Hingegen lässt sich zum Beispiel die Exponentialgleichung $2^x + 3^x = 100$ nicht durch Logarithmieren vereinfachen und deshalb auch nicht auf diese Weise lösen. In diesem Fall würde man wieder auf ein Näherungsverfahren oder den Rechner zurückgreifen.

Bsp 5: $2^x + 3^x = 100$ mit den Nullstellen von $f(x) = 2^x + 3^x$ angenähert:

$f(3) = 35$
$f(4) = 97$
$f(4.1) = 107.5$

$\rightarrow x \approx 4.03$

§ 10 ZAHLENFOLGEN UND ZAHLENREIHEN

1. Allgemeine Zahlenfolgen

Def 1: Eine Zahlenfolge ist eine Funktion a der natürlichen Zahlen von 1 bis $n \in \boldsymbol{N}$ in die rellen Zahlen $\mathbb{R}$:

$$a: \{1,2,3, \dots ,n\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Das Argument aus $\{1,2,3, \dots ,n\}$ heisst Nummer, der Funktionswert aus $\mathbb{R}$ heisst Folgenglied.

Bsp 1: Die Zahlenfolge 6, 1, 0.5, -3, 6, 8, -2 ist eine Funktion $a: \{1,2,3,4,5,6,7\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Zuordnungen:

$1 \rightarrow 6$
$2 \rightarrow 1$
$3 \rightarrow 0.5$
$4 \rightarrow -3$
$5 \rightarrow 6$
$6 \rightarrow 8$
$7 \rightarrow -2$

Der (Platz)nummer 1 wird das Folgenglied 6 zugeordnet, der Nummer 2 das Glied 1 etc., also

$a(1) = 6$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0.5$ etc.

Not : Anstatt $a(1) = 6$, $a(2) = 1$ etc. schreibt man bei Zahlenfolgen einfacher:

$a_1 = 6$, $a_2 = 1$ etc.

a_n bezeichnet das n-te Glied der Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3 \dots$

Def 2: Eine Zahlenfolge heisst endlich, wenn sie nur endlich viele Glieder hat, d.h. wenn der Definitionsbereich $\{1,2,3, \dots ,n\}$ eine endliche Menge ist.
Andernfalls heisst sie unendlich (Definitionsbereich = $\boldsymbol{N}$).

Bsp 2: 1, 2, 3, ... , 10 ist endlich
1, 2, 3, 4, ... ist unendlich

Def 3: Eine Zahlenfolge heisst monoton steigend, falls jedes Glied der Folge mindestens so gross ist, wie das vorangehende Glied.

Eine Zahlenfolge heisst monoton fallend, falls jedes Glied der Folge höchstens so gross ist, wie das vorangehende Glied.

Eine Zahlenfolge heisst alternierend, falls das Vorzeichen von Glied zu Glied wechselt.

Bsp 3:	1, 4, 5, 5, 9, 11, 18	ist monoton steigend
	6, 0, -3, -4, -12, -22	ist monoton fallend
	1, -2, 3, -4 ,5 -6, ...	ist alternierend
	1, 10, 9, 100, 99, 1000, 999	ist nicht monoton

Def 4: Ist $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine beliebige Zahlenfolge, so ensteht daraus die 1. Differenzenfolge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ durch fortlaufende Differenzenbildung
$b_1 = a_2 - a_1,\ b_2 = a_3 - a_2, \ldots$

Analogerweise kann aus der 1. die 2. Differenzenfolge, aus dieser wiederum die 3. etc. gebildet werden.

Bsp 4:	2 , 9 , 28 , 65 , 126 , 217 , 344 , 513	Ausgangsfolge
	7 , 19 , 37 , 61 , 91 , 127 , 169	1. Differenzenfolge
	12 , 18 , 24 , 30 , 36 , 42	2. " "
	6 , 6 , 6 , 6 , 6	3. " "

Bsp 5:	1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , ...	Ausgangsfolge
	1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , ...	1. Differenzenfolge
	1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...	2. " "
	etc.	etc.

2. Spezielle Folgentypen

Def 5: Eine Zahlenfolge heisst arithmetische Folge 1. Ordnung, falls die Differenz d zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, d.h. falls ihre 1. Differenzenfolge eine konstante Folge ist.

Es ist also : $a_{n+1} - a_n = d$ für alle n

Bsp 6:	1, 2, 3, 4, 5, ...	$d = 1$
	4, 7, 10, 13, 16, ...	$d = 3$
	19, 14, 9, 4, -1, ...	$d = -5$
	8, 8, 8, 8, 8, ...	$d = 0$

Satz1: Eine arithmetische Folge 1. Ordnung ist durch ihr Anfangsglied a_1 und die Differenz d vollständig gegeben.

Das n-te Glied berechnet sich durch :$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

Bsp 7: $a_1 = 4$; $d = 3$ $\rightarrow$ $a_7 = 4 + 6\cdot 3 = 22$

Def 6: Eine Zahlenfolge heisst arithmetische Folge k. Ordnung, falls ihre k-te Differenzenfolge als erste eine konstante Folge ist.

Bsp 8:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...	ist eine arithmetische Folge 2. Ordnung, weil:
3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	1. Differenzenfolge
2, 2, 2, 2, 2, ...	2. Differenzenfolge ist konstant

Satz2: Die Funktion, die eine arithmetische Folge k-ter Ordnung beschreibt, ist eine Potenzfunktion k. Grades.

Bsp 9: Die Zahlenfolge $a_n = 2n^3 - n^2 + 3n - 12$ muss also eine arithmetische Folge 3. Ordnung sein. In der Tat:

Ausgangsfolge	:	-8, 6, 42, 112, 228, 402, 646, ...	
1. Differenzenfolge	:	14, 36, 70, 116, 174, 244, ...	
2. " "	:	22, 34, 46, 58, 70, ...	
3. " "	:	12, 12, 12, 12, ...	ist konstant.

Def 7: Eine Zahlenfolge heisst geometrische Folge, falls der Quotient q zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

Es ist also : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ für alle n

Bsp10:

1, 2, 4, 8, 16, 32, ...	$q = 2$
5, 2, 0.8, 0.32, 0.128 ...	$q = 0.4$
4, -4, 4, -4, 4, -4, ...	$q = -1$
1, -3, 9, -27, 81, ...	$q = -3$
10, 10, 10, 10, 10, ...	$q = 1$

Satz3: Eine geometrische Folge ist durch ihr Anfangsglied a_1 und den Quotienten q vollständig gegeben.

Das n-te Glied berechnet sich durch: $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$

Bsp11: $a_1 = 5$; $q = 1.2$ $\rightarrow$ $a_8 = 5\cdot 1.2^7 = 17.9159$

3. Zahlenreihen

Def 8: Eine Reihe ist der Summenwert aller Glieder einer Zahlenfolge.

Bsp12: Aus der Zahlenfolge 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 entsteht die Reihe
$s = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$

Def 9: Eine arithmetische Reihe ist der Summenwert einer arithmetischen Zahlenfolge 1. Ordnung.

Satz4: Für eine arithmetische Reihe gilt:

$$s_n = n \cdot a_1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Bsp12: $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 6 \cdot \frac{2+17}{2} = 57$

Def10: Eine geometrische Reihe ist der Summenwert einer geometrischen Zahlenfolge.

Satz5: Für eine geometrische Reihe gilt:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Bsp13: $3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{10} = 3 \cdot \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 88'572$

Satz6: Reihen höherer Ordnung:

a) Summe der ersten n Quadratzahlen:

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$$

b) Summe der ersten n Kubikzahlen:

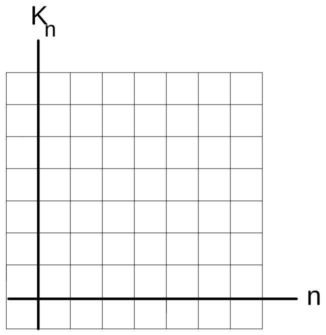
$$1 + 8 + 27 + 64 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

§ 11 WACHSTUMS- UND ZERFALLSPROZESSE

1. Die drei Modelle

Man unterscheidet drei Wachstums- bzw. Zerfallsmodelle, nämlich:

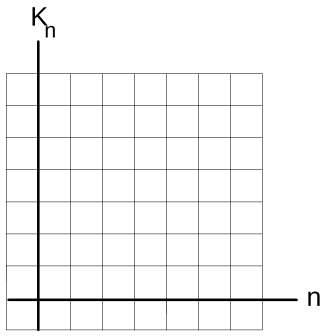
a) das lineare Modell:
in gleichen Zeitintervallen werden konstant gleiche Zuschläge bzw. Abzüge gemacht



K_0 : Vorrat zu Beginn
K_n : Vorrat nach n Intervallen
d : Zuschlag (Abzug) pro Intervall
(d>0 : Wachstum; d<0 : Zerfall)
n : Anzahl Intervalle

Es gilt: $K_n = K_0 + n \cdot d$

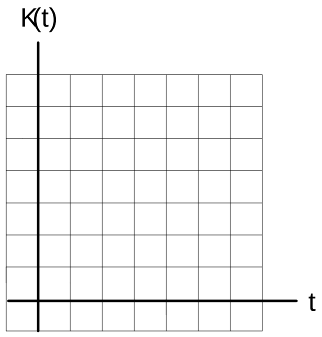
b) das prozentuale Modell ("Zinseszins-Modell"):
in gleichen Zeitintervallen werden prozentual zum jeweiligen Vorrat die gleichen Zuschläge bzw. Abzüge gemacht



K_0 : Vorrat zu Beginn
K_n : Vorrat nach n Intervallen
p% : prozentualer Zuschlag (Abzug) pro Intervall
q = 1 + p/100 : Zuwachs- bzw. Zerfallsrate
(q>1 : Wachstum; 0<q<1 : Zerfall)
n : Anzahl Intervalle

Es gilt: $K_n = K_0 \cdot q^n$

c) das exponentielle Modell:
der Zuschlag bzw. Abzug erfolgt nicht intervallweise sondern augenblicklich



K(0): Vorrat zu Beginn (t=0)
K(t): Vorrat zur Zeit t
α : Wachstums- bzw. Zerfallskonstante
($\alpha > 0$: Wachstum; $\alpha < 0$: Zerfall)
t : Zeit

Es gilt: $K(t) = K(0) \cdot e^{\alpha t}$

2. Anwendungsbeispiele

a) Lagerbewirtschaftung $\rightarrow$ lineares Modell

Bsp 1: Aus einem Vorrat von 1000 [m] Kabel werden wöchentlich im Durchschnitt 27 [m] entnommen. Wie gross ist der Vorrat nach 13 Wochen ?

$K_0 = 1000$; $d = -27$; $n = 13 \rightarrow K_{13} = 1000 + 13 \cdot (-27) = 649$ [m]

b) Zinseszinsrechnung $\rightarrow$ prozentuales Modell

Bsp 2: Ein Kapital von 25'000 [Fr] wird jährlich mit 4.25% verzinst. Wie gross ist das Kapital nach 8 Jahren ?

$K_0 = 25'000$; $p = 4.25\% \rightarrow q = 1.0425$; $n = 8$
$\rightarrow K_8 = 25'000 \cdot 1.0425^8 = 34'877.75$ [Fr]

c) radioaktiver Zerfall $\rightarrow$ exponentielles Modell

Bsp 3: Das Kohlenstoffisotop C_{14} ist radioaktiv und hat eine Halbwertszeit von T = 5590 [Jahre], d.h. es dauert 5590 [Jahre] bis von einem bestimmten Anfangsvorrat die Hälfte zerfallen ist. Wieviel C_{14} ist von 1000 [g] nach 13'000 [Jahren] noch übrig ?

Bestimmung von α: $K(5590) = K(0) \cdot e^{\alpha \cdot 5590} = 0.5 \cdot K(0) \rightarrow e^{\alpha \cdot 5590} = 0.5 \rightarrow \alpha \cdot 5590 = \ln(0.5) \rightarrow \alpha = -0.000124$

$K(13'000) = 1000 \cdot e^{-0.000124 \cdot 13000} = 199.5$ [g]

Wie man diesem Beispiel leicht entnehmen kann, gilt für die Halbwertszeit T und die Zerfallskonstante α der folgende Zusammenhang:

Satz1: $T \cdot \alpha = \ln(0.5)$ T : Halbwertszeit ; α : Zerfallskonstante

3. Gemischte Modelle

Oft werden konstante Zuschläge oder Abzüge in bestimmten Zeitintervallen mit einer gleichzeitigen Verzinsung gekoppelt, z.B. bei Rentenzahlungen, Ratengeschäften, Schuldamortisationen etc.

Dabei wird neben regelmässigen Zahlungen (bzw. Entnahmen) in konstanter Höhe (Raten), die aufgelaufene Summe (bzw. das Restkapital) gleichzeitig verzinst.

Bsp 4: Schuldentilgung $\rightarrow$ gemischtes Modell.

Eine Schuld von 250'000 [Fr] soll innerhalb von 5 Jahren abgezahlt werden, wobei die jeweilige Restschuld gleichzeitig mit einem Schuldzins von 6% verzinst werden muss. Wie gross ist die jährliche Tilgungsrate ?

Es gilt: $$R = S \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$$

(R : Tilgungsrate ; S : Schuld ; q = 1 + p/100 ; n : Laufzeit)

In obigem Beispiel also:

$$R = 250'000 \cdot \frac{106^5 \cdot (106-1)}{106^5 - 1} = 59'349.10 \, [\text{Fr}]$$

Daraus ergibt sich der Tilgungsplan:

Jahr	Schuld zu Jahresbeginn	Zinsen	Schuld zu Jahresende	Tilgung	Restschuld
1	250'000.00	15’000.00	265’000.00	59'349.10	205'695.90
2	205'695.90	12'339.05	217'989.95	59'349.10	158'640.85
3	158'640.85	9'518.45	168'159.30	59'349.10	108'810.20
4	108'810.20	6'528.61	115'338.81	59'349.10	55'989.71
5	55'989.71	3'359.38	59'349.09	59'349.10	-. 01

§ 12 UNENDLICHE FOLGEN UND REIHEN , GRENZWERTE

1. Grenzwerte von unendlichen Zahlenfolgen

Def 1: Eine unendliche Zahlenfolge heisst Nullfolge, wenn die Glieder der Folge mit wachsender Nummer $n \to \infty$ dem Betrage nach beliebig klein werden.

Bsp 1: 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... ist eine Nullfolge.

Def 2: Eine unendliche Zahlenfolge a_1, a_2, a_3 ... hat den Grenzwert a, falls $a_1 - a, a_2 - a, a_3 - a$, ... eine Nullfolge ist.

Not : Für den Grenzwert schreibt man: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Bsp 2: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Satz1: Hauptsatz der Grenzwertrechnung

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n = a / b \qquad (b \neq 0)$$

Der Grenzwert einer Summe (Differenz, Produkt, Quotient) ist gleich der Summe (Differenz, Produkt, Quotient) der Grenzwerte.

2. Grenzwerte von unendlichen Zahlenreihen

Def 3: Eine unendliche Zahlenreihe hat einen Grenzwert, falls die Summe aller ihrer Glieder eine endliche Zahl s ist.

Bsp 3: Die bekannte Eulersche Zahl e lässt sich als Grenzwert einer unendlichen Reihe definieren:

$$1 + 1/(1!) + 1/(2!) + 1/(3!) + 1/(4!) + \ldots\ldots = e = 2.7182818\ \ldots$$

Satz2: Eine unendliche geometrische Reihe hat einen Grenzwert s, falls die unendliche geometrische Zahlenfolge aus der sie entsteht, eine Nullfolge ist, d.h. falls $-1 < q < +1$.

In diesem Falle gilt : $s = \dfrac{a_1}{1 - q}$

Bsp 4: $s = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots. = \dfrac{1/2}{1 - 1/2} = 1$

3. Weitere Eigenschaften von unendlichen Zahlenfolgen

Def 4: Eine unendliche Zahlenfolge heisst nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, falls es eine endliche reelle Zahl S gibt, so dass alle Glieder der Folge kleiner (bzw. grösser) als S sind.

S nennt man die obere (bzw. untere) Schranke der Folge.

Bsp 5: 1, 2, 3, 4, ... ist nach oben unbeschränkt
ist nach unten beschränkt, S = 1

1, -2, 3, -4, 5, ... ist nach oben und unten unbeschränkt

3, 3/2, 3/3, 3/4, 3/5, ... ist nach oben beschränkt, S = 3
ist nach unten beschränkt, S = 0

Übungen zu § 1

1. Es sei M = {r,s,t}. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

   a) $r \in M$ b) $r \subset M$ c) $\{r\} \in M$ d) $\{r\} \subset M$

2. Suchen Sie Teilmengenbeziehungen zwischen den folgenden Mengen und stellen Sie diese Beziehungen schematisch dar:

A	=	Menge aller Vierecke
B	=	Menge aller Parallelogramme
C	=	Menge aller Rhomben
D	=	Menge aller Rechtecke
E	=	Menge aller Quadrate

3. Es sei $A = \{x|2x = 6\}$

   Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

   a) $A = 3$ b) $A = \{3\}$ c) $3 \in A$ d) $\{3\} \in A$

4. Es sei A = {z} ; B = {y,z} ; C = {w,x,y,z} ; D = {w,x} ; E = {w,x,z}

   Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

   a) $D \subset C$ b) $A \subset B$ c) $B \subset E$ d) $B \not\subset D$
   e) $A \not\subset E$ f) $E \subset C$

5. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

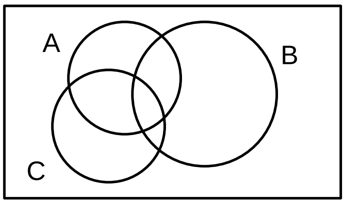
   a) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ b) $-1 \in \mathbb{R}$ c) $0.5 \in \mathbb{Q}$ d) $5.3 \in \mathbb{N}$
   e) $2 \in \mathbb{R}$ f) $-16 \in \mathbb{Z}$ g) $\pi \in \mathbb{Q}$ h) $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$
   i) $\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$ j) $\sqrt{25} \in \mathbb{Z}$

6. Es sei $A = \{\alpha, \beta\}$ und $B = \{x, y, z\}$

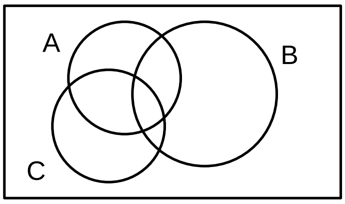
   Bestimmen Sie: $A \times B$, $B \times A$, A^2

7. Es sei $A = \{\alpha,\beta\}$. Schreiben Sie $\Omega(A)$ auf.

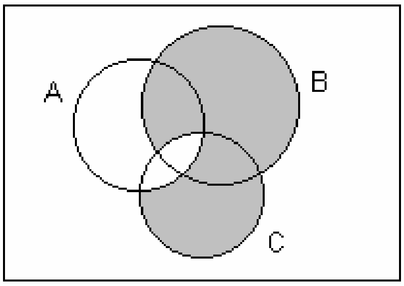
8. Schraffieren Sie in untenstehender Figur die Menge $A \cup (B \cap C)$



9. Schraffieren Sie die Menge $A \cup (B^c \cap C)$



10. Beschreiben Sie umgekehrt die schraffierte Fläche.

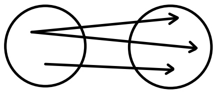


11. Wie könnte man die Menge $\mathbb{R}^2$ interpretieren ?

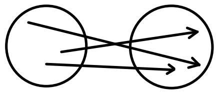
Übungen zu § 2

1. Welche der untenstehend skizzierten Zuordnungen sind Funktionen ?
   Welche unter ihnen sind injektiv, welche surjektiv, welche beides ?

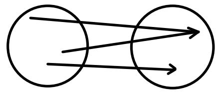
a)



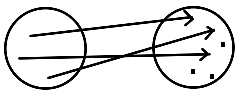
b)



c)

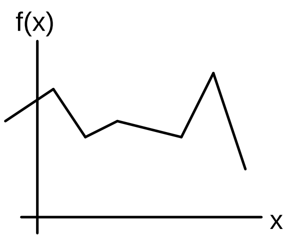


d)

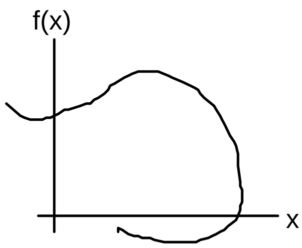


2. Untenstehende Skizzen zeigen ausschnittsweise die Graphen von Zuordnungen. Welche Ausschnitte könnten Funktionen sein ?

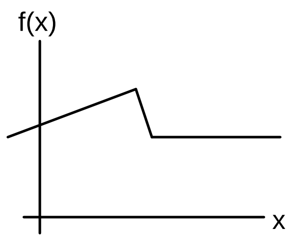
a)



b)



c)



3. Stellen Sie tabellarisch, graphisch und analytisch die Funktion dar, welche jeder reellen Zahl die um 2 kleinere Zahl zuordnet.

4. Es sei $f(x) = \frac{x^2}{4} - 4$

   Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.

5. Es sei $f(x) = \left| \begin{array}{ll} x - 1 & \text{falls } x < 3 \\ 6 / x & \text{falls } x \geq 3 \end{array} \right.$

   Skizzieren Sie den Graphen.

6. Es sei $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Berechnen Sie $f(-3)$, $f(0)$, $f(s)$, $f[f(x)]$

7. Zwei Grössen x und y seien nach der Vorschrift $x^2 + y^2 = 9$ miteinander verknüpft.

Stellen Sie die Beziehung graphisch dar. Ist dies eine Funktion ?

8. Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen von

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = \dfrac{3 - 4x}{2x + 1}$

Übungen zu § 3

1. Konstruieren Sie einen Körper mit 3 Elementen und geben Sie die darin gültigen Rechenregeln an.

2. Untersuchen Sie die algebraische Struktur die entsteht, wenn man auf der Menge A = {0,1,2,3} eine Addition und eine Multiplikation definiert, bei welchen mit "Vierer-Resten" ($\rightarrow$ "modulo 4") gerechnet wird.

3. Wie Aufgabe 2 aber mit der Menge A = {0, 1, 2, 3, 4} "modulo 5"

4. Beweisen Sie die Behauptung:

   $$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots\ 2^{n-1} = 2^n - 1$$

5. Suchen Sie eine Formel zur Berechnung der Summe der n ersten ungeraden natürlichen Zahlen und beweisen Sie diese.

6. Beweisen Sie:

   Die Zahl $9^n - 1$ ist für jeden natürlichen Exponenten ohne Rest durch 8 teilbar.

Übungen zu § 4

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke und fassen Sie sie gegebenfalls zusammen:

1. $a^2 + z \cdot a^2$

2. $b^2 \cdot b^5 \cdot b$

3. $a^7 : a^4$

4. $v^n : (u^n \cdot z^n)$

5. $(u^6 + v^5)(u^6 - v^5)$

6. $(y + y^n)^2$

7. $t^3 \cdot (t^5)^2$

8. $s \cdot s^{-6} \cdot s^3$

9. $\dfrac{a^{-4} \cdot b^5 \cdot x^{-2} \cdot y^{-1}}{x^{-3} \cdot y^{-2} \cdot a^{-3} \cdot b^6}$

10. $(3a - b)^{-s}(3a + b)^{-s}$

11. $(x^4 : x^{-2}) \cdot x^{-6}$

12. $(c^2 \cdot d^0)^{-r}$

13. $x^{5/3} \cdot (1/x)^{5/3}$

14. $\left(a^{2/3}\right)^{-3/4}$

15. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt{x}$

16. $\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[4]{t} \cdot \sqrt[6]{t}$

17. $\sqrt{a \cdot \sqrt{\sqrt{a}}}$

18. $\sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}} \cdot x$

19. $(t^{5/6})^{1/3} \cdot (t^{1/2})^{4/9}$

20. $(z^{1/4} + z^{1/2} + 1)(z^{1/4} - z^{1/2} - 1)$

21. $\{ab^2 \cdot (a^2 b)^{1/3}\}^6$

22. $\sqrt{c \cdot \sqrt[3]{c}} \cdot \sqrt[3]{c \cdot \sqrt{c}} \cdot \sqrt[6]{c}$

23. $(6x^2/y)^{p/r} \cdot (y^2/8x)^{p/r}$

Übungen zu § 5

1. Beweisen Sie Satz 1.

2. Rechnen Sie Satz 3 nach.

3. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

   a) $(3 + 2i)(5 - 7i)$ b) $i(3 - 8i)(5 + 2i)$ c) $i(i + i^2)$

   d) $\frac{2+2i}{7i}$ e) $\frac{33+6i}{(1+2i)(6-3i)}$ f) $\frac{69+42i}{(1-2i)(6+3i)}$

   g) $(3 - 2i)^2$ h) $\frac{(6-3i)(33+6i)}{2-i}$

4. Lösen Sie die Gleichung $x^4 = 1$

5. Lösen Sie die Gleichung $x^3 = 1$

Übungen zu § 7

Lösen Sie die nachstehenden quadratischen Gleichungen:

1. $2x^2 + 11x + 5 = 0$

2. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

3. $6x^2 - 5x + 2 = 0$

4. $a + x = 1/a + 1/x$

5. $5y^2 + 239y - 170 = 0$

6. $8z^2 + 4z + 1 = 0$

Lösen Sie nachfolgenden Gleichungen durch eine geeignete Substitution:

7. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

8. $x^6 + 13x^3 + 36 = 0$

9. $(t^2 + 4)^2 - 25(t^2 + 4) + 100 = 0$

Lösen Sie mit Hilfe eines Näherungsverfahrens:

10. $x^3 - 7x^2 + 41x - 87 = 0$

11. $x^3 - 13x^2 + 76x - 238 = 0$

Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen:

12. $5 + \sqrt{5x-1} = x$

13. $\sqrt{13-4x} = 2-x$

14. $\sqrt{(5x+9)(3x-1)} - 4x = 36$

15. $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+6} = 9$

16. $\sqrt{5x+1} + \dfrac{4}{\sqrt{x+1}} = 3\sqrt{x+1}$

17. $3\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8} = 2\sqrt{2x+2}$

Textaufgaben:

18. Gesucht eine Zahl x, deren Differenz mit ihrem eigenen Reziprokwert = 0.45 ist.

19. Die Fläche eines Rechtecks misst 100 [cm^2], seine Seiten unterscheiden sich um 5 [cm]. Berechnen Sie die Rechtecksseiten.

20. Bei einem Quader ist die zweite Kante um 1 [cm] länger als die erste und die dritte um 3 [cm] länger als die zweite. Die Raumdiagonale des Körpers misst 17 [cm]. Berechnen Sie die drei Kanten des Quaders.

21. Zwei Autos fahren gegen eine rechtwinklige Strassenkreuzung. Das eine, von Norden her kommend, mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 10$ [ms^{-1}], das andere, von Osten her, mit einer Geschwindigkeit von $v_2 = 14$ [ms^{-1}].
Im Augenblick, wo das langsamere über die Kreuzung fährt, ist das schnellere Auto noch 100 [m] davon entfernt.
Nach welcher Zeit t ist ihr gegenseitiger Abstand gerade d = 70 [m] ?

22. Wie lang ist die Kante eines Würfels, dessen Volumen um 271 [cm^3]wächst, wenn die Kante um 1 [cm] verlängert wird ?

23. Die Summe und das Produkt zweier Zahlen x und y sind gerade gleich gross, nämlich 100. Berechnen Sie die beiden Zahlen.

24. Ein Sportflugzeug durchfliegt eine 12 [km] lange Strecke mit und gegen den Wind in zusammen insgesamt 350 [s]. Die Windgeschwindigkeit beträgt $v_w = 10$ [ms^{-1}].
Berechnen Sie die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs und die Flugzeit bei Windstille.

25. Bei einem zweiarmigen Hebel unterscheiden sich die Hebelarme um 4 [cm].
Hängt man eine Last F an den rechten Hebelarm, so braucht man beim linken Arm eine Kraft von 100 [N]. Hängt F aber links, so muss rechts eine Gegenkraft von 144 [N] eingesetzt werden.
Berechnen Sie Länge der beiden Hebelarme und die Last F.

26. Ein Kreiszylinder hat den Grundkreisradius r = 7 [cm] und die Höhe h = 10 [cm].
Um welche Strecke x muss man Radius und Höhe gleichzeitig verlängern, damit das Volumen des Zylinders sich verdoppelt ?

Übungen zu § 8

1. Bestimmen Sie die folgenden Logarithmen:

a) $\log_6 12$ b) $\log_5 0.2$ c) $\log_3 100$

d) $\log_4 32$ e) $\log_8 66$ f) $\log_7 14$

2. Vereinfachen Sie:

a) $\log \frac{d^2 \cdot b}{c}$ b) $\log \frac{\sqrt{x}}{y}$ c) c) $\log \sqrt{1-x}$

d) $\log \frac{z}{\sqrt[3]{u^2}}$ e) $\log (x \cdot \sqrt{a^2 - x^2})$ f) $\log \frac{1}{1-x}$

3. Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen:

a) $\log x \;-\; 2 \cdot \log y \;-\; \log z$ b) $\frac{1}{3} \cdot \log b \;-\; 6 \cdot \log c$

c) $-\log r \;-\; \log s$ d) $\log u \;-\; \log v \;+\; 1$

Übungen zu § 9

Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen:

1. $5^{2x-4} = 625$
2. $9^{-x} = 27$
3. $e^{z} = 100$
4. $6^{x-1} = 10$
5. $7^{t} = 14$
6. $2^{x} \cdot 5^{-x} = 10$
7. $7 \cdot 6^{2x} = 11^{x+3}$
8. $3 \cdot 5^{x} = 7^{3x-2}$
9. $4 \cdot 5^{x-1} = 10^{x+1}$
10. $13^{x} - 20 \cdot 13^{x-2} = 7000$

11. Welches ist der kleinste ganzzahlige Exponent n, für welchen der Ausdruck $(1.2)^{n}$ grösser als 10^{8} wird ?

12. Welches ist der grösste ganzzahlige Exponent, für welchen der Ausdruck $(0.95)^{n}$ noch grösser als $0.000001 = 10^{-6}$ ist ?

13. Der Ertrag eines Kohlebergwerks sinkt von Jahr zu Jahr auf 95% der Vorjahresproduktion. Wie lange dauert es, bis nur noch ein Viertel des ursprünglichen Ertrags gefördert wird ?

14. Für die Höhenmessung mit Hilfe eines Barometers bei überall gleicher Atmosphäre benützt man das folgende physikalische Gesetz:

    Der Höhenunterschied $\Delta h = h_1 - h_2$ zweier Punkte P_1 und P_2 ist proportional zum Logarithmus des Verhältnisses $p_1 : p_2$ des Luftdrucks.

    Es werden folgende Messungen gemacht:

    $h_1 = 500$ müM mit $p_1 = 951$ [mb] ; $h_2 = 1200$ müM mit $p_2 = 872$ [mb]

    Berechnen Sie daraus die für diese Atmosphäre gültige Formel und beantworten Sie anschliessend:

    a) wie gross ist der Luftdruck auf Meereshöhe ?

    b) wie gross ist der Luftdruck in einer Höhe von 4800 müM ?

    c) welchen Höhenunterschied muss man überwinden, damit der Luftdruck genau auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes sinkt ?

Übungen zu § 10

1. Arithmetische Folgen 1. Ordnung:

   a) Berechnen Sie a_{16} für $a_1 = 600$ und $d = -52$

   b) Berechnen Sie a_{20} für $a_1 = -3$ und $d = 0.5$

   c) Berechnen Sie die Nummer des Gliedes $a_n = 69$ für $a_1 = 7$ und $d = 2$

   d) Berechnen Sie die Differenz d für $a_1 = 8$ und $a_{65} = 24$

   e) Berechnen Sie das Anfangsglied für $a_8 = 1000$ und $a_{17} = 109$

2. Geometrische Folgen:

   a) Berechnen Sie a_7 für $a_1 = 1/24$ und $q = 2$

   b) Berechnen Sie a_{10} für $a_1 = 1000$ und $q = -0.1$

   c) Berechnen Sie die Nummer des Gliedes $a_n = 204.8$ für $a_1 = 625$ und $q = 0.8$

   d) Berechnen Sie den Quotienten q für $a_1 = 8$ und $a_7 = 4096$

   e) Schalten Sie zwischen die Zahlen 1 und 10 vier weitere Zahlen so ein, dass geometrische Folge mit 6 Gliedern entsteht.

   f) Von einer geometrischen Folge mit lauter positiven Gliedern kennt man $a_1 = 1$ und $a_{100} = 100$.

      Berechnen Sie a_{10} und a_{20}

      Welche Nummer hat das erste Glied, das grösser als 12 ist ?

3. Arithmetische Folgen höherer Ordnung:

Bestimmen Sie die Ordnung der Folge und suchen Sie eine Formel zur Berechnung des n. Gliedes:

a) 1, 7, 25, 65, 140, 266, ...

b) 2, 10, 21, 35, 52, 72, ...

4. Reihen:

a) Berechnen Sie die Summe der ersten 15 Glieder der arithmetischen Zahlenfolge 1. Ordnung mit $a_1 = 7$ und $d = 4$

b) Berechnen Sie $s = 1 + 4 + 7 + 10 + ... + 106$

c) Berechnen Sie $s = 7 + 15 + 23 + 31 + ... + 4'191$

d) Berechnen Sie die Summe aller durch 37 teilbaren vierstelligen Zahlen.

e) In ein Quadrat der Seitenlänge s = 10 [cm] wird ein weiteres Quadrat gezeichnet, indem man die Seitenmitten des ursprünglichen Quadrats verbindet.
In dieses neue Quadrat wird in gleicher Weise ein drittes gezeichnet etc.

Berechnen Sie die Summe der ersten 8 Quadratflächen.

f) Berechnen Sie die Summe $s = 7 + 21 + 63 + 189 + ... + 1'240'029$

g) Berechnen Sie die Summe $s = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - ... + ... - 1000$

Übungen zu § 11

1. Wie lange müssen 15'000 [Fr] zu jährlich 6% an Zins liegen, bis das Kapital auf 25'000 [Fr] angewachsen ist ?

2. Ein Kapital soll sich bei jährlicher Verzinsung innert 10 Jahren verdoppeln.
Zu welchem Zinsfuss muss es angelegt sein ?

3. Bei welchen Zinsfuss p wächst ein Kapital von 20'000 [Fr] in 8 Jahren auf den gleichen Betrag an, wie 30'000 [Fr] bei p = 5 % in 6 Jahren ?

4. Ein Kapital von 100'000 [Fr] wird zu einem jährlichen Zinsfuss von p = 8% verzinst.

   Berechnen Sie das Endkapital nach 1 Jahr bei jährlicher, halbjährlicher, quartalsweiser und monatlicher Verzinsung.

5. Eine Bakterienkultur enthält um 0900 Uhr 200 Individuen.
Um 1200 Uhr zählt man 540 Individuen.

   Berechnen Sie das Wachstumsgesetz nach allen 3 Modellen und geben Sie je eine Prognose für die Anzahl der Bakterien um 1400 Uhr.

   Welches Modell ist hier das richtige ?

6. Polonium hat eine Halbwertszeit von T = 138.5 [Tagen].

   Bestimmen Sie das Zerfallsgesetz und geben Sie an, wieviel von 100 [g] Polonium nach 1 Jahr noch unzerfallen ist.

7. Bei einer archäologischen Grabung wird ein verkohltes Holzstück gefunden, dessen C_{14}-Gehalt noch 41% des ursprünglichen Werts entspricht.
Datieren Sie den Fund.

8. Das Uranisotop U_{238} hat eine Halbwertszeit von
T = 4'500'000'000 [Jahren].

   Wie lange dauert es, bis von 1 [g] Uran genau 1 [mg] zerfallen ist ?

9. Gemäss einer Erhebung des United Nations Environment Programme betrug der Ausstoss an FCKW in die Atmosphäre in China im Jahre 1986 46'000 Tonnen, im Jahre 1994 waren es bereits 90'900 Tonnen.

   Gleichbleibenden prozentualen Zuwachs pro Jahr vorausgesetzt:

   a) Wieviele Tonnen werden es im Jahr 2010 sein ?

   b) Wann steigt der Ausstoss über die Menge von 300'000 Tonnen ?

10. Sie haben einen neuen PC gekauft und bezahlen ihn in 8 Monatsraten zu je Fr. 300.-. Der Verkäufer hat dabei einen Monatszins von 1.2% einkalkuliert.

   a) Wieviel hätte der PC bei Barzahlung gekostet ?

   b) Wie hoch wären die Raten, wenn Sie bei gleicher Verzinsung in 4 Monatsraten bezahlen würden ?

Übungen zu § 12

1. Untersuchen Sie die Zahlenfolgen auf Beschränktheit, Monotonie und Grenzwert:

   a) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ b) $a_n = \dfrac{n^2+12}{n}$ c) $a_n = \dfrac{1}{(-3)^n}$

2. Berechnen Sie den Summenwert der folgenden geometrischen Reihen:

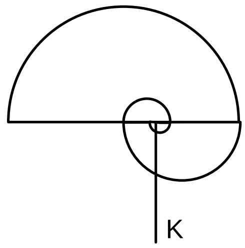
   a) $s = 1 + 0.8 + (0.8)^2 + (0.8)^3 + ...$

   b) $s = 4 - 1 + 1/4 - 1/16 + ... - ...$

   c) $s = 5 + 3 + 1.8 + 1.08 + ...$

   d) $s = 27 - 9 + 3 - 1 + ... - ...$

3. Berechnen Sie die Länge L und die Lage des Konvergenzpunktes K der nebenstehend skizzierten Spirale, die aus lauter Halbkreisen mit den Radien 16 [cm], 8 [cm], 4 [cm], 2 [cm], ... zusammengesetzt ist.



4. Ein an einem a = 50 [cm] langen Faden aufgehängtes Pendel wird mit einer anfänglichen Auslenkung von $\alpha = 30°$ losgelassen. Bei jeder halben Schwingung verringert sich diese Auslenkung auf 92% des vorherigen Werts.
   Berechnen Sie den bis zum vollständigen Stillstand zurückgelegten Weg des Pendels.

BERNER FACHHOCHSCHULE

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR BURGDORF

ABTEILUNG ARCHITEKTUR

MATHEMATIK : VORLESUNG 2

DIFFERENTIALRECHNUNG

COPYRIGHT 2007: AMTSNACHFOLGER DES COPYRIGHTBESITZERS 2001

COPYRIGHT 2001: B. GYSLER, DIPL. MATHEMATIKER

PROFESSOR AN DER HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR

4. AUFLAGE, 2001, BURGDORF, SCHWEIZ

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1 GRENZWERTE UND STETIGKEIT VON FUNKTIONEN

1. Beschränktheit und Monotonie von Funktionen

In ALG § 10 p.32 und § 12 p.39 wurden die Begriffe "Beschränktheit" und "Monotonie" für Zahlenfolgen (also für Funktionen a:$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) definiert.
Diese Definitionen lassen sich unter gewissen Voraussetzungen auf allgemeine Funktionen f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ausweiten.

Bsp 1: Die Zahlenfolge 1, 4, 9, 16, 25, ... ist eine Funktion mit den Zuordnungen
$a(1) = 1$, $a(2) = 4$, $a(3) = 9$, $a(4) = 16$, ...

Allgemein gilt also: $a(n) = n^2$

Diese Zuordnung erlaubt nun sofort eine Verallgemeinerung, indem man den ursprünglichen Definitionsbereich $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$ ausweitet.

Es entsteht dabei die Funktion $f(x) = x^2$, die mit der Funktion $a(n) = n^2$ für alle Argumente aus $\mathbb{N}$ übereinstimmt und darüber hinaus aber auch allen anderen Argumenten aus $\mathbb{R}$ einen Funktionswert zuordnet.

$f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) ist also eine Verallgemeinerung von $a(n) = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$).

Diese (einfachste) Art der Verallgemeinerung ist möglich:

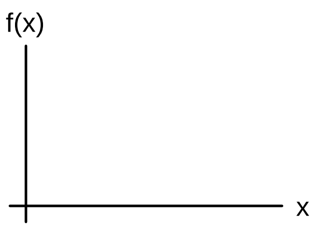
- wenn die Zahlenfolge a(n) durch eine analytische Darstellung (eine "Formel") gegeben ist und

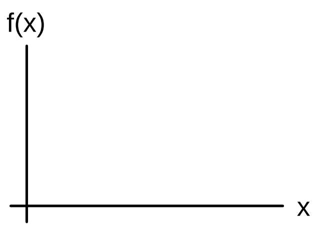
- wenn diese "Formel" auch auf nichtnatürliche Zahlen anwendbar ist.

Die Begriffe "Beschränktheit" und "Monotonie" lassen sich unter diesem Gesichtspunkt leicht auf Funktionen übertragen:

Def 1: Eine Funktion f heisst nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, falls es eine reelle Zahl S so gibt, dass $f(x) \leq S$ (bzw. $f(x) \geq S$) für alle x im Definitionsbereich von f gilt.

S nennt man eine obere (bzw. untere) Schranke der Funktion f.





<u>Def 2</u>: Eine Funktion f heisst <u>monoton steigend</u> (bzw. <u>monoton fallend</u>), falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$) für alle x im Definitionsbereich von f folgt.

2. Grenzwerte von Funktionen für x ® ± ¥

<u>Def 3</u>: Eine Funktion hat den <u>Grenzwert</u> a für $x \to +\infty$ (bzw. für $x \to -\infty$), falls $|f(x) - a|$ beliebig klein wird, wenn x über alle Grenzen wächst (bzw. unter alle Grenzen fällt).

Not : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$

Bsp 2: $f(x) = 1/x$: es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Bsp 3: $f(x) = e^x$: es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existiert nicht; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

<u>Satz1</u>: Für den Quotienten zweier Potenzfunktionen (Grad des Zählers n; Grad des Nenners m) gilt:

- ist $n < m$ so ist der Grenzwert für $x \to \pm\infty$ gleich 0
- ist $n > m$ so existiert der Grenzwert für $x \to \pm\infty$ nicht
- ist $n = m$ so ist der Grenzwert gleich dem Quotienten der Koeffizienten der höchsten Potenzen von x

Bsp 4: $f(x) = \dfrac{7x}{x^2+1}$ (n = 1 ; m = 2) $\to$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-1}{7x^2+13x}$ (n = 3 ; m = 2) $\to$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ existiert nicht

$f(x) = \dfrac{2x^2-5x+4}{5x^2+8x-7}$ (n = 2 ; m = 2) $\to$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{2}{5} = 0.4$

<u>Satz2</u>: Für eine Exponentialfunktion mit Basis $a > 1$ gilt:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x$ existiert nicht $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ bzw.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^{-x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} a^{-x}$ existiert nicht

- eine Exponentialfunktion überwiegt jede Potenzfunktion

Bsp 5: $f(x) = \dfrac{2^x}{x^8} \quad \to \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existiert nicht und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

3. Stetigkeit von Funktionen an einer Stelle $x = a$

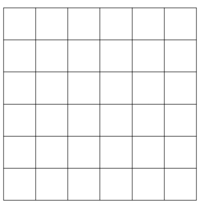
Bei einer gegebenen Funktion $f(x)$ lassen sich für eine Stelle $x = a$ grundsätzlich drei - unter Umständen verschiedene - Grössen untersuchen, nämlich:

a) der Funktionswert von f an dieser Stelle : $f(a)$

b) der Grenzwert von f bei Annäherung an a von der positiven Seite her (rechtsseitiger Grenzwert) : $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$

c) der Grenzwert von f bei Annäherung an a von der negativen Seite her (linksseitiger Grenzwert) : $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$

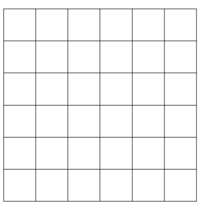
Bsp 6: $f(x) = x^2 + 1$; $a = 0$



Wie man sofort sieht gilt:

a) $f(0) = 1$ b) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = 1$ c) $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = 1$

Bsp 7: $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x}$; $a = 0$

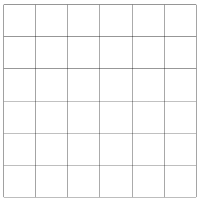


Im Gegensatz zu vorher ist:

a) $f(0)$ nicht definiert

b) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = 1$ c) $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = 1$

Bsp 8: $f(x) = \frac{|x|}{x}$; $a = 0$



Hier ist sogar:

a) f(0) nicht definiert

b) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = +1$

c) $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -1$

Def 4: Eine Funktion f(x) heisst stetig an der Stelle x = a, falls

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

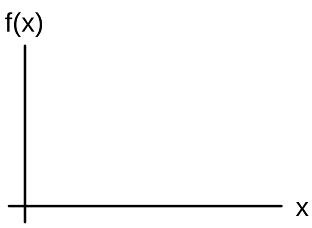
gilt, das heisst, falls der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert und der Funktionswert selbst an der Stelle a alle existieren und alle gleich gross sind.

Eine Funktion heisst global stetig, falls sie für alle x stetig ist.

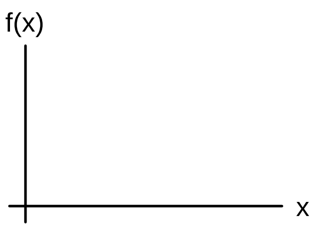
Man unterscheidet grundsätzlich 3 Arten der Unstetigkeit:

1. Lücke: Die beiden Grenzwerte existieren und sind gleich gross, der Funktionswert selbst hingegen ist nicht definiert.
2. Sprung: Die beiden Grenzwerte existieren zwar, sind aber nicht gleich gross.
3. Pol: Mindestens einer der Grenzwerte ist nicht definiert (Unendlichkeitsstelle).

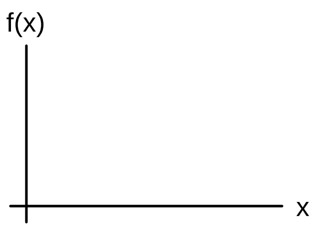
Lücke



Sprung



Pol



Bem : Diese Unstetigkeiten können auch kombiniert auftreten !

Bem : In der graphischen Darstellung bedeutet globale Stetigkeit eine Kurve ohne Lücken, ohne Sprünge und ohne Unendlichkeitsstellen.

4. Ein häufiger Fall: Quotient zweier Potenzfunktionen

Wenn ein Quotient f(x) zweier Potenzfunktionen an einer bestimmten Stelle x = a untersucht werden soll, stellt man fest:

a) ist der Funktionswert f(a) berechenbar, so gilt immer
$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$
das heisst:

f(x) ist an der Stelle a stetig, weitere Betrachtungen erübrigen sich.

b) ist der Funktionswert f(x) an der Stelle a nicht definiert (das heisst, liegt eine Division durch 0 vor) so unterscheidet man zwei Fälle:

• Fall ≠0/0 :

die beiden Grenzwerte existieren nicht,das heisst, f(x) hat an der Stelle a einen Pol

• Fall 0/0 :

f(x) kann durch (x - a) gekürzt werden.

Die so entstehende Ersatzfunktion f*(x) wird weiter untersucht:
Hat sie an der Stelle a einen berechenbaren Funktionswert f*(a), so ist dieser gerade gleich den Grenzwerten von f(x) bei Annäherung an die Stelle a, das heisst,
f(x) hat bei a eine Lücke auf der Höhe f*(a).

Ist auch f*(x) an der Stelle a nicht definiert, so kehre man zu b) zurück und unterscheide wieder die Fälle ≠0/0 bzw. 0/0 etc.

Bsp 9: Untersuchen Sie $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 9x + 18}$ bei x = 0, 1, 2, 3 und 6

x = 0 : f(0) = 2/3 → f ist bei x = 0 stetig

x = 1 : f(1) = 1/2 → f ist bei x = 1 stetig

x = 2 : f(2) = 0 → f ist bei x = 2 stetig

x = 3 : f(3) ist nicht definiert (Fall ≠0/0) → f hat bei x = 3 einen Pol

x = 6 : f(6) ist nicht definiert (Fall 0/0) → Man kürzt durch (x - 6) und erhält die Ersatzfunktion

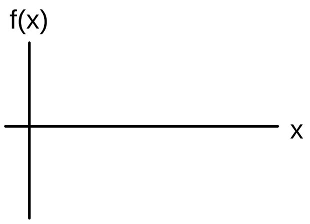
$f^*(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ mit $f^*(6) = 4/3$

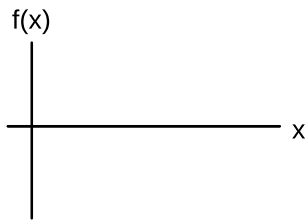
→ f hat bei x = 6 eine Lücke auf der Höhe 4/3

5. Sätze über stetige Funktionen

1. Nullstellensatz

Eine in einem Intervall von x = a bis x = b überall stetige Funktion f(x), bei welcher die Funktionswerte f(a) und f(b) an den Intervallgrenzen unterschiedliches Vorzeichen haben, hat im genannten Intervall mindestens eine Nullstelle.





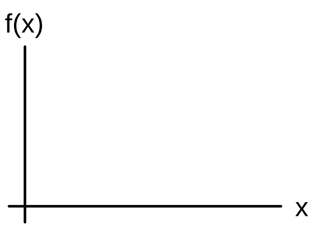
Bem: Beachten Sie, dass dieser Nullstellensatz die Grundlage für das in ALG, §7, p.24f geschilderte Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen ist.

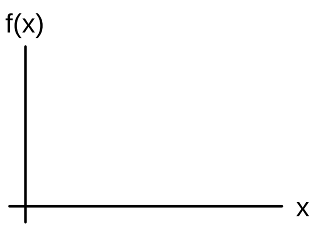
2. Zwischenwertsatz

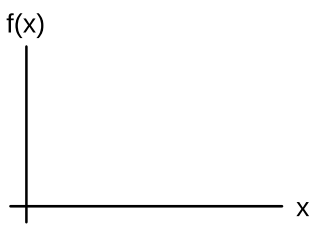
Eine in einem Intervall von x = a bis x = b überall stetige Funktion f(x) mit den Funktionswerten (a) und f(b) an den Intervallgrenzen, nimmt jeden Wert zwischen f(a) und f(b) innerhalb des genannten Intervalls mindestens einmal als Funktionswert an (Zwischenwert).

3. Extremwertsatz

Eine in einem Intervall von x = a bis x = b überall stetige Funktion f(x) hat im genannten Intervall immer einen grössten und einen kleinsten endlichen Funktionswert (Maximum und Minimum).







§ 2 ABLEITUNG EINER FUNKTION

Bei vielen Prozessen unserer Erfahrungswelt, welche durch Funktionen beschrieben werden können, interessiert nun nicht nur, welche Werte eine Funktion f(x) an einer bestimmten Stelle annimmt und ob sie dort stetig sei, sondern auch, wie rasch bzw. wie stark die Funktionswerte zu- oder abnehmen, wenn das Argument x der Funktion sich verändert.

Bsp 1: Freier Fall

Für den in t Sekunden zurückgelegten Weg s(t) eines Körpers im freien Fall und unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes gilt bekanntlich:

$s(t) = ½\cdot g\cdot t^2$ wobei $g = 9.81$ [ms^{-2}]

Im sogenannten s-t-Diagramm sieht das so aus:

t [s]	s(t) [m]
0	0
0.5	1.22
1	4.90
1.5	11.04
2	19.62
2.5	30.66
3	44.14
3.5	60.09
4	78.48

Welche Information lässt sich der Steilheit der Funktionskurve entnehmen ?

Def 1: Als Steigung einer Funktionskurve in einem Kurvenpunkt P wird die Steigung der Tangente an die Kurve in P bezeichnet.

Die Steigung m_t der Tangente t im Punkte P lässt sich als Grenzwert der Steigung m_s der Sehne s wie folgt ausdrücken:

$$m_t = \tan\tau = \lim_{Q \to P} m_s = \lim_{Q \to P} (\tan\sigma)$$

Ersetzt man P durch seine Koordinaten (x/f(x)), so ergibt sich:

$$m_t = \tan\tau = \lim_{\Delta x \to 0} (\tan\sigma) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{(Differentialquotient)}$$

Durch diesen Differentialquotienten wird offenbar eine neue Funktion definiert:

Der Differentialquotient ordnet bei gegebener Funktion f(x) jedem Argument x die Steigung der Funktionskurve von f(x) an dieser Stelle x zu.

Diese neue Funktion ist natürlich von f(x) abhängig und von Funktion zu Funktion verschieden.

Diese durch den Differentialquotienten definierte Funktion nennt man Ableitung der Funktion f(x) (auch etwa: Ableitungsfunktion, Steigungsfunktion).

Not : Die Ableitung der Funktion f(x) wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

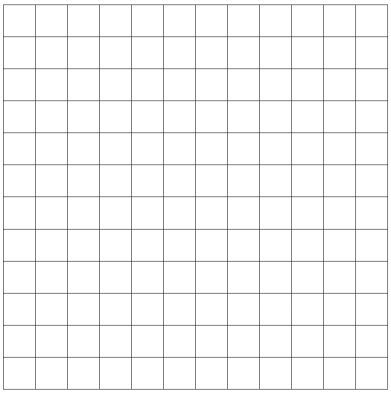
Es ist also:

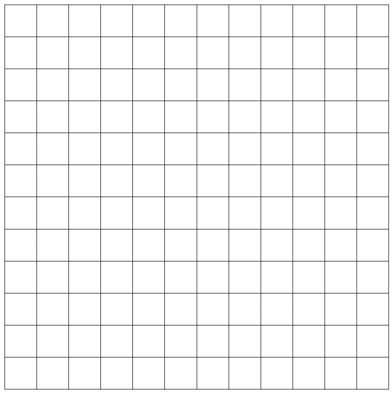
Def 2: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

ABLEITUNG DER FUNKTION f(x)

Bsp 3: $f(x) = x^2$

a) Versuch, die Ableitung graphisch zu ermitteln:





Vermutung: $f'(x)$ ist eine .... und zwar: $f'(x)$ = ...

b) Beweis der Vermutung mit Hilfe des Differentialquotienten:

Für $f(x) = x^2$ ist natürlich $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$ also ist:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Damit lässt sich nun die Steigung der Kurve von $f(x) = x^2$ an jeder beliebigen Stelle x sofort ausrechnen, z.B.:

Steigung bei x = 0.5 : $f'(0.5) = 2 \cdot 0.5 = 1$ $\rightarrow$ $\tau = 45°$
Steigung bei x = -3 : $f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$ $\rightarrow$ $\tau = -80.5°$
Steigung bei x = 10 : $f'(10) = 2.10 = 20$ $\rightarrow$ $\tau = 87.1°$

§ 3 ABLEITUNGSREGELN: 1. TEIL

1. Ableitung der Potenzfunktionen

Satz1: Die Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Insbesondere gilt also:

$$f(x) = x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1 \ \ (= x^0)$$

Bsp 1: Ist $f(x) = x^6$ so ist $f'(x) = 6x^5$

2. Ableitung von Konstanten (konstante Funktionen)

Satz2: Die Ableitung von konstanten Funktionen $f(x) = c$ ist:

$$f'(x) = 0$$

Bsp 2: Ist $f(x) = 77$ so ist $f'(x) = 0$

3. Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor

Satz3: Die Ableitung einer Funktion mit multiplikativer Konstante $f(x) = k \cdot g(x)$ ist:

$$f'(x) = k \cdot g'(x)$$

Ein konstanter Faktor bleibt bei der Ableitung erhalten.

Bsp 3: Ist $f(x) = 7x^3$ so ist $f'(x) = 7 \cdot (3x^2) = 21x^2$

4. Ableitung einer Summe von Funktionen

Satz4: Ist $f(x) = g(x) \pm h(x)$ eine Summe oder Differenz von zwei (oder mehr) Funktionen, so ist:

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Die Ableitung einer Summe (Differenz) von Funktionen ist also gleich der Summe (Differenz) der Ableitungen der einzelnen Summanden.

Bsp 4: Ist $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 8x - 2$ so ist $f'(x) = 18x^2 - 6x + 8$

5. Höhere Ableitungen

Def 1: Lässt sich die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion f(x) weiterhin ableiten, so erhält man nacheinander die 2. Ableitung $f''(x)$, die 3. Ableitung $f'''(x)$, die 4. Ableitung $f^{(4)}(x)$ etc.; allgemein die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$.

Bsp 1: Ist $f(x) = 3x^4$ so ist der Reihe nach:

$f'(x)= 12x^3$, $f''(x)= 36x^2$, $f'''(x)= 72x$, $f^{(4)}(x) = 72$

Bsp 2: Für den nach t Sekunden zurückgelegten Weg s(t) eines gleichförmig beschleunigten Körpers auf geradliniger Bahn mit der Beschleunigung a, der Anfangsgeschwindigkeit v_0 (Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 0) und dem Anfangsweg s_0 (Weg, der zum Zeitpunkt t = 0 bereits zurückgelegt worden ist) gilt bekanntlich:

$$s(t) = ½\cdot a\cdot t^2 + v_0\cdot t + s_0$$

Wie leitet sich daraus die Gleichung für die Momentangeschwindigkeit v(t) und die Beschleunigung a her ?

Nehmen Sie als Zahlenbeispiel an: a = - 2 [ms^{-2}]; v_0 = 15 [ms^{-1}]; s_0 = 0 [m].

Bestimmen Sie:

a) Ort und Geschwindigkeit nach t = 6 [s]

b) Wo und wann beträgt die Geschwindigkeit v(t) = 8 [ms^{-1}] ?

c) Wo und wann steht der Körper still ?

d) Wann und mit welcher Geschwindigkeit wird die Wegmarke "40 [m]" passiert ?

Bem : Ueber weitere praktische Bedeutungen der höheren Ableitungen von Funktionen werden Sie im § 6 (Kurvendiskussion) nachlesen können.

§ 4 PRODUKT-, QUOTIENTEN- UND KETTENREGEL

1. Die Produktregel

Vorübung: Prüfen Sie anhand des Beispiels $f(x) = (2x+8)(x-5)$ nach, ob die Ableitung des Produkts zweier Funktionen gleich dem Produkt der Ableitungen der beiden Faktoren ist :

Ableitung des Produkts :

Produkt der Ableitungen:

Erkenntnis:

Satz1: Ist $f(x) = u(x)\cdot v(x)$ das Produkt zweier Funktionen, so berechnet sich die Ableitung $f'(x)$ wie folgt:

$$f'(x) = u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x)$$

PRODUKTREGEL

Bew : Ist $f(x) = u(x)\cdot v(x)$ so ist $f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)$ und damit ergibt sich also für den Differentialquotienten:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot\left[v(x+\Delta x) - v(x)\right] - \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right]\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{u(x+\Delta x)\cdot\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right\} + \lim_{\Delta x \to 0} \left\{\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x) =$$

$$= u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x)$$

Bsp 1: Es sei $f(x) = (2x - 3)(3x^2 + 5x - 7)$

Aus der Produktregel ergibt sich dafür die folgende Ableitung:
$f'(x) = (2x - 3)(6x + 5) + (2)(3x^2 + 5x - 7) = 18x^2 + 2x - 29$

2. Die Quotientenregel

Satz2: Ist f(x) = u(x)/v(x) der Quotient zweier Funktionen, so berechnet sich die Ableitung $f'(x)$ wie folgt:

$$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

QUOTIENTENREGEL

Bsp 2: Es sei $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3-8x}$.

Dann berechnet sich $f'(x)$ als:

$$f'(x) = \frac{(x^3-8x)(2x)-(x^2+2)(3x^2-8)}{(x^3-8x)^2} = \frac{-x^4-14x^2+16}{(x^3-8x)^2}$$

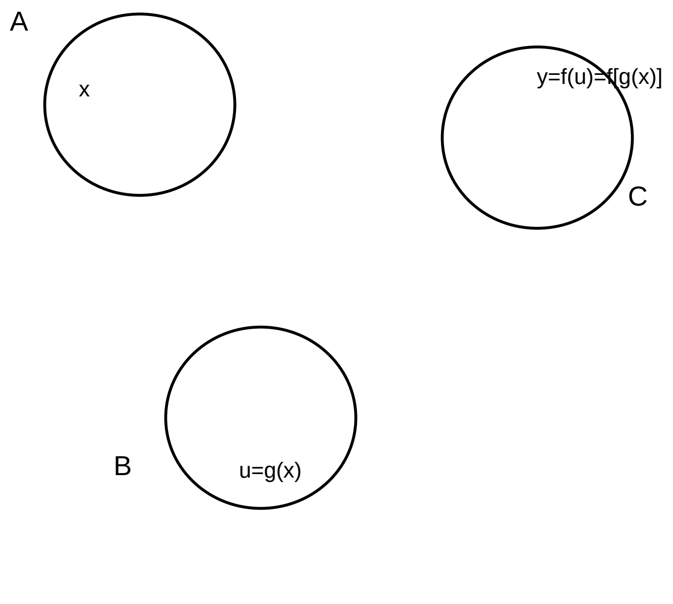
3. Die Kettenregel

Def 1: Sind A, B und C drei Mengen und ordnet die Funktion g: A $\to$ B jedem Element x $\in$ A genau ein Element u $\in$ B zu und ordnet ferner eine weitere Funktion f: B $\to$C jedem dieser Elemente u $\in$ B genau ein Element y $\in$ C zu, so ist dadurch eindeutig eine dritte Funktion h: A $\to$ C definiert, die jedem Element x $\in$ A genau ein Element y $\in$ C zuordnet, nämlich:

h(x) = f[g(x)]

Diese neue Funktion h heisst Verkettung der Funktionen g und f.

Diagramm:



Bsp 3: Es sei g(x) = sin x (= u) und f(u) = $\sqrt{3u}$ (= y)

Dann ist f[g(x)] = f[sin x] = $\sqrt{3 \cdot \sin x}$ die verkettete Funktion.

Merke: Die Verkettung von Funktionen ist nicht kommutativ (vertauschbar):

Bsp 4: g(x) = 5x, f(u) = cos u $\rightarrow$ f[g(x)] = cos(5x)
g(x) = cos x, f(u) = 5u $\rightarrow$ f[g(x)] = 5·cos x

Nun lässt sich natürlich auch umgekehrt vorgehen:

Bsp 5: Zerlegen Sie die Funktion h(x) = $\sqrt{\sin x}$ in zwei Teilfunktionen.

Offenbar wirkt auf das Argument x zunächst die Funktion g(x) = sinx und anschliessend wird auf dieses Resultat die Funktion f(u) = $\sqrt{u}$ angewendet.

Def 2: Die Funktion, die zuerst auf das Argument x angewendet wird, heisst innere Funktion, die anschliessend angewendete Funktion nennt man äussere Funktion.

Bsp 6: $z(t) = (\ln t)^2$

innere Funktion: ln äussere Funktion: $(\ )^2$

Bsp 7: $f(x) = (e^{\sin x})^3$

innere Funktion: sin x mittlere Funktion: exp äussere Funktion: $(\ )^3$

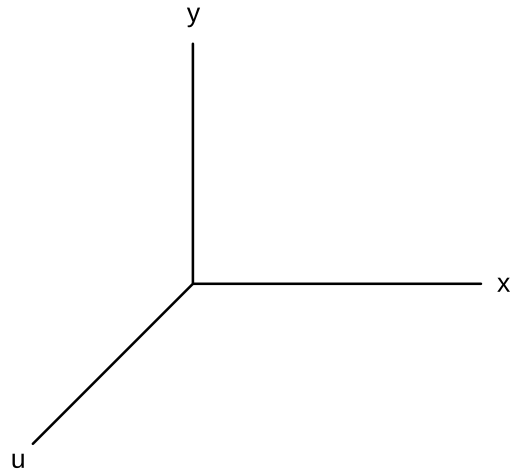
Wie gestaltet sich nun die Ableitung einer verketteten Funktion ?

Betrachten wir ein konkretes Beispiel:

Bsp 8: Innere Funktion $g(x) = x^2$ (= u)

Aeussere Funktion $f(u) = \frac{(u+1)^2}{4}$ (= y)

Ergibt die verkettete Funktion $f[g(x)] = h(x) = \frac{(x^2+1)^2}{4}$



Abkürzungen
$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$
$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = h(x+ \Delta x) - h(x)$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

also:

$h'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$ wobei $u = g(x)$

Satz3: Eine verkettete Funktion wird abgeleitet, indem man zuerst die äussere Funktion ableitet und dabei die ganze innere Funktion bei dieser Ableitung als Variable betrachtet und dies anschliessend mit der Ableitung der inneren Funktion (sogenannte "innere Ableitung") multipliziert.

KETTENREGEL

Bsp6 : $h(x) = (6x - 3x^4)^3$ ergibt: $h'(x) = 3 \cdot (6x - 3x^4)^2 \cdot (6 - 12x^3)$

§ 5 ABLEITUNGSREGELN: 2. TEIL

Mit Hilfe der Definition des Differentialquotienten und unter Verwendung der Produkt-, Quotienten- und Kettenregel lassen sich nun leicht weitere Ableitungsregeln finden:

1. Ableitung beliebiger Potenzfunktionen

Bsp 1: Ableitung von Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \rightarrow f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = -\, n \cdot x^{-n-1} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

$$\text{Also: } f(x) = \frac{1}{x^6} = x^{-6} \rightarrow f'(x) = -6 \cdot x^{-7} = \frac{-6}{x^7}$$

Insbesondere:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'\, x) = \frac{-1}{x^2}$$

Bsp 2: Ableitung von Potenzfunktion mit gebrochenen Exponenten (Wurzelfunktionen):

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \rightarrow [f(x)]^n = x \rightarrow \{[f(x)]^n\}' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) = 1 \quad \text{(Kettenregel)}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{n \cdot [f(x)]^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot \left[x^{1/n}\right]^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot x^{1-1/n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1/n-1}$$

$$\text{Also: } f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Insbesondere:

$$f(x) = \sqrt{\ldots\ldots} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{\text{i. A.}}{2\sqrt{\ldots\ldots}} \quad \text{(Ableitung von Quadratwurzeln)}$$

Satz1: Die Regel zur Ableitung von Potenzfunktionen gilt für **alle** Exponenten:

$$f(x) = x^b \quad \rightarrow \quad f'(x) = b \cdot x^{b-1}$$

2. Ableitung der Winkelfunktionen

Bsp 3: Die Sinus-Funktion:

Nach der Definition des Differentialquotienten ist für f(x) = sin x:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x$$

(Details siehe untenstehende Skizze)

Unter Verwendung der trigonometrischen Beziehungen cosx = $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ und tan x = sinx/cosx cot x erhält man auch die weiteren Ableitungen.

Satz2: Die Winkelfunktionen werden wie folgt abgeleitet:

f(x) =	f′(x)=
sin x	cos x
cos x	- sin x
tan x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
cot x	$\frac{-1}{\sin^2 x}$

3. Ableitung der Exponential- und der Logarithmusfunktionen

Bsp 4: Die Funktion $f(x) = e^x$

Nach Definition gilt (Differentialquotient):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

(Details aus nebenstehender Grenzwertbetrachtung)

Weiter ergibt sich für die Ableitung der Umkehrfunktion $f(x) = \ln x$:

$e^{f(x)} = e^{\ln x} = x \rightarrow [e^{f(x)}]' = e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1$ (Kettenregel)
$\rightarrow f'(x) = 1/e^{f(x)} = 1/e^{\ln x} = 1/x$

Schliesslich ergeben sich daraus unter Verwendung von $\log x = \ln x \cdot \log e$ und $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$ auch die Ableitungen der Logarithmusfunktion zur Basis 10 und der allgemeinen Exponentialfunktion.

Satz3: Logarithmus- und Exponentialfunktion werden wie folgt abgeleitet:

$f(x) =$	$f'(x) =$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log x$	$\frac{M}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$

wobei $M = \log e = 0.4343 \ldots$ der Umrechnungsfaktor zwischen ln und log ist

4. Ableitung der Arcusfunktionen

Bsp 5: Die Arcus-Sinus-Funktion als Umkehrfunktion der Sinus-Funktion:

$f(x) = \arcsin x \to \sin[f(x)] = \sin[\arcsin x] = x \to$
$\to \{\sin[f(x)]\}' = \cos[f(x)] \cdot f'(x) = 1$ (Kettenregel)

$$\to f'(x) = \frac{1}{\cos[f(x)]} = \frac{1}{\sqrt{1-\{\sin[f(x)]\}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\{\sin[\arcsin(x)]\}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Auf ähnliche Weise erhält man auch die Ableitungen der restlichen Arcusfunktionen.

Satz4: Die Ableitungen der Arcusfunktionen sind:

f(x) =	f′(x) =
arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos x	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctan x	$\frac{1}{1+x^2}$
arccot x	$\frac{-1}{1+x^2}$

§ 6 KURVENDISKUSSION

Das folgende Programm dient zur Untersuchung von Funktionen (und deren Graphen), insbesondere zur Berechnung der Nullstellen, der relativen Extremwerte und der Wendestellen.

Voraussetzung:

Es sei f(x) eine im betrachteten Intervall zweimal ableitbare Funktion. Dies bedeutet natürlich, dass sowohl f(x) wie auch $f'(x)$ in diesem Intervall stetig sind.

UNTERSUCHUNGSPROGRAMM FÜR DIE FUNKTION f(x)

1. Definitions- und Anwendungsbereich der Funktion

   1.1. Für welche Argumente x ist f(x) überhaupt definiert ?

   1.2. Für welche Argumente x ist f(x) im vorgelegten Problemzusammenhang sinnvoll ?

2. Periodizität

   Wenn eine Zahl $p \neq 0$ so existiert, dass für alle x im Definitionsbereich $f(x+p) = f(x)$ gilt, so heisst f(x) periodisch mit der Periodenlänge p.

   Der Graph von f(x) zeigt in diesem Falle ein periodisches Bild.

3. Symmetrien

   3.1. Ist $f(-x) = f(x)$ für alle x im Definitionsbereich, so ist der Graph zur f(x)-Achse achsensymmetrisch.

   3.2. Ist $f(-x) = -f(x)$ für alle x im Definitionsbereich, so ist der Graph zum Nullpunkt des Koordinatensystems punktsymmetrisch.

Aufgrund der Resultate der Untersuchungen der Ziffern 1., 2. und 3. wird nun der minimal nötige Untersuchungsbereich für die Funktion f(x) festgelegt, auf welchen sich alle nun folgenden Untersuchungen beschränken.

4. Nullstellen

   4.1. Nullstellen der Funktion f(x) selbst:
   alle x im Untersuchungsbereich, für welche $f(x) = 0$ gilt.

   4.2. Nullstellen der ersten Ableitung $f'(x)$:
   alle x im Untersuchungsbereich, für welche $f'(x) = 0$ gilt.

   4.3. Nullstellen der zweiten Ableitung $f''(x)$:
   alle x im Untersuchungsbereich, für welche $f''(x) = 0$ gilt.

5. Extremwerte, Wendestellen, Terrassenpunkte

5.1. alle x im Untersuchungsbereich, für welche $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ gilt, sind **relative Maxima**

alle x im Untersuchungsbereich, für welche $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ gilt, sind **relative Minima**

Die hier in Frage kommenden Werte x entnimmt man der Ziffer 4.2.

5.2. alle x im Untersuchungsbereich, für welche $f''(x) = 0$ gilt (und falls $f''(x)$ links und rechts von dieser Stelle unterschiedliches Vorzeichen hat), sind **Wendestellen**

Die hier in Frage kommenden Werte x entnimmt man der Ziffer 4.3.

5.3. alle Wendestellen, für die zusätzlich $f'(x) = 0$ gilt, sind **Terrassenpunkte**

Dazu vergleicht man die Ziffern 4.2. und 4.3. auf gemeinsame Werte x (Terrassenpunkt = Wendestelle mit horizontaler Tangente)

6. Verhalten im Unendlichen; Asymptoten

6.1. Untersuchung von $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$; Angabe eventueller Asymptoten

6.2. Senkrechte Asymptoten bei eventuellen Polen. Die hier in Frage kommenden Stellen x kann man gegebenenfalls der Ziffer 1.1. entnehmen.

7. Spezielle Punkte (bei Bedarf)

7.1. Durchgang des Graphen durch die f(x)-Achse: f(0)

7.2. Schnittpunkte des Graphen mit der Winkelhalbierenden des 1. bzw. des 2. Quadranten:
alle x im Untersuchungsbereich, für welche $f(x) = x$ (bzw. $f(x) = -x$) gilt

7.3. Je nach Bedarf weitere Punkte, z.B.:

- ausgewählte x-Werte, die für das vorgelegte Problem eine besondere Bedeutung haben
- Schnittpunkte mit günstig liegenden Geraden oder anderen Funktionskurven

8. Graphische Darstellung

8.1. Berechnung der Funktionswerte wo nötig

8.2. Zeichnung

Bsp 1: $f(x) = 0.5 \cdot x^3 - 1.5 \cdot x^2 - 2x + 6$

$f'(x) = 1.5 \cdot x^2 - 3x - 2$

$f''(x) = 3x - 3$

1.1. ganz $\mathbb{R}$

1.2. ganz $\mathbb{R}$

2. keine Periodizität

3.1. keine Symmetrie

3.2. keine Symmetrie

Untersuchungsbereich also : $\mathbb{R}$

4.1. $0.5 \cdot x^3 - 1.5 \cdot x^2 - 2x + 6 = 0$ hat die Lösungen: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$

4.2. $1.5 \cdot x^2 - 3x - 2 = 0$ hat die Lösungen: $x_4 = 2.53$; $x_5 = -0.53$

4.3. $3x - 3 = 0$ hat die Lösung: $x_6 = 1$

5.1. $f''(x_4) = 4.58 > 0 \rightarrow x_4$ ist ein Minimum

$f''(x_5) = -4.58 < 0 \rightarrow x_5$ ist ein Maximum

5.2. x_6 ist eine Wendestelle

5.3. keine Terrassenpunkte

6.1. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ existiert nicht

6.2. keine Pole

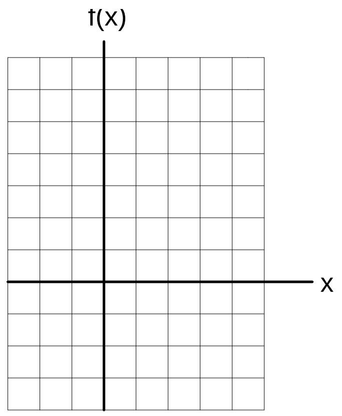
7.1. $f(0) = 6$

7.2. überflüssig, nicht durchgeführt

7.3. überflüssig, nicht durchgeführt

8.1. $f(x_4) = -0.56$; $f(x_5) = 6.56$; $f(x_6) = 3$

8.2. Zeichnung:



Weitere Beispiele zur Kurvendiskussion:

Bsp 2: $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2$

Bsp 3: $f(x) = \cos x + \cos(2x)$

Bsp 4: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$

Nun lässt sich mit den gleichen Hilfsmitteln auch umgekehrt die Funktionsgleichung einer gesuchten Funktion aus deren bekannten Eigenschaften ermitteln:

Bsp 5: Eine Potenzfunktion 4.Grades (mit einer Parabel 4.Grades als Graphen) habe in T(0/2) einen Terrassenpunkt und in E(6/9) einen Extremwert.
Wie lautet die Funktionsgleichung ?

Ansatz:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

Gesucht die fünf unbekannten Koeffizienten a, b, c, d und e.
Zu deren Bestimmung sind also fünf Gleichungen erforderlich.

Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} 1. & f(0) = 2 & \rightarrow & e = 2 \\ 2. & f'(0) = 0 & \rightarrow & d = 0 \\ 3. & f''(0) = 0 & \rightarrow & 2c = 0 \\ 4. & f(6) = 9 & \rightarrow & 1296a + 216b + 36c + 6d + e = 9 \\ 5. & f'(6) = 0 & \rightarrow & \underline{864a + 108b + 12c + d = 0} \end{array}$$

$\underline{e = 2}$; $\underline{d = 0}$; $\underline{c = 0}$

$$\begin{array}{rl} 1296a + 216b + 2 & = 9 \\ \underline{864a + 108b \phantom{{}+2}} & \underline{= 0} \\ -432a \phantom{{}+108b} + 2 & = 9 \end{array}$$

$\underline{a = -0.0162}$; $\underline{b = 0.1296}$

Also: $f(x) = -0.0162x^4 + 0.1296x^3 + 2$

Ein weiteres Beispiel:

Bsp 6: Eine Parabel 3.Grades hat in P(1/4) eine waagrechte Tangente und in Q(0/2) eine Wendestelle.
Wie heisst ihre Funktionsgleichung ?

§ 7 EXTREMWERTRECHNUNG

Zahlreiche Probleme der Mathematik und ihrer Anwendungen führen auf Fragen nach grössten und kleinsten Werten von Funktionen (sog. Extremwertsaufgaben).

Soweit es sich dabei um differenzierbare Funktionen einer Variabeln handelt, geben die Ziffern 4.2. und 5.1. in § 6 unmittelbar die Möglichkeit, solche Aufgaben zu lösen.

Im konkreten Fall geht man am besten so vor:

1. Von welcher Grösse ist der Extremwert gesucht ? → Funktion f

2. Von welchen variablen Grössen ist diese zu extremalisierende Funktion abhängig ? → Variabeln x,u,v,...

3. Lässt sich ein formelmässiger Zusammenhang zwischen der Funktion f und den Variabeln x,u,v,... (und den eventuell gegebenen konstanten Grössen) herstellen ?
   - wenn nein: die Aufgabe ist falsch gestellt!
   - wenn ja: Aufstellen der Funktionsgleichung → f(x,u,v,...) =

4. Wurden für f(x,u,v,...) insgesamt n Variabeln x,u,v,... benützt, müssen nun n - 1 Beziehungsgleichungen der Variabeln unter sich und der Variabeln mit den eventuell gegebenen konstanten Grössen der Aufgabe gefunden werden (sog. Nebenbedingungen Nb). → Nb
   Diese Nebenbedingungen müssen voneinander unabhängig sein. Gelingt dies nicht, so sind die Angaben der Aufgabe unvollständig und eine Lösung nicht möglich.

5. Mit Hilfe der n - 1 Nebenbedingungen werden nun in der Funktion f(x,u,v,...) alle Variabeln bis auf eine (die sog. Hauptvariable) eliminiert.
   Nach erfolgter Elimination bleibt also die Funktion f als Funktion einer einzigen Variabeln (z.B. x) übrig. → f(x)

6. Die Funktion f(x) wird abgeleitet und die Ableitung = 0 gesetzt. Daraus errechnet man die Extremwerte x_E → $f'(x) = 0 \rightarrow x_E$
   Falls nötig, kann die 2. Ableitung zur näheren Abklärung herangezogen werden
   → $f''(x_E) < 0 \rightarrow$ Max
   → $f''(x_E) > 0 \rightarrow$ Min

7. $f(x_E)$ wird berechnet, falls verlangt → $f(x_E)$

Bsp 1: Ein Rechteck habe den Umfang u = 24 [cm]. Wie sind seine Breite b und seine Länge a zu wählen, damit seine Fläche F maximal wird ?

1. Funktion: Fläche des Rechtecks : F
2. Variabeln: Breite b, Länge a
3. Es gilt: $F = b \cdot a$

4. Es wurden n = 2 Variabeln verwendet, also muss $n - 1 = 1$ Nebenbedingung gefunden werden, welche die beiden Variabeln a und b und die gegebene konstante Grösse u miteinander verbindet.
   Diese Nb ist natürlich: $2a + 2b = u = 24$

5. Aus dieser Nb ergibt sich z.B.: $b = 12 - a$ und daraus

   $F(a) = (12 - a) \cdot a = 12a - a^2$ mit a als Hauptvariable

   (genausogut wäre b als Hauptvariable möglich gewesen)

6. $F'(a) = 12 - 2a = 0 \;\rightarrow\; a_E = 6$
   (Da dies der einzige Extremwert ist, erübrigt sich eine weitergehende Untersuchung mit Hilfe der 2. Ableitung)

7. Die Fläche F wird also maximal, falls man a = 6 [cm]
   (und daher laut Nbauch $b = 12 - a = 6$ [cm]) wählt, also im Falle eines Quadrates.

   Die maximale Fläche misst: $F = F(a_E) = 36$ [cm^2]

Bsp 2: Von einem quadratischen Stück Karton der Seitenlänge s = 60 [cm] werden an allen vier Ecken kleine Quadrate der Seitenlänge x abgeschnitten und der verbleibende kreuzförmige Rest zu einer Schachtel gefaltet.
Wie gross muss x sein, damit die entstehende Schachtel einen möglichst grossen Inhalt hat ?

1. Funktion: Volumen der Schachtel : V
2. Variable: Strecke x
3. Es gilt: $V = (60 - 2x)^2 \cdot x$

4. Es wurde nur n = 1 Variable verwendet, also ist keine Nb nötig.

5. Direkt also : $V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x = 3600x - 240x^2 + 4x^3$

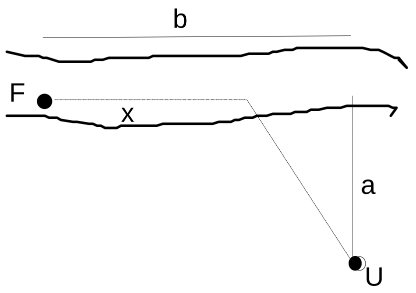
6. $V'(x) = 3600 - 480x + 12x^2 = 0$

   Die Lösungen der quadratischen Gleichung $12x^2 - 480x + 3600 = 0$
   sind: $x_1 = 30$ und $x_2 = 10$

   Aus anschaulichen Gründen ist sicher x = 10 [cm] der gesuchte Maximalwert (x = 30 [cm] hätte ja V = 0 zur Folge, also ein Volumenminimum).

7. Das Volumen V der Schachtel wird also maximal, wenn x = 10 [cm] gewählt wird und es beträgt V(10) = 16'000 [cm^3].

Bsp 3: Von einer Umformerstation U aus, die sich a = 500 [m] vom Ufer eines Flusses entfernt befindet, soll eine Leitung zu einer b = 1000 [m] flussabwärts am diesseitigen Ufer liegenden Fabrik F gelegt werden.
Die Kosten der Oberleitung über Land werden dabei pro [m] dreimal so hoch veranschlagt, wie das Führen des Kabels unter Wasser.
Wie weit von der Fabrik F entfernt liegt der Punkt am Flussufer, zu dem die Leitung geführt werden muss, wenn die Gesamtkosten minimal werden sollen ?



1. Funktion:
2. Variabeln:
3. Es gilt:
4. Anzahl der Variabeln : $\rightarrow$ Anzahl der Nebenbedingungen:

5. Es gilt:

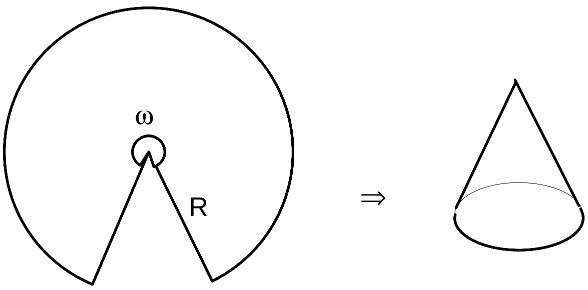
   Also lautet die Funktion:

6. Die Ableitung der Funktion ist demnach:

   Die Lösung der Gleichung ist:

7. Die Kosten sind minimal falls:

Bsp 4: Aus einer Kreisscheibe aus Papier ist ein Sektor auszuschneiden, der so zu einem Kreiskegel gerollt werden kann, dass das Kegelvolumen möglichst gross wird.
Gegeben Radius R, gesucht ω.



1. Funktion:
2. Variabeln:
3. Es gilt:

4. Anzahl der Variabeln : $\rightarrow$ Anzahl der Nebenbedingungen:

5. Es gilt:

   Also lautet die Funktion:

6. Die Ableitung der Funktion ist demnach:

   Die Lösung der Gleichung ist:

7. Das Volumen wird maximal falls:

Bsp 5: Eine Tunnelröhre hat den Querschnitt einer Halbellipse. Sie soll verschiedene Fahrbahnen aufnehmen, deren Gesamtbreite c = 30 [m] misst. Die Höhe des Tunnels über der gesamten Fahrbahnbreite soll mindestens h = 6 [m] betragen.
Welche Abmessungen (grosse und kleine Halbachse) muss die genannte Halbellipse haben, damit die Querschnittsfläche des Tunnels minimal ist ?
(Fläche der Ellipse: $F = ab\pi$, wobei a und b die Halbachsen der Ellipse).

1. Funktion:
2. Variabeln:
3. Es gilt:

4. Anzahl der Variabeln: $\rightarrow$ Anzahl der Nebenbedingungen:

5. Es gilt:

   Also lautet die Funktion:

6. Die Ableitung der Funktion ist demnach:

   Die Lösung der Gleichung ist:

7. Die Fläche wird minimal falls:

Bsp 6: Zwei Kreise mit Radius r = 1 werden so übereinander geschoben, dass das Peripheriebogenstück des einen Kreises, das innerhalb des anderen Kreises liegt, maximale Länge hat.
Wie weit sind die beiden Kreiszentren voneinander entfernt ?

1. Funktion:
2. Variabeln:
3. Es gilt:

4. Anzahl der Variabeln: $\rightarrow$ Anzahl der Nebenbedingungen:

5. Es gilt:

   Also lautet die Funktion:

6. Die Ableitung der Funktion ist demnach:

   Die Lösung der Gleichung ist:

7. Das Bogenlänge wird maximal falls:

Übungen zu § 1

1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Beschränktheit und Monotonie:

a) $f(x) = 4 - x^2$; Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

b) $f(x) = 5 + \frac{1}{x}$; Definitionsbereich: $\mathbb{R}^+$

c) $f(x) = 3^x$; Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$; Definitionsbereich: $\mathbb{R}^+$

2. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{11^x}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{3x+5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}$

e) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^4}{6x^3+12x^2+6x+25}$

f) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{6}{x^3-7x}$

g) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x-3}{x^2}$

h) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2-3x+2}{5x^2+7x-5}$

3. Untersuchen Sie $f(x) = \left| \begin{array}{lll} x & \text{für} & x < 2 \\ x+1 & \text{für} & x \geq 2 \end{array} \right.$ an der Stelle x = 2

4. Untersuchen Sie $f(x) = \frac{3x-9}{2x-6}$ an der Stelle x = 3

5. Untersuchen Sie $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ an der Stelle x = 4

6. Untersuchen Sie $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ an der Stelle x = -1

7. Untersuchen Sie $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ an den Stellen x = -3, -2, 0, 1, 5

8. Untersuchen Sie $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{x^3 - 3x^2 + 4}$ an den Stellen x = -1, 1, 2 und 3

9. Untersuchen Sie $f(x) = 2^{1/x}$ an der Stelle x = 0

10. Untersuchen Sie $f(x) = 2^{-1/x^2}$ an der Stelle x = 0

11. Suchen Sie selbst eventuelle Unstetigkeiten und klassieren Sie diese:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 20x + 24}{2x^3 - 10x^2 + 16x - 8}$

Übung zu § 2

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung von $f(x) = x^3$

Übungen zu § 3

1. Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = 13x^5$

2. Bestimmen Sie die Ableitung von $g(t) = -5t^4 + 4t^3 - 2t + 8$

3. Wie gross ist die Steigung der Kurve von $f(x) = x^4$ an der Stelle $x = -1$?

4. An welchen Stellen x hat die Funktion $f(x) = x^3$ die Steigung 6 ?

5. An welchen Stellen x hat die Funktion $f(x) =x^4$ die Steigung -2 ?

6. An welcher Stelle x hat die quadratische Parabel $f(x) = -3x^2 + 12x + 5$ ihren Scheitel ?

7. Bestimmen Sie die Ableitung von $f(t) = x^2 - 5xt$

8. Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{5x^2 - 13x + 2}{2a}$

9. Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = (2x - 1)^3$

10. An welcher Stelle x hat die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 8$ eine horizontale Tangente ?
    An welcher Stelle x ist die Steigung der Funktionskurve gerade $m = 1$?

11. Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ so, dass die Steigung der Funktionskurve im Punkt P(2/14) gleich $m = 5$ ist unddie Kurve ausserdem durch den Nullpunkt des Koordinatensystems läuft.

12. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen eines gleichförmig beschleunigten Körpers, von dem bekannt ist, dass er zur Zeit t = 3 [s] die Wegmarke "70 [m]" mit der Geschwindigkeit von 9 [ms^{-1}] passiert und in der darauffolgenden Sekunde genau 10 [m] zurücklegt.

13. Ein Fahrzeug bewegt sich zum Zeitpunkt t = 0 mit einer Geschwindigkeit v = 25 [ms^{-1}] am Wegpunkt s = 0 [m] vorbei. Seine Beschleunigung ist von der Zeit abhängig und zwar beträgt sie $a(t) = 20 - t^2$ [ms^{-2}]

    a) Zu welchem Zeitpunkt t ist die Beschleunigung gleich 0 ?
    b) Wie gross ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 3 [s] und welcher Weg wurde in diesen ersten drei Sekunden zurückgelegt ?
    c) Welcher Weg wird in der 4. Sekunde zurückgelegt ?
    d) Welches ist die Durchschnittsgeschwindigkeit der ersten vier Sekunden ?
    e) Wo und nach Ablauf welcher Zeit gelangt das Fahrzeug zum Stillstand ?
    f) Wann erreicht das Fahrzeug seine Maximalgeschwindigkeit ?

Übungen zu § 4

1. Leiten Sie die folgenden Funktionen ab:

a) $f(x) = (x^2 - 3x)\cdot(1 + x)$

b) $f(x) = (2x^3 - x^2 + 4)(3 - x^2)$

c) $g(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$

d) $h(t) = \dfrac{t^4}{3t-5}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot (1-x^2)}{2x+1}$

f) $s(u) = (1-2u+u^2)\cdot(2u-5)$

g) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+1}{2x^2-8x}$

2. Verketten Sie die folgenden Funktionen:

a) $g(x) = \ln x$; $f(u) = u^2$ $\rightarrow$ $f[g(x)] =$

b) $g(x) = \sqrt{x}$; $f(u) = e^u$ $\rightarrow$ $f[g(x)] =$

3. Zerlegen Sie die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ innere Fkt.: äussere Fkt.:

b) $f(x) = \log(\tan x)$ innere Fkt.: äussere Fkt.:

c) $g(p) = \sin^2 p$ innere Fkt.: äussere Fkt.:

d) $g(p) = \sin p^2$ innere Fkt.: äussere Fkt.:

e) $k(z) = e^{\cos\sqrt{z}}$ innere Fkt.: mittlere Fkt.: äussere Fkt.:

4. Leiten Sie ab:

a) $f(x) = (x^2 - 6x + 7)^2$

b) $f(x) = (5x^2 + x)^3$

c) $h(t) = t^4\cdot(1 - t^2)^2$

d) $f(x) = \dfrac{(5-3x)^2}{x^3-1}$

Übungen zu § 5

Leiten Sie ab:

1. allgemeine Potenzfunktionen

a) $z(u) = (1 - 3u^3)\cdot(6 - \frac{1}{u})^2$

b) $k(x) = \frac{1}{(5x-2)^2}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

f) $g(z) = \sqrt{3z-1}$

g) $g(t) = \sqrt{t^3 + 8t}$

h) $h(x) = x \cdot \sqrt[4]{x}$

i) $g(u) = \sqrt[3]{2u+1}$

j) $f(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$

k) $s(t) = \frac{2t}{\sqrt{1+2t}}$

l) $f(x) = \sqrt{(x+1)^3}$

2. Winkelfunktionen

a) $f(x) = 5\cdot\sin x$

b) $f(x) = \sin(5x)$

c) $s(t) = a\cdot\sin(\omega t)$

d) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

e) $g(z) = \sin(z^2)$

f) $g(z) = \sin^2 z$

g) $p(y) = y\cdot\cos y$

h) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

i) $h(p) = [\sin p - \cos p]^2$

j) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

k) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

m) $f(z) = \tan^2(3z)$

3. Exponential- und Logarithmusfunktionen

a)	$f(x) = e^{3x}$	b)	$f(x) = e^{x^2}$
c)	$g(t) = e^{\sqrt{t}}$	d)	$p(z) = e^{\sin z}$
e)	$z(y) = 13^{2y}$	f)	$f(y) = e^{x} \cdot \sin x$
g)	$f(x) = 7^{x}$	h)	$f(x) = \ln(1 + x^2)$
i)	$g(u) = \ln\sqrt{4u-5}$	j)	$f(x) = \sqrt{\ln x}$
k)	$f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$		

4. Arcusfunktionen

a)	$f(x) = \arcsin(1 - x)$	b)	$f(x) = \arccos\sqrt{x}$
c)	$g(t) = t \cdot \arcsin t$	d)	$h(z) = \sqrt{\arccos z}$
e)	$f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x}$	f)	$f(x) = \arctan(5x)$
g)	$f(x) = \dfrac{x}{\arctan x}$	h)	$f(x) = \ln(\arcsin x)$

Übungen zu § 6

1. Gegeben die Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 1$

   Wo ist der Graph von f(x) im Bereich $-3 \leq x \leq +3$ am steilsten ?

2. Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremwerte und Wendestellen der Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

3. Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremwerte und Wendestellen der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

4. Gegeben die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

   a) Bestimmen Sie den Untersuchungsbereich

   b) Bestimmen Sie die Nullstellen

   c) Suchen Sie eventuelle Extremwerte und Wendestellen

   d) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen

5. Gegeben die Funktion $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

   Bestimmen Sie eventuelle Unstetigkeiten, die Nullstellen, die Extremwerte und allfällige Wendestellen.

   Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der 1. und der 2. Winkelhalbierenden und skizzieren Sie den Graphen.

6. Diskutieren Sie die folgende Funktion:

   $g(t) = 5 \cdot e^{-0.1 \cdot t} \cdot \sin t$ (gedämpfte Schwingung)

7. Gesucht ist eine Funktion 4. Grades, welche an den Stellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ je den Funktionswert 3 hat und deren 2. Ableitung $f''(x) = 12x^2 - 4$ lautet.

8. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der folgenden Funktion:

   Eine Parabel 4.Grades hat in O(0/0) einen Terrassenpunkt, an der Stelle x = 6 einen Extremwert und ausser in O(0/0) eine weitere Nullstelle, wo der Graph der Funktion eine Steigung von m = - 8 aufweist.

9. Ein Rad mit dem Radius r rollt auf einer Geraden. Der Winkel ω, um welchen sich das Rad in der Zeit t dreht, werde durch $\omega(t) = t + t^2/2$ bestimmt.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Radmittelpunktes

a) allgemein als Funktion von t

b) zum Zeitpunkt t = 10 [s]

10. Ein ungedämpfter sinusförmiger Schwingungsvorgang wird allgemein durch die Funktion

$a(t) = b \cdot \sin(ct + d)$

für die Auslenkung a(t) in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben.

Wie sind die Konstanten b, c und d zu wählen, damit

- die Auslenkung zur Zeit t = 0 [s] gerade 5 [cm] beträgt
- die maximale Auslenkung 10 [cm] misst
- die Schwingungsdauer 12 [s] ist.

11. Die Gleichung $y^2 = x^3 - x$ stellt eine Kurve 3. Grades aus der analytischen Geometrie dar.

Stellen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen, die Extremwerte, allfällige Wendestellen und die Schnittpunkte mit der 1. und der 2. Winkelhalbierenden fest.

Skizzieren Sie die Kurve.

12. Bestimmen Sie diejenige Parabel 4.Grades, welche mit g(x) = cos x an der Stelle x = 0 im Funktionswert und in den ersten vier Ableitungen übereinstimmt.
Prüfen Sie nach, inwieweit diese Potenzfunktion als Ersatz für die Cosinusfunktion im Bereich von x = 0 bis x = $\pi/2$ gebraucht werden kann.

13. Gegeben der Funktionsansatz $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx^2 + d}$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c und d der Funktion f(x) so, dass:

- f(x) an der Stelle x = 1 einen Pol aufweist
- f(x) im Punkte P(2/-0.25) einen Extremwert hat
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.25$ ist

Übungen zu § 7

1. Aus einem 120 cm langen Draht ist das Kantenmodell eines Quaders herzustellen, so dass die längste Kante dreimal so lang ist wie die kürzeste und so, dass das Volumen des dargestellten Quaders möglichst gross wird.

2. Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypothenuse c = 6 [cm] erzeugt einen Kegel mit maximalem Volumen, wenn es um eine seiner Katheten rotiert ?

   Wie gross ist dieses maximale Volumen ?

3. Ein Fenster habe die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem gleichseitigem Dreieck.
   Der totale Umfang des Fensters messe U = 8.54 [m].

   Für welche Dimensionen des Rechtecks wird der Flächeninhalt des Fensters maximal ?

4. Bestimmen Sie die Abmessungen eines offenen Bassins mit quadratischer Grundfläche, das ein Volumen von 32 [m^3] haben soll, wenn für den Anstrich der Wände und des Bassinbodens möglichst wenig Farbe verbraucht werden soll.

5. Welche Dimensionen (Grundkreisradius r, Höhe h) muss eine zylindrische Blechbüchse erhalten, wenn sie 1 Liter fassen soll und wenn der Materialaufwand möglichst klein sein soll ?

6. Dem Abschnitt der quadratischen Parabel P: $y = -0.25 \cdot x^2 + 6$, der oberhalb der x-Achse liegt, ist ein Rechteck mit

   a) möglichst grossem Umfang

   b) möglichst grosser Fläche

   einzubeschreiben.

7. Welcher Punkt auf der Parabel $f(x) = -5x^2 + 5$ hat vom Punkt O(0/0) minimalen Abstand und wie gross ist dieser ?

8. Zerlegen Sie die Zahl 900 so in drei Summanden, dass der zweite Summand doppelt so gross wie der erste und dass das Produkt aller drei Summanden möglichst gross wird.

9. Für welche positive Zahl ist die Differenz zwischen ihrer Quadratwurzel und ihrem natürlichen Logarithmus minimal ?

10. Zwei Autos bewegen sich rechtwinklig zueinander auf eine Strassenkreuzung zu. Das erste Auto bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v_1 = 15$ [ms^{-1}] und befindet sich zum Zeitpunkt t = 0 noch 35 [m] von der Kreuzung entfernt; das zweite Auto bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v_2 = 20$ [ms^{-1}] und ist zur Zeit t = 0 noch 30 [m] von der Kreuzung entfernt.

Nach Ablauf welcher Zeit t ist die gegenseitige Entfernung der beiden Autos minimal ?
Wie gross ist diese minimale Entfernung ?

11. Einem Halbkreis mit Radius r = 16 [cm] ist ein möglichst grosses gleichschenkliges Trapez einzubeschreiben. Berechnen Sie dessen Abmessungen.

12. Aus einem zylindrischen Stamm des Durchmessers D soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt so geschnitten werden, dass die Tragfähigkeit T möglichst gross wird. (Hinweis: die Tragfähigkeit T ist proportional zur Breite und proportional zum Quadrat der Höhe des Balkenquerschnitts).

13. Beim Bau eines Hochhauses werden Grundkosten für Land, Gebühren, Erschliessung, Bewilligungsverfahren etc. von a Fr. angenommen. Das unterste Stockwerk koste in der Erstellung b Fr., jedes weitere Stockwerk koste c Fr. mehr, als das unmittelbar unter ihm liegende. Pro Stockwerk werden jährlich d Fr. an Mietzinsen eingehen.

Für welche Stockwerkzahl n wird die Rendite R (das heisst der Quotient von jährlichen Einnahmen und Gesamtausgaben) maximal ?

a) Lösen Sie die Aufgabe allgemein

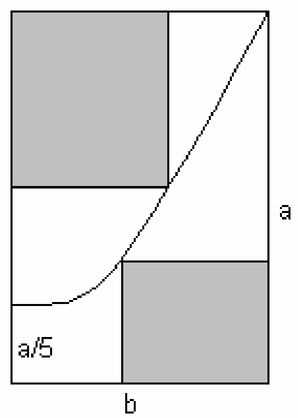
b) Setzen Sie für a, b, c und d anschliessend selbst vernünftige Zahlenwerte ein.

14. Zwei Korridore der Breiten a = 2.4 [m] und b = 1.8 [m] stossen rechtwinklig aufeinander. Welche Länge darf eine Leiter höchstens haben, damit man sie horizontal um die Ecke tragen kann ?

15. Eine Glasscheibe der Länge a = 50 [cm] und der Breite b = 30 [cm] hat einen parabelförmigen Sprung (wie auf nebenstehender Skizze zu sehen ist).

Aus den beiden Teilen soll nun je noch eine möglichst grosse rechteckige Scheibe geschnitten werden.

Berechnen Sie die Dimensionen der Scheiben in beiden Fällen.



16. Eine Last mit dem Gewicht G, die auf einer horizontalen Ebene liegt, soll durch eine im Schwerpunkt angreifende Kraft F weggerückt werden. Der Reibungskoeffizient betrage $\mu = 0.25$.

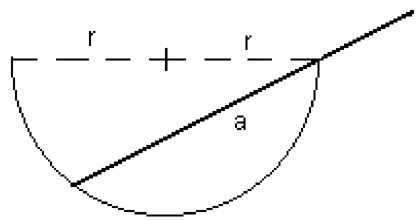
Unter welchem Winkel α muss die Kraft F gegen die Horizontale geneigt sein, damit man sie so klein wie möglich halten kann ?

17. Eine Statue der Höhe h = 6.22 [m] steht auf einem Sockel der Höhe s = 2.15 [m].

Aus welcher Distanz d sieht ein Betrachter mit der Augenhöhe a = 1.65 [m] die Figur unter einem maximalen Blickwinkel ?

18. In einer halbkugelförmigen Schale mit Radius r liegt ein Stäbchen der Länge a ($2r < a < 3r$).

Bei welcher Lage des Stäbchens liegt sein Schwerpunkt S (= Mittelpunkt) am tiefsten (Gleichgewichtslage) ?



19. Der Querschnitt eines Kanals ist ein gleichschenkliges Trapez. Pro Sekunde fliesst eine Wassermenge von Q = 10 [m^3] durch diesen Querschnitt. Die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers beträgt v = 1 [ms^{-1}].

Wie gross muss die Basis x des Trapezes sein, wenn dessen Höhe h = 2 [m] betragen und die Kontaktfläche des Wassers mit dem Kanal minimal sein soll ?

20. Der Ellipse E: $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ soll das grösstmögliche Rechteck einbeschrieben werden.

Wie verhält sich die Fläche dieses Rechtecks zu der der Ellipse ?

21. Man beschreibe der liegenden Parabel P: $y^2 = 4x$ im Flächenabschnitt zwischen x = 0 und x = 4 das grösstmögliche Trapez ein.

22. In einem zweidimensionalen Koordinatensystem ist der Punkt P(8/2) gegeben. Bestimmen Sie die Steigung m derjenigen Geraden durch P, für welche der im ersten Quadranten liegende Abschnitt möglichst kurz ist.

BERNER FACHHOCHSCHULE

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR BURGDORF

ABTEILUNG ARCHITEKTUR

MATHEMATIK : VORLESUNG 3

KOMBINATORIK
WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
STATISTIK

COPYRIGHT 2007: AMTSNACHFOLGER DES COPYRIGHTBESITZERS 2001

COPYRIGHT 2001: B. GYSLER, DIPL. MATHEMATIKER

PROFESSOR AN DER HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR

3. AUFLAGE, 2001, BURGDORF, SCHWEIZ

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1 EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG

Zu einem realen, konkreten Experiment soll ein theoretisches Modell entwickelt werden, welches das Experiment simuliert und derart Einblick über dessen Gesetzmässigkeiten in der Weise erlaubt, dass daraus Prognosen über die zu erwartenden Resultate abgeleitet werden können.

Dies geschieht im Wesentlichen in drei Schritten:

1. Es wird untersucht, wieviele mögliche Resultate das Experiment überhaupt haben kann, wobei es unter Umständen aus Gründen der Übersichtlichkeit nötig sein wird, diese Einzelresultate in Kategorien zusammenzufassen.

   Die entsprechenden Abzählverfahren sind Gegenstand der **Kombinatorik** und sind im § 2 dargestellt.

2. Für diese Resultate oder Kategorien von Resultaten wird die Häufigkeit ihres Eintretens aufgrund theoretischer Überlegungen oder mittels konkreter Messungen provisorisch festgelegt.

   Die dazu benötigten Hilfsmittel werden in der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** entwickelt und sind in § 3 und § 4 dargestellt.

3. Im Vergleich der Resultate, welches das so entwickelte Modell prognostiziert, mit den Resultaten, welche beim realen Experiment beobachtet werden, wird die Güte des Modells beurteilt und gegebenfalls Vorschläge für eine Verbesserung des Modells gemacht.

   Die entsprechenden Testverfahren zu formulieren und deren Erkenntnisse in das Modell zu integrieren ist Gegenstand der **Statistik** und wird in den § 5 - § 8 diskutiert.

Bsp 1: Auf wieviele Arten lässt sich ein Lottozettel (6 aus 45) ausfüllen ?

1. Das Experiment “Ausfüllen eines Lottozettels“ hat 8'145'060 mögliche Resultate.

2. Aufgrund der Tatsache, dass die Lottokugeln kein Gedächtnis haben und unter der Voraussetzung, dass die Maschine, mit der die Kugeln gezogen werden, einwandfrei funktioniert, kann man davon ausgehen, dass alle 8'145'060 möglichen Resultate gleich häufig sind.

3. Man prognostiziert, dass die Wahrscheinlichkeit pro Tip im Lotto einen Sechser zu haben, bei p = 0.000000123 (das heisst bei etwa 1: 8 Millionen) liegt
(Sollte dies signifikant nicht den gemachten Beobachtungen entsprechen, so müsste entweder die Maschine für die Ziehung revidiert oder die Justiz eingeschaltet werden.

Bsp 2: Eine Münze wird geworfen.

1. Dises Experiment hat 2 mögliche Resultate: “Kopf“ und “Zahl“.

2. Durch physikalische Untersuchungen der durch die unterschiedlichen Prägungen auf den beiden Seiten der Münze verursachten Verteilung der Masse beurteilt man, dass in 100 Versuchen 48 mal “Kopf“ und 52 mal “Zahl“ erscheinen wird.

3. Man sagt voraus, dass die Wahrscheinlichkeit für “Zahl“ 52% betragen wird.

§ 2 KOMBINATORIK

Die Kombinatorik befasst sich mit den Möglichkeiten der Auswahl und der Anordnung von Elementen aus einer gegebenen Grundmenge und gibt dafür verschiedene Abzählverfahren an.

Die Fragestellung lautet allgemein:

Auf wieviele Arten lassen sich aus n Elementen deren r auswählen und auf wieviele Arten lassen sich diese Elemente gegebenfalls in unterschiedlicher Reihenfolge anordnen ?

Dabei unterscheidet man einerseits zwischen solchen Anordnungen und Auswahlen, bei denen einzelne Elemente mehrfach vorkommen können, und solchen, bei denen jedes Element höchstens einmal in der Auswahl vorkommen darf.

Andererseits ist zu unterscheiden zwischen Auswahlen, in denen die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Auswahl als Unterscheidungsmerkmal berücksichtigt wird, und solchen, bei denen die Reihenfolge keine Rolle spielt und daher kein Unterscheidungsmerkmal bildet.

1. Anordnungen und Auswahlen ohne Wiederholung

Die einzelnen Elemente der Grundmenge dürfen in einer Anordnung oder einer Auswahl höchstens einmal vorkommen.

Man unterscheidet generell 3 Arten solcher Anordnungen:

1. 1. Permutationen ohne Wiederholung

Def 1: Unter den Permutationen ohne Wiederholung von n Elementen versteht man die verschiedenen Möglichkeiten, alle n Elemente anzuordnen.
Da bei einer Permutation immer alle Elemente angeordnet werden müssen, unterscheiden sich die einzelnen Anordnungen nur durch die Reihenfolge der Elemente voneinander.

Satz1: Die Anzahl F(n) der möglichen Permutationen ohne Wiederholung von n Elementen ist:

$$F(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \,.....\, \cdot n = n!$$

Not : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \,.....\, \cdot n$ ist eine Abkürzung und wird als "n Fakultät" bezeichnet.

Bsp 1: Die 4 Elemente a,b,c,d lassen also F(4) = 1·2·3·4 = 4! = 24 Permutationen zu, nämlich:

abcd,abdc,acbd,acdb,adbc,adcb,bacd,badc,bcad,bcda,bdac,bdca,
cabd,cadb,cbad,cbda,cdab,cdba,dabc,dacb,dbac,dbca,dcab,dcba

Im Rechner findet man F(n) unter:

Bsp 2: Auf wieviele Arten können 8 Personen nebeneinander in einer Reihe stehen ?

Auf F(8) = 8! = 40'320 Arten.

1. 2. Variationen ohne Wiederholung

<u>Def 2</u>: Unter den <u>Variationen</u> von n Elementen zur Klasse r ohne Wiederholung versteht man alle Möglichkeiten, aus den n Elementen deren r auszuwählen.

Zwei Auswahlen gelten dabei als voneinander verschieden, wenn sie sich durch ihren <u>Inhalt</u> oder - bei gleichem Inhalt - durch die <u>Reihenfolge</u> der Elemente innerhalb der Auswahl unterscheiden.

<u>Satz2</u>: Die Anzahl P(n,r), der möglichen Variationen ohne Wiederholung von n Elementen zur Klasse r ist:

$$P(n,r) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ \dots\ \cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Bsp 3: Die 5 Elemente p,q,r,s,t lassen also P(5,2) = 120/6 = 20 verschiedene Zweiergruppen zu, nämlich:

pq,pr,ps,pt,qp,qr,qs,qt,rp,rq,rs,rt,sp,sq,sr,st,tp,tq,tr,ts

Im Rechner findet man P(n,r) unter:

Bsp 4: Vier verschiedene Aufgaben sollen von vier verschiedenen Studenten aus einer zwanzigköpfigen Klasse gelöst werden.
Auf wieviele unterschiedliche Arten kann man die Aufgaben zuteilen ?

Es gibt P(20,4) = 116'280 Möglichkeiten.

1. 3. Kombinationen ohne Wiederholung

Def 3: Unter den Kombinationen von n Elementen zur Klasse r ohne Wiederholung versteht man alle Möglichkeiten, aus den n Elementen deren r auszuwählen.

Zwei Auswahlen gelten dabei nur dann als verschieden, wenn sie sich inhaltlich unterscheiden, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge.

Satz3: Die Anzahl C(n,r) der möglichen Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen zur Klasse r ist:

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r}$$

Not : $\binom{n}{r}$ ist eine Abkürzung und wird als "n tief r" bezeichnet.

Bsp5 : Die 5 Elemente v,w,x,y,z lassen also C(5,3) = 120/12 = 10 verschiedene Dreiergruppen zu, nämlich:

vwx,vwy,vwz,vxy,vxz,vyz,wxy,wxz,wyz,xyz

Im Rechner findet man C(n,r) unter:

Bsp 6: Wieviele verschiedene aus 9 Karten bestehende Blätter kann man bei einem "Schieber" erhalten ?

Wieviele dieser Blätter enthalten

a) alle 4 Bauern ?
b) mindestens ein Dreiblatt ?
c) die 5 höchsten Trümpfe irgendeiner Farbe ?

Im Ganzen gibt es C(36,9) = 94'143'280 Möglichkeiten der Zuteilung.

Davon enthalten

a) C(32,5) = 201'376 alle 4 Bauern (entspricht 0.21 %)
b) 28·C(33,6) = 31'011'904 mindestens irgendein Dreiblatt (entspricht 32.94 %)
c) 4·C(31,4) = 125'860 die 5 höchsten Karten (entspricht 0.13 %)

2. Anordnungen und Auswahlen mit Wiederholung

Wenn die Elemente in einer Anordnung oder einer Auswahl mehrfach vorkommen können, spricht man von einer Anordnung mit Wiederholung.

Natürlich gibt es auch unter den Anordnungen mit Wiederholung einzelne Gruppen ohne mehrfache Elemente. Um Anordnungen ohne Wiederholung handelt es sich jedoch nur, wenn in keiner der möglichen Anordnungen oder Auswahlen mehrfach auftretende Elemente vorkommen.

Auch hier unterscheidet man 3 Arten von Anordnungen:

2. 1. Permutationen mit Wiederholung

Def 4: Unter den Permutationen mit Wiederholung von insgesamt n Elementen, worunter sich p bzw. q bzw. r etc. unter sich gleiche Elemente befinden, versteht man die verschiedenen Möglichkeiten, alle n Elemente anzuordnen.

Die einzelnen Anordnungen unterscheiden sich also nur durch die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Anordnung.
Die Anzahl der Wiederholungen eines einzelnen Elements ist genau vorgeschrieben.

Satz4: Die Anzahl F*(n;p,q,..) der Permutationen mit Wiederholung von n Elementen worunter je p, q, r, ... gleiche sind, ist:

$$F^*(n;\, p,\, q,\, r \,....) = \frac{n!}{p!\cdot q!\cdot r!\cdot ....}$$

Bsp 7: Die 5 Elemente a,a,b,b,b lassen also 5!/(2!·3!) = 10 Permutationen zu, nämlich:

aabbb,ababb,abbab,abbba,baabb,babab,babba,bbaab,bbaba,bbbaa

Bsp 8: Drei weisse und vier schwarze Kugeln sollen in eine Reihe gelegt werden.
Auf wieviele Arten ist dies möglich ?

Auf F*(7;4,3) = 35 Arten.

2. 2. Variationen mit Wiederholung

Def 5: Unter den Variationen mit Wiederholung von n Elementen zur Klasse r versteht man alle Möglichkeiten, aus den n Elementen deren r auszuwählen, wobei in einer solchen Auswahl die Elemente beliebig oft (höchstens r mal natürlich) auftreten dürfen.

Zwei Auswahlen gelten als verschieden, wenn sie sich durch ihren Inhalt oder - bei gleichem Inhalt - durch die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Auswahl voneinander unterscheiden.

Satz5: Die Anzahl P*(n,r) der Variationen mit Wiederholung von n Elementen zur Klasse r ist:

$$P^*(n,r) = n^r$$

Bsp 9: Die 4 Elemente p,q,r,s erlauben also $P^*(4,3) = 4^3 = 64$ verschiedene Dreiergruppen, nämlich:

ppp,ppq,ppr,pps,pqp,pqq,pqr,pqs,prp,prq,prr,prs,psp,psq,psr,pss,
qpp,qpq,qpr,qps,qqp,qqq,qqr,qqs,qrp,qrq,qrr,qrs,qsp.qsq,qsr,qss,
rpp,rpq,rpr,rps,rqp,rqq,rqr,rqs,rrp,rrq,rrr,rrs,rsp,rsq,rsr,rss,
spp,spq,spr,sps,sqp,sqq,sqr,sqs,srp,srq,srr,srs,ssp,ssq,ssr,sss

Bsp 10: Wieviele vierbuchstabige "Wörter" lassen sich aus den 26 Buchstaben des Alphabets bilden ?

Es gibt P*(26,4) = 456'976 mögliche Wörter.

2. 3. Kombinationen mit Wiederholung

Def 6: Unter den Kombinationen mit Wiederholung von n Elementen zur Klasse r versteht man alle Möglichkeiten, aus den n Elementen deren r auszuwählen, wobei in einer solchen Auswahl die Elemente beliebig oft (höchstens r mal natürlich) vorkommen dürfen.

Zwei Auswahlen gelten nur dann als verschieden, wenn sie sich in ihrem Inhalt - ohne Berücksichtigung der Reihenfolge - unterscheiden.

Satz6: Die Anzahl C*(n,r) der Kombinationen mit Wiederholung von n Elementen zur Klasse r ist:

$$C^*(n,r) = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\cdot r!}$$

Bsp 11: Die 5 Elemente v,w,x,y,z lassen genau 7!/(4!·3!) = 35 verschiedene Dreiergruppen zu, nämlich:

vvv,vvw,vvx,vvy,vvz,vww,vwx,vwy,vwz,vxx,vxy,vxz,vyy,vyz,vzz,www,wwx,
wwy,wwz,wxx,wxy,wxz,wyy,wyz,wzz,xxx,xxy,xxz,xyy,xyz,xzz,yyy,yyz,yzz,
zzz

Bsp 12: Wieviele verschiedene Wurfbilder sind mit 4 gleichfarbigen Würfeln möglich ?

Es gibt C*(6,4) = 126 Möglichkeiten.

(Wären die Würfel verschiedenfarbig, so wären es P*(6,4) = 1'296)

3. Ergänzungen

3. 1. Binomischer Lehrsatz

Satz7: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

Bsp 13: $(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$

$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

3. 2. Stirling'sche Näherung

Satz8: Für grosse n gilt näherungsweise:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

beziehungsweise:

$$\log(n!) \approx n\cdot(\log n - \log e) + 0.5\cdot(\log 2\pi n)$$

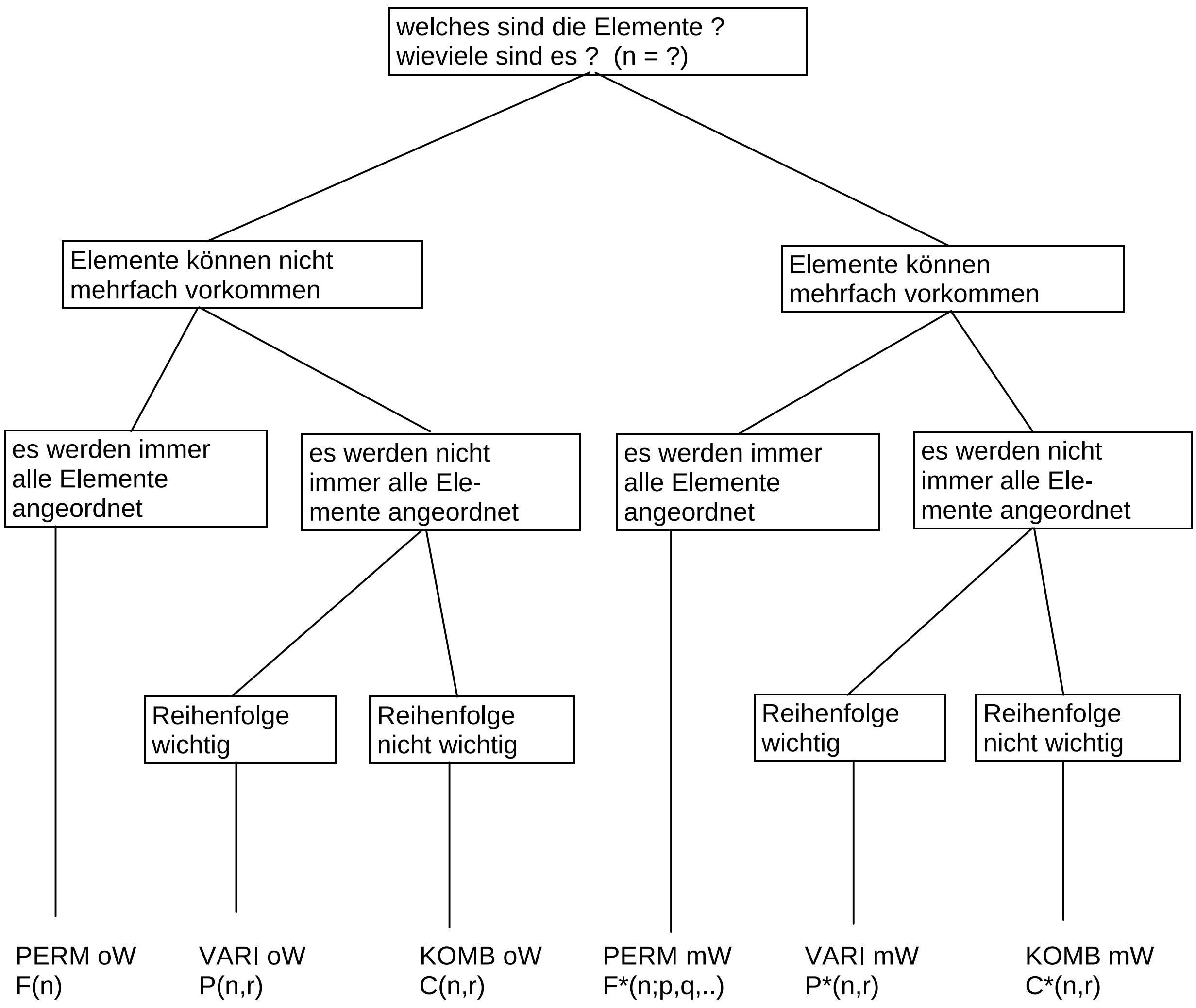
Bsp 14: $\log 200! \approx 200\cdot(\log 200 - \log e) + 0.5\cdot(\log 400\pi) = 374.8967$

das heisst:

$200! \approx 10^{374.8967} = 10^{0.8967}\cdot 10^{374} = 7.88\cdot 10^{374}$

3. 3. Zusammenfassendes Schema

Das untenstehende Schema soll die Uebersicht über die einzelnen Anordnungsarten erleichtern:



§ 3 MATHEMATISCHE MODELLE ZU EXPERIMENTEN

Die Formulierung eines mathematischen Modells zu einem realen Experiment geschieht in zwei Schritten:

Zunächst wird abgeklärt, welche Resultate das reale Experiment überhaupt haben kann. Dabei kann die Kombinatorik entsprechende Hilfe leisten.

Das "Verzeichnis" aller dieser Resultate (die Liste kann unter Umständen unendlich lang werden), bezeichnet man als Ereignisraum.

Anschliessend wird jedem dieser Resultate die Wahrscheinlichkeit zugeordnet, mit der es auftritt. Diese Funktion, die jedem möglichen Resultat des Experiments eine Zahl zuordnet, nennt man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten zu den einzelnen Resultaten des Experiments ist der entscheidende Schritt. Sie kann aufgrund theoretischer Ueberlegungen aber auch durch konkrete Messungen - zum Beispiel durch Feststellen der Eintretenshäufigkeit in einer genügend langen Testserie - erfolgen.

1. Ereignisräume und Ereignisse

Def 1: Ein Ereignisraum S für ein Experiment ist eine Menge, die als Elemente alle möglichen Resultate des Experiments genau einmal enthält.

Bem : Jedes Element von S entspricht also einem tatsächlich realisierbaren Resultat des Experiments (S enthält keine überflüssigen Elemente).

Verschiedene Resultate des Experiments können dabei durchaus durch das gleiche Element aus S dargestellt werden, hingegen dürfen nicht zwei verschiedene Elemente aus S das gleiche Resultat des Experiments darstellen.

Bsp 1: Zwei verschiedenfarbige Würfel werden geworfen. Dabei gibt es P*(6,2) = 36 verschiedene Resultate, nämlich:
11,12,13,14,15,16,21,22, ... ,64,65,66.

Dann ist:

S = {11,12,13,14,15,16,21,22, ... ,64,65,66} ein möglicher Ereignisraum.

Natürlich wäre auch:

S = {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} ein gültiger Ereignisraum, wenn die Elemente aus S die Summe der geworfenen Augen darstellen. Dabei werden verschiedene Resultate des Experiments durch das gleiche Element von S dargestellt.
Das Element "8" des Ereignisraums kann zum Beispiel den Wurf "26" aber auch den Wurf "44" bedeuten.

Schliesslich ist auch

S = {keine Sechs, eine Sechs, zwei Sechsen} ein gültiger Ereignisraum.
Das Ergebnis "keine Sechs" vereinigt dabei zum Beispiel 25 der insgesamt 36 möglichen Resultate des Experiments auf sich.

Bem : Die Tatsache, dass für ein bestimmtes Experiment mehrere Ereignisräume gefunden werden können, ist typisch für die meisten Fälle. Welchen Ereignisraum man beim obigen Zwei-Würfel-Versuch verwenden will, hängt wesentlich vom Zweck des Experiments ab, der darüber entscheidet, wie detailliert die Ergebnisse festgehalten werden müssen.

Def 2: Ist S ein Ereignisraum eines Experiments und $E \subset S$ eine Teilmenge, deren Elemente nach einem bestimmten Kriterium ausgewählt wurden, so nennt man E ein Ereignis.

Ist das Resultat x des Experiments ein Element von E, so sagt man, das Ereignis E sei eingetreten.

Bsp 2: Es sei S = {11,12,13, ... ,65,66} der oben erwähnte 36-elementige Ereignisraum des Zwei-Würfel-Versuchs.

Dann ist E = {11,22,33,44,55,66} $\subset$ S das Ereignis "beide Würfel gleich".

F = {46,55,56,64,65,66} $\subset$ S ist das Ereignis "Augensumme mindestens 10"

Ist nun das Resultat des Experiments zum Beispiel "33", so ist E eingetreten, F hingegen nicht.

Bem : Ein Ereignis kann als Teilmenge beliebig viele Elemente aus S umfassen.
Die beiden Extremfälle sind dabei:

$E = \emptyset$	:	das unmögliche Ereignis (kann nie eintreten)
$E = S$	:	das sichere Ereignis (tritt immer ein)

2. Wahrscheinlichkeitsverteilung und Rechenregeln

Def 3: Es sei $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ ein n-elementiger Ereignisraum.

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung p für S ist eine Funktion, die jedem Element x_i aus S eine Zahl $p(x_i)$ so zuordnet, dass

1. $p(x_i) \geq 0$ für alle x_i
2. $\Sigma\, p(x_i) = p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_n) = 1$

gilt.

Die den Elementen von S so zugeordneten Zahlen nennt man die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Resultate des Experiments.

Bem : Aus den Bedingungen der Def 3 folgt sofort:

$$0 \leq p(x_i) \leq 1 \text{ für alle Elemente } x_i$$

Es sind beliebig viele unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen möglich, die den Anforderungen der Def 3 entsprechen. Welche davon zur Beschreibung eines Experiments verwendet wird, lässt sich nicht nur durch mathematische Betrachtungen entscheiden, sondern ist auch von der Einschätzung der Realität abhängig.

Bsp 3: Eine Münze wird geworfen. Als Ereignisraum habe man $S = \{K, Z\}$ mit den Elementen K: Kopf und Z: Zahl gewählt.

Jede der folgenden Zuordnungen genügt der Definition für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung:

a)	$p(K) = 0.5$	und	$p(Z) = 0.5$
b)	$p(K) = 0.3$	und	$p(Z) = 0.7$
c)	$p(K) = 1$	und	$p(Z) = 0$

Zuerst wird man a) für die "natürliche" Zuordnung halten, weil man meint, dass eine Münze K und Z gleich häufig zeigt ($\rightarrow$ "ideale Münze").

Dass dies durchaus nicht so ist, zeigt jeder genügend lange Versuch mit einer realen Münze.

Bei einer "Trickmünze" ist sogar die Verteilung c) möglich.

Die Wahl $p(K) = p(Z) = 0.5$ ist offenbar nur ein Modell für ideale Münzen.
Inwieweit sich reale Münzen an dieses Modell zu halten pflegen ist eine ganz andere Frage !

Bsp 4: Ein Würfel wird geworfen. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ist der verwendete Ereignisraum.

Die Verteilung $p(1)= p(2)= p(3)= p(4)= p(5)= p(6)= 1/6$ stellt offenbar den "idealen" Würfel dar.

Ein konkreter Wurf mit einem realen Würfel hat hingegen ergeben (600 Würfe):

$p(1) = 0.1817$; $p(2) = 0.1617$; $p(3) = 0.1500$;
$p(4) = 0.1733$; $p(5) = 0.1567$; $p(6) = 0.1766$.

Wie dieses Resultat zu interpretieren ist (insbesondere die recht grosse Abweichung bei $p(3) = 0.1500$) ist eine statistische Frage (vgl.§ 7)

Def 4: Ist S ein Ereignisraum mit einer gültigen Wahrscheinlichkeitsverteilung und $E \subset S$ ein Ereignis, so ist die Wahrscheinlichkeit p(E) des Ereignisses E die Summe der den Elementen von E durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung zugeordneten Wahrscheinlichkeiten.

Daraus folgt sofort, dass für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E immer gilt:

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

Bsp 5: Ein grüner und ein roter Würfel werden geworfen. Wir wählen als Ereignisraum die Menge $S = \{11,12,13,14, \ldots , 64,65,66\}$ (36-elementig).

Es sei E das Ereignis "Summe der Augenzahlen = 7" und F das Ereignis "Summe der Augenzahlen = 11".

a) Zunächst nehmen wir an, beide Würfel seien ideal, das heisst, alle den Einzelresultaten zugeordneten Wahrscheinlichkeiten sind gleich gross, nämlich: $p = 1/36$.

Da $E = \{16,25,34,43,52,61\}$ 6-elementig ist, gilt $p(E) = 1/6$ und da $F = \{56,65\}$ nur 2-elementig ist, gilt: $p(F) = 1/18$.

b) Nun nehmen wir an, der grüne Würfel sei so beschwert, dass er die Seite "1" nie und jede andere Seite gleich häufig zeigt. Der rote Würfel sei weiterhin ideal.

Nun ist $p(11)=p(12)=p(13)=p(14)=p(15)=p(16)=0$ und alle anderen Resultate erhalten die Wahrscheinlichkeit 1/30.

Jetzt ist $p(E) = 0 + 5\cdot(1/30) = 1/6$ wie vorher, aber $p(F) = 2\cdot(1/30) = 1/15$ ist grösser als vorher.

Die beiden Fälle a) und b) ergeben für p(F) verschiedene Werte. Offenbar steigt die Wahrscheinlichkeit, relativ hohe Summenwerte (11 Augen) zu werfen, wenn einer der Würfel keine "1" zeigen kann.

Hingegen ergibt sich für p(E) keine Veränderung.Die Umbewertung der Wahrscheinlichkeiten wird insgesamt gerade (zufälligerweise) kompensiert.

Satz1: Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses S ist 1:

$$p(S) = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses $\emptyset$ ist 0:

$$p(\emptyset) = 0$$

Satz2: Sind E und F zwei Ereignisse und ist $E \subset F$ so folgt daraus:

$$p(E) \leq p(F)$$

Folgt aus dem Eintreten von E auch immer das Eintreten von F, so ist die Wahrscheinlichkeit von F mindestens so gross wie die von E.

Satz3: Für zwei beliebige Ereignisse E und F gilt immer:

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$$

Die Summe in $E \cup F$ erhält man, indem man die Summe der Elemente von E allein und diejenige der Elemente von F allein bildet und dann die Summe der dabei doppelt gezählten Elemente aus $E \cap F$ wieder abzählt.

Schliessen sich zwei Ereignisse E und F gegenseitig aus und ist daher $E \cap F = \emptyset$ so gilt natürlich:

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F)$$

Satz4: Für alle Ereignisse E gilt:

$$p(E) + p(E^c) = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses E und die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten von E ergänzen sich auf 1.

Oder:

Die Wahrscheinlichkeit von E plus die Wahrscheinlichkeit des Gegenteils von E ergeben zusammen 1.

Bsp 6: Unter den ersten 200 natürlichen Zahlen wird eine Zahl willkürlich ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Zahl durch 6 oder durch 8 teilbar ist ?

$S = \{1,2,3,4,...,200\}$; $p = 1/200$ für alle Elemente.

E = "durch 6 teilbar" = $\{6,12,18,...,198\}$ ist 33-elementig, daher: $p(E) = 33/200$
F = "durch 8 teilbar" = $\{8,16,24,...,200\}$ ist 25-elementig, also ist: $p(F) = 25/200$

$E \cap F$ = "durch 6 <u>und</u> durch 8 teilbar" = "durch 24 teilbar" = $\{24,48,72,...192\}$
ist 8-elementig, deshalb $p(E \cap F) = 8/200$

Also folgt mit Satz 3 für das Ereignis $E \cup F$ = "durch 6 oder durch 8 teilbar":

$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F) = 50/200 = 0.25$

Bsp 7: Zwei verschiedene ideale Würfel werden geworfen. E sei das Ereignis
E = "mehr als 3 Augen". Wie gross ist p(E) ?

$E^c = \{11, 12, 21\}$ ist viel einfacher als E selbst.
Daher: $p(E^c) = 1/12$ und nach Satz 4 folgt $p(E) = 11/12$

3. Ergänzung

Die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen wird oft auch in sogenannten <u>Quoten</u> (Verhältnissen) angegeben:

<u>Def 5</u>: Ist p(E) die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E so versteht man unter der <u>Quote</u> für E das Verhältnis

$$p(E) : 1 - p(E)$$

Umgekehrt berechnet sich aus der Quote a:b für das Ereignis E die Wahrscheinlichkeit für E als

$$p(E) = a/(a+b)$$

Bsp 8: $p(E) = 1/6$ bedeutet die Quote 1:5 für E (oder 5:1 gegen E)
$p(E) = 0.9$ bedeutet die Quote 9:1 für E

Quote 3:1 für E bedeutet $p(E) = 0.75$
Quote 7:19 für E (oder 19:7 gegen E) bedeutet $p(E) = 7/26$

§ 4 BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT, BAUMDIAGRAMME

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E eines Experiments kann durch zusätzliche Informationen beeinflusst werden.

Zum Beispiel kann die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses F des gleichen Experiments das Ergebnis für E verändern, weil wegen der zusätzlichen Information über F die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Ereignisraum S angepasst werden muss.

Bsp 1: Ein Verein umfasst 20 aktive Mitglieder, nämlich 12 Männer und 8 Frauen, und 12 Passivmitglieder, nämlich 10 Männer und 2 Frauen.

Aus der Gesamtzahl von 32 Mitgliedern werde willkürlich eine Person ausgewählt.

E = "gewählte Person ist ein Mann"
F = "gewählte Person ist Aktivmitglied"

Wenn jede Person unabhängig von Geschlecht und Status die gleiche Chance hat, gewählt zu werden, ist für jedes Element p = 1/32 und daraus ergibt sich sofort:
p(E) = 22/32 = 0.6875 und p(F) = 20/32 = 0.6250

Nehmen wir nun an, wir wüssten, dass ein aktives Mitglied gewählt worden sei.
Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann gewählt wurde?

Die Information, dass F eingetreten ist, verändert natürlich die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Alle Elemente ausserhalb von F erhalten p = 0, diejenigen in F werden mit p = 1/20 bewertet.

Man sieht sofort, dass p(E) nun 12/20 = 0.60 beträgt.

Def 1: Die unter der Voraussetzung F berechnete Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E nennt man die durch F bedingte Wahrscheinlichkeit von E und bezeichnet sie mit p(E/F).

Satz1: Sind E und F zwei Ereignisse des Ereignisraumes S mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, die so gewählt ist, dass $p(F) \neq 0$ ist, dann berechnet sich die durch F bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E als:

$$p(E/F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

Def 2: Zwei Ereignisse E und F eines Ereignisraumes S heissen voneinander unabhängig, wenn $p(E/F) = p(E)$ ist (das heisst, wenn p(E) durch die zusätzliche Information F unbeeinflusst bleibt)

Ist $p(E/F) \neq p(E)$ so sind E und F abhängig voneinander.

Satz2: Zwei Ereignisse E und F sind voneinander unabhängig, wenn gilt:

$$p(E) \cdot p(F) = p(E \cap F) \quad \text{"Multiplikationstest"}$$

Bsp 2: 3 ideale Münzen werden geworfen, eine nach der anderen.

E = "mindestens 2 mal Kopf" und F = "1. Münze zeigt Kopf"

Mit S = {KKK,KKZ,KZK,ZKK,KZZ,ZKZ,ZZK,ZZZ} ergibt sich:
$p(E) = 0.5$; $p(F) = 0.5$; $p(E \cap F) = 0.375$ und $p(E/F) = 0.75$

Wie nicht anders zu erwarten war, erhöht die Kenntnis der Tatsache, dass die 1. Münze Kopf zeigt, die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens zweimal Kopf zu erhalten.
Die Ereignisse E und F sind also voneinander abhängig.

Anmerkung 1:

Die Bezeichnungen "unabhängig" und "abhängig" können irreführen. Man muss sich von der Ursache-Wirkung-Beziehung im physikalischen Sinne lösen. Hier bedeuten "abhängig" beziehungsweise "unabhängig" nur, dass die zur Frage stehenden Ereignisse ihre respektiven Wahrscheinlichkeiten gegenseitig beeinflussen oder eben nicht.

Denken Sie sich folgendes Beispiel:

Ein fairer Würfel werde zweimal hintereinander geworfen, E sei das Ereignis "2. Wurf gerade",
F das Ereignis "Summe der Augenzahlen gerade".

Nun ist zweifellos $p(E) = 0.5$; $p(F) = 0.5$ und $p(E \cap F) = 0.25$.

Nach dem Multiplikationstest sind also E und F unabhängig voneinander, obwohl E zweifellos mitbestimmt, ob F eintritt oder nicht.

Anmerkung 2:

Ein Überlegungsfehler, der von Anfängern häufig gemacht wird, ist, anzunehmen, dass zwei Ereignisse E und F voneinander unabhängig seien, wenn E und F keine gemeinsamen Elemente enthalten, also wenn $E \cap F = \emptyset$ ist.

Dies ist nun aber gerade nicht der Fall:

Denken Sie sich zwei Ereignisse E und F mit $p(E) > 0$ und $p(F) > 0$ und $E \cap F = \emptyset$.

Nun ist zweifellos $p(E \cap F) = 0$ und daher nach Satz1: $p(E/F) = 0 \neq p(E)$ und auch

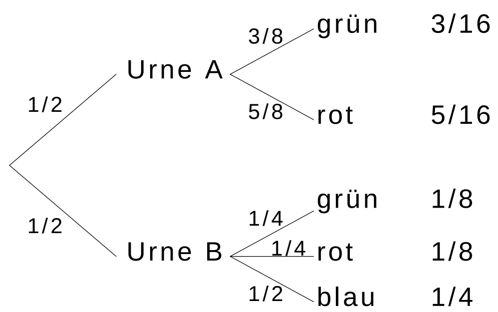
$$p(E / F^c) = \frac{p(E \cap F^c)}{p(F^c)} = \frac{p(E)}{p(F^c)} > p(E)$$

Also hat sowohl das Eintreten von F - wie auch das Nichteintreten von F - klaren Einfluss auf E.

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten werden benützt, um mehrstufige Experimente in einem sogenannten <u>Baumdiagramm</u> darzustellen:

Bsp 3: Urne A enthalte 3 grüne und 5 rote Kugeln, Urne B dagegen 2 grüne, 2 rote und 4 blaue Kugeln.
Es wird zuerst willkürlich eine der Urnen ausgewählt und daraus eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die schliesslich gezogene Kugel grün ?

Die Daten des Problems in einem Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeiten der 2. Stufe sind offensichtlich bedingte Wahrscheinlichkeiten, da sie vom ersten Schritt des Experiments abhängen.

Das Ereignis "grüne Kugel" lässt sich mit Satz 3, p.15 und Satz 1, p.17 wie folgt berechnen:

p(grün) = p[(Urne A und grün) oder (Urne B und grün)] =
= p[((UrneA) $\cap$ (grün)) $\cup$ ((Urne B) $\cap$ (grün))] =
= p[(Urne A) $\cap$ (grün)] + p[(Urne B) $\cap$ (grün)] =
= p(Urne A)·p(grün/Urne A) + p(Urne B)·p(grün/Urne B) =
= (1/2)·(3/8) + (1/2)·(1/4) = 5/16 = 0.3125

Beachten Sie dabei die Rolle des Baumdiagramms:

Wenn man jedem der 5 möglichen Resultate (5 Ausgänge des Baumdiagramms) die Wahrscheinlichkeit zuordnet, die durch das Produkt der Zahlen auf dem entsprech-enden Zweig gegeben ist, erhalten wir für die beiden Resultate "grün" die Wahr-scheinlichkeiten p = 0.1875 bzw. p = 0.125, was zusammen p(grün) = 0.3125 ergibt.

Bsp 4: Von einer Kiste weiss man, dass sie x rote und 5 - x blaue Kugeln enthält, kennt jedoch den Wert von x nicht, der 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 sein kann.
Man soll die Farbe einer Kugel erraten, bevor sie gezogen wird.
Das Ereignis G (= Gewinn) tritt ein, wenn man richtig geraten hat.

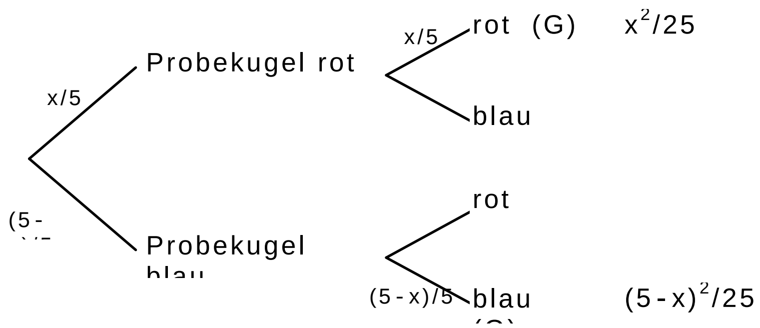
Man legt sich folgende Strategien zurecht:

1. Man ratet immer "rot"
2. Man zieht eine Probekugel, legt sie zurück und ratet deren Farbe.

Welche Strategie liefert für welche x die besten Gewinnchancen ?

Strategie 1: p(G) = x/5 ist klar

Strategie 2: Baumdiagramm:



also:

$$P(G) = \frac{x^2}{25} + \frac{(5-x)^2}{25} = \frac{2x^2 - 10x + 25}{25}$$

Zusammenstellung:

x =	0	1	2	3	4	5
P(G) (Str. 1)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
P(G) (Str. 2)	1	0.68	0.52	0.52	0.68	1

§ 5 STATISTISCHE KENNGRÖSSEN

1. Mittelwert und Erwartungswert einer Mess-Serie

Es sei $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ eine Mess-Serie und es bedeute $\sum x_i = x_1+x_2+x_3+ \ldots +x_n$

Def 1: Das arithmetische Mittel von n Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ist:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Bsp 1: Das arithmetische Mittel von 6,-2,0,5,4,13,2,4 ist:

$$\bar{x} = \frac{6+(-2)+0+5+4+13+2+4}{8} = 4$$

Bsp 2: Das arithmetische Mittel von 2,2,2,2,2,4,4,4,4,8,8,8 ist:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 8}{12} = \frac{50}{12} = 4.1667$$

Haben einzelne Messungen mehrfaches Gewicht (zum Beispiel, weil sie mehrfach vorkommen wie im Bsp 2) so ergibt sich sofort:

Satz1: Die Messungen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ mit den Gewichten $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ haben das arithmetische Mittel:

$$\bar{x} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + \ldots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n}$$

Die unterschiedliche Gewichtung einzelner Messwerte kann auch dort verwendet werden, wo die einzelnen Messwerte mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

Die Gewichtsfaktoren sind dann die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.

<u>Def 2</u>: Der <u>Erwartungswert</u> µ eines Experiments ist der mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3, ... , p_n gewichtete arithmetische Mittelwert aller Resultate des Experiments.

Bsp 3: Ein Würfel zeigt die 6 mit der Wahrscheinlichkeit p = 1/3, alle anderen Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich, nämlich p = 2/15.

Es ergibt sich:
$\mu = (2/15)\cdot 1+(2/15)\cdot 2+(2/15)\cdot 3+(2/15)\cdot 4+(2/15)\cdot 5+(1/3)\cdot 6 = 4$

das heisst, die durchschnittlich gezeigte Augenzahl ist 4.

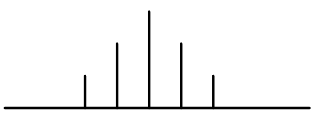
Bem : Der Erwartungswert µ eines Experiments ist also nicht der häufigste oder der wahrscheinlichste Wert (dies wäre im Bsp 3 ja die Augenzahl 6), sondern ein Durchschnittswert, wie er sich in einer genügend langen Serie von Versuchen einstellen würde.

Der Erwartungswert µ braucht dabei nicht einmal ein Wert zu sein, der bei der Durchführung des Experiments tatsächlich realisiert werden kann (zum Beispiel ist der Erwartungswert beim Wurf eines idealen Würfels µ = 3.5 !)

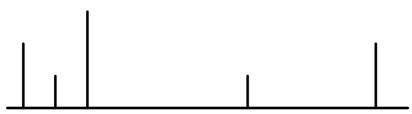
<u>2. Standardabweichung</u>

Nun gibt der Mittelwert zwar an, um welche Grösse herum sich die Zahlen einer Mess-Serie verteilen, aber nicht, wie gross und wie häufig die Abweichungen von diesem Mittelwert sind.

Bsp 4: Die beiden Serien 3,4,4,5,5,5,6,6,7 und 1,1,2,3,3,3,8,12,12 haben zwar den gleichen Mittelwert, aber offensichtlich ist die zweite Reihe viel breiter gestreut:



$\bar{x} = 5$



$\bar{x} = 5$

Ein mögliches Mass für die Breite einer Verteilung ist die mittlere Abweichung der Messwerte vom Mittelwert:

Def 3: Unter der Standardabweichung σ einer Menge von n Messungen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ versteht man:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

(Standardabweichung ; Standard Deviation)

Bsp 5: Berechnen Sie $\bar{x}$, und σ der folgenden Messreihe:
112, 98, 107, 110, 103, 111, 112, 99, 112, 118

$$\bar{x} = \frac{112 + 98 + 107 + \ldots + 112 + 118}{10} = 108.2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(112 - 108.2)^2 + (98 - 108.2)^2 + \ldots + (118 - 108.2)^2}{10}} = 6.063$$

Im Rechner finden sich diese Kenngrössen unter:

§ 6 STATISTISCHE MODELLE

1. Die Binomialverteilung

Def 1: Die Verteilung der Resultate einer Kette von lauter gleichen Versuchen, die nur zwei mögliche Resultate mit den Wahrscheinlichkeiten p und 1 - p zulassen und bei denen diese Wahrscheinlichkeiten während der ganzen Versuchskette unverändert bleiben, bezeichnet man als Binomialverteilung.

Bsp 1: Eine Münze mit p(K) = 0.7 und p(Z) = 0.3 wird 10 mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint genau 6 mal Kopf ?

Im (10-stufigen) Baumdiagramm wären also alle Zweige auszurechnen, die genau 6 mal Kopf (und damit genau 4 mal Zahl) enthalten.

Dies sind F*(10;6,4) = 210 Zweige.

Auf jedem dieser Zweige wäre zu rechnen $0.7^6 \cdot 0.3^4 = 0.000953$

Also ist: p(6 mal K) = $210 \cdot 0.000953 = 0.200$

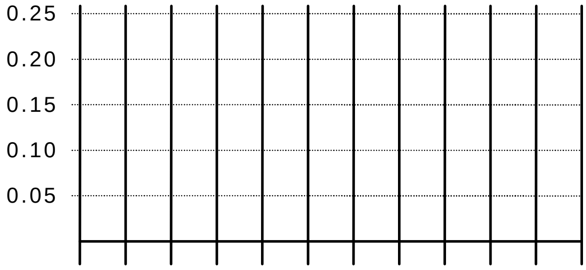
Satz1: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit bei einem Einzelversuch gleich p ist, in einer Serie von n aufeinanderfolgenden gleichen Versuchen genau x mal eintritt ist:

$$p(x) = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Bsp 2: Wie Bsp 1, aber p = 0.5 (ideale Münze).

Berechnen Sie p(x) für x = 0, 1, 2, 3, ... , 9, 10 und stellen Sie die Verteilung in einem sogenannten Balkendiagramm dar:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(x)											



<u>Satz3</u>: Für Binomialverteilungen gilt:

Erwartungswert : $\mu = n \cdot p$

Standardabweichung : $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Bsp 3: Die Wahrscheinlichkeit, im Eishockey einen Penalty zu verwandeln, beträgt p = 0.3.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit 5 Penalties mindestens 4 Tore zu erzielen ?

n = 5; p = 0.3; 1 - p = 0.7; x = 4 und x = 5

$$p(4) = \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^1 = 0.0284$$

$$p(5) = \frac{5!}{0! \cdot 5!} \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^0 = 0.0024$$

total also: $p(x \geq 4) = 0.0308$

Die <u>Binomialverteilung</u> wird - unter den eingangs geschilderten Voraussetzungen - mit Vorteil dann angewendet, wenn nur einzelne oder einige wenige Balken des Balkendiagramms zu berechnen sind, das heisst, wenn nur einige wenige Werte von x in Betracht kommen.

Falls die Wahrscheinlichkeit p des Einzelereignisses nahe bei 0 oder nahe bei 1 liegt, kann man die Resultate der <u>Binomialverteilung</u> durch das einfachere Modell der <u>Poissonverteilung</u> annähern.

2. Die Poissonverteilung

Ist $p < 0.1$ oder $p > 0.9$ so liefert

Satz4: $p(x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$ (Poissonverteilung)

mit

$\mu = n \cdot p$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p} = \sqrt{\mu}$

eine recht gute Näherung zur Binomialverteilung.

Bsp 4: In 100 [cm^3] einer Flüssigkeit werden 100 Viren gegeben.
Es werden 100 Proben zu je 1 [cm^3] hergestellt und chemisch getestet.
Wieviele der Proben sind unverseucht ?

$p = 0.01$, $n = 100$, $\mu = 1$, $x = 0$

$p(0) = \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} = 0.368$, d.h. 36.8 % der Proben sind rein.

Ein Vergleich mit der Binomialverteilung ergibt:

$$p(0) = \frac{100!}{100! \cdot 0!} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{100} = 0.366$$

Bsp 5: Wie Bsp 4, aber die Anzahl der Viren ist unbekannt. Die Untersuchung zeigt, dass nur 25 % der Proben keine Viren enthalten.

Man schätze, wieviele Viren in den 100 [cm^3] vorhanden waren.

$$p(0) = 0.25 \rightarrow \frac{\mu^0}{0!} \cdot e^{-\mu} = 0.25 \rightarrow e^{-\mu} = 0.25 \rightarrow \mu = -\ln 0.25 = 1.39$$

woraus $n = \mu / p = 139$ folgt.

3. Normalverteilung

Bis jetzt wurden nur Beispiele von Wahrscheinlichkeitsverteilungen behandelt, bei denen nur einzelne wenige Werte von x - also nur einzelne Balken der Wahrscheinlichkeitsverteilung - in die Rechnung aufgenommen wurden.

In der Praxis, vor allem bei Messungen von physikalischen Grössen, kommen aber häufig Verteilungen vor, bei denen ausgedehntere Bereiche rechnerisch erfasst werden müssen.

In diesen Falle wendet man die sogenannte Normalverteilung an, die es erlaubt, grössere zusammenhängende Gebiete des Balkendiagramms simultan auszuwerten.

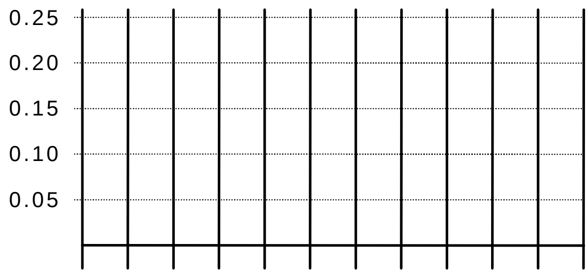
Annäherung der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung

Bsp 6: Zehn Studenten machen eine Prüfung. Für jeden einzelnen von ihnen beträgt die Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0.65.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den zehn Kandidaten deren x die Prüfung bestehen für x = 0, 1, 2, ... , 10.

a) exakte Lösung mit Binomialverteilung

$$p(x) = \frac{10!}{(10-x)! \cdot x!} \cdot 0.65^{x} \cdot 0.35^{10-x}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(x)											



Erwartungswert: $\mu = 6.5$; Standardabweichung: $\sigma = 1.508$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten werden durch die Flächen der Säulen im umseitigen Diagramm repräsentiert.

Wird die Anzahl n der möglichen Resultate immer grösser, so werden die Stufen der Treppe immer schmaler und schliesslich entsteht eine stetige Grenzfunktion w(x).

b) angenäherte Lösung mit Hilfe der Funktion w(x)

Anstatt die Fläche des Balkens x als Wahrscheinlichkeit p(x) zu benützen, berechnet man die Fläche unter w(x) von x - 0.5 bis x + 0.5.

Die Berechnung der Flächenanteile unter der Kurve w(x) gestaltet sich dabei recht schwierig. Sie setzt die Kenntnis von Annäherungsverfahren aus der Integralrechnung voraus.

Um die Rechnung zu vereinfachen, wird die Funktion w(x) für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen vereinheitlicht, so dass die Berechnung der Flächenanteile mit Hilfe einer einheitlichen Tabelle möglich wird.

c) Lösung mit der Standard-Normalverteilung

Die senkrechte Koordinatenachse wird in den Erwartungswert μ - also in die Symmetrieachse der Kurve w(x) - verschoben und ausserdem als neue Einheit der x-Achse die Standardabweichung σ gewählt.

Diese neue Kurve heisst Standard-Normalverteilung und hat die Gleichung:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2}$$

Als Variable z dient dabei also die Abweichung x - μ der ursprünglichen Variablen x vom Erwartungswert μ gemessen in Bruchteilen von σ.

In Bsp 6 wird für x = 8 zum Beispiel wie folgt gerechnet:

Die Wahrscheinlichkeit für x = 8 wird durch die Fläche von x = 7.5 bis x = 8.5 unter w(x) dargestellt.

Da $\mu = 6.5$ und $\sigma = 1.508$ ergibt sich:

für x = 7.5 : $z = (7.5 - 6.5)/1.508 \approx 0.66$
für x = 8.5 : $z = (8.5 - 6.5)/1.508 \approx 1.33$

Aus der Tabelle 1 des Anhangs entnimmt man die zugehörigen Flächenanteile:

für z = 1.33 : Fläche = 0.408 (Fläche von 0 bis 1.33)
für z = 0.66 : Fläche = 0.245 (Fläche von 0 bis 0.66)

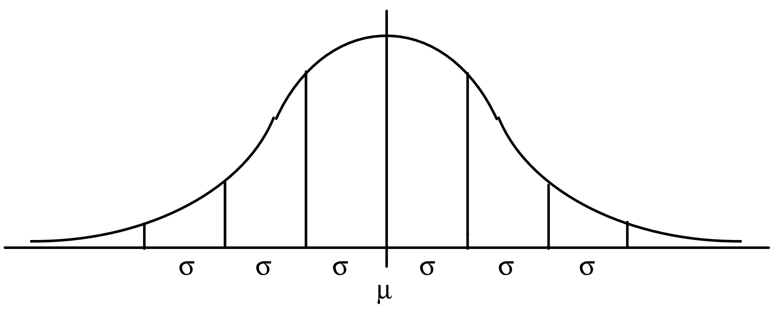
also für die Fläche von 0.6 bis 1.323:

$p(8) = 0.408 - 0.245 = 0.163$

Aus dem Rechner sind die Flächenanteile ebenfalls abrufbar:

<u>Satz5</u>: Für die Normalverteilung gilt: Erwartungswert : $\mu = n \cdot p$
Standardabweichung : $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

68.27% aller Werte liegen im Intervall von $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$
95.45% aller Werte liegen im Intervall von $\mu - 2\sigma$ bis $\mu + 2\sigma$
99.73% aller Werte liegen im Intervall von $\mu - 3\sigma$ bis $\mu + 3\sigma$



Bem : Die Näherung mit Hilfe der Normalverteilung ist umso besser, je grösser n ist.

Als Faustregel wird etwa genannt: Normalverteilung brauchbar, wenn $\sigma > 3$.

Bsp 7: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 6000 Würfen eines idealen Würfels die "6" mindestens 1100 mal auftritt ?

$n = 6000$, $p = 1/6$ also: $\mu = 1000$ und $\sigma = 28.8675$
$x > 1100$ bedeutet also $z > (1100 - 1000)/28.8675 = 3.4641$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also die Fläche unter der Normalverteilungskurve von 3.4641 bis ∞, das heisst: 0.5 - Fläche von 0 bis 3.4641, also 0.5 - 0.4997

also: p(mindestens 1100 mal die "6") = 0.0003

Bsp 8: Der durchschnittliche Investitionsbedarf einer Gemeinde beträgt Fr. 225.- pro Kopf und Jahr, die Standardabweichung σ sei mit Fr. 60.- festgestellt worden.

a) Wieviele % der Gemeinden investieren mehr als Fr. 325.- ?

b) Wieviele % investieren zwischen Fr. 150.- und Fr. 250.- ?

c) Wieviel investieren die 2 % ausgabenfreundlichsten mindestens ?

a) $z = (325 - 225)/60 = 1.667 \rightarrow p = 0.5 - 0.453 = 0.047 \rightarrow 4.7\ \%$

b) $z = (250 - 225)/60 = 0.417 \rightarrow p = 0.161$ (obere Grenze)
$z = (150 - 225)/60 = -1.25 \rightarrow p = -0.394$ (untere Grenze)
p = obere Grenze minus untere Grenze = $0.555 \rightarrow 55.5\ \%$

c) $\sigma = 2.054 \rightarrow \Delta =$ Fr. 123.35 $\rightarrow$ Fr. 348.25

Überprüfen Sie die Zahlenbeispiele auch mit dem Rechner !

§ 7 FOLGERUNGEN

1. Stichprobenumfang

Mit Hilfe der Normalverteilung lässt sich nun auch die in der Praxis sehr wichtige Frage nach dem optimalen Umfang einer Stichprobe und der daraus resultierenden Genauigkeit einer Prognose beantworten.

Dabei gehen zwei wesentliche Angaben in die Rechnung ein:

- die gewünschte Genauigkeit g der Prognose
- die geforderte Sicherheit s der Prognose

(s gibt also an, in wieviel % aller Fälle die Prognose um weniger als g von der Realität abweicht)

Bsp1 : Es soll der Anteil p der Schweizer mit Blutgruppe 0 mit 95% Sicherheit auf 2% genau bestimmt werden.
Wieviele Schweizer müssen untersucht werden ?

das heisst: $g = 0.02$, $s = 0.95$; gesucht: Umfang der Stichprobe: n Personen.

Eine Stichprobe enthalte n Personen, davon haben t Blutgruppe 0. Die auf dieser Stichprobe basierende Prognose wäre also $p^* = t/n$ für den Anteil der Schweizer mit Blutgruppe 0.

Diese Stichprobe ist nun genau dann gross genug, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der effektive Anteil p der Schweizer mit Blutgruppe 0 um weniger als 2% von p^* abweicht, grösser als 95% ist;

das heisst (nach Tabelle 1) wenn t um weniger als 1.96σ vom Erwartungswert $\mu = n\cdot p$ entfernt liegt:

$\mu - 1.96\sigma < t < \mu + 1.96\sigma \;\rightarrow\; p - 2\sigma/n < p^* < p + 2\sigma/n$

Da wir $-0.02 < p^* - p < +0.02$ das heisst $p - 0.02 < p^* < p + 0.02$ anstreben, muss $1.96\sigma/n < 0.02$ sein.

Daraus ergibt sich für unser Zahlenbeispiel:

$n > 98\sigma \rightarrow n > 98\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \;\rightarrow\; n^2 > 9'604\cdot n\cdot p\cdot(1-p) \;\rightarrow\; n > 9'604\cdot p\cdot(1-p)$

Nun ist p ja leider unbekannt. Sicher ist aber $p\cdot(1-p) \leq 0.25$, das heisst, im ungünstigsten Fall reichen $n = 9'604\cdot 0.25 \approx 2'400$ Personen.

In den meisten Fällen lässt sich der Stichprobenumfang noch beträchtlich senken, wenn eine Näherung für den Wert p aus früheren Untersuchungen bekannt ist oder sich während der laufenden Untersuchung abzeichnet:

Nehmen wir in obigem Beispiel an, dass unter den ersten 500 Personen deren 106 die Blutgruppe 0 haben. Dann ist $p \approx 106/500 = 0.212$ eine erste grobe Näherung, das heisst, es wird angenähert $p(1-p) = 0.212 \cdot 0.788 = 0.167$ gelten und damit reichen bereits $n \geq 9'604 \cdot 0.167 \approx 1'600$ Personen aus.

Allgemein gilt:

<u>Satz1</u>: $n > (y/g)^2 \cdot p \cdot (1-p)$ wobei

y : max. zulässige Abweichung in σ nach Tabelle 1 für die verlangte Sicherheit s

g : geforderte Genauigkeit

$p \cdot (1-p) = 0.25$ oder besser

Einige Schwellenwerte für s aus Tabelle 1:

s =	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
y =	1.64	1.96	2.58	2.81	3.29

Bsp 2: Man will mit 99% Sicherheit den Anteil der Linkshänder auf 1% genau bestimmen. Früher durchgeführte Untersuchungen zeigen, dass dieser Anteil etwa bei 0.08 liegen dürfte.

Bestimmen Sie den minimalen Stichprobenumfang.

s = 0.99 entspricht nach Satz1 dem Wert y = 2.58
Weiter ist: g = 0.01 und $p \cdot (1-p.) = 0.08.0.92 = 0.0736$

also: $n > (2.58/0.01)^2 \cdot 0.0736 \approx 4'900$ Personen

2. Chi - Quadrat - Test (χ^2 - Test)

Wie wir im vorangegangenen Abschnitt festgestellt haben, kann die Abweichung eines Ergebnisses aus einer Stichprobe vom effektiven Erwartungswert durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung geschildert werden; das heisst, es ist jederzeit möglich, die Frage "mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht das Ergebnis der Stichprobe um wieviel Prozent vom Erwartungswert ab" korrekt zu beantworten.

Dies setzt als erstes natürlich voraus, dass der Erwartungswert (respektive das ihm zu Grunde gelegte wahrscheinlichkeitstheoretische Modell) richtig angesetzt worden ist.

Bsp 3: Eine Münze werde 200 mal geworfen und es erscheine 116 mal "Kopf" und 84 mal "Zahl". Lässt sich die Hypothese "die Münze ist fair" und damit das wahrscheinlichkeitstheoretische Modell $n = 200$; $p = 0.5$; $\mu = 100$ (das heisst, Erwartungswert 100 mal "Kopf" und daher auch 100 mal "Zahl") aufrecht erhalten oder muss die Hypothese verworfen und die Münze als gefälscht erklärt werden ?

Die Frage, ob 116 mal "Kopf" und 84 mal "Zahl" gegen die Echtheit der Münze spricht, klärt man wie folgt:

Man berechnet als erstes die Wahrscheinlichkeit, mit einer fairen Münze ein mindestens ebenso einseitiges Resultat (das heisst, mindestens 116 mal "Kopf") zu werfen:

Berechnung unter der Hypothese "Münze ist fair":

$n = 200$; $p = 0.5$; $\mu = 100$; $\sigma = 7.071$; $x > 116$, das heisst $z > 2.2$
$p(x>116)$ = Fläche von $z = 2.20$ bis $\infty = 0.5 - 0.486 = 0.014$

Einen Irrtum von 0.014 (= 1.4%) vorbehalten, beschliessen wir, dass die Hypothese falsch und deshalb die Münze nicht fair ist.

Als Test-Niveaus für die Irrtumstoleranz werden normalerweise die Marken 5%, 2.5% und 1% verwendet. Im obigen Beispiel wird also die Hypothese "Münze ist fair"

auf dem 5% -Niveau :	verworfen
auf dem 2.5%-Niveau :	verworfen
auf dem 1% -Niveau :	nicht verworfen

Um das geschilderte Prüfverfahren abzukürzen, benützt man den sogenannten χ^2-Test (Chi-Quadrat-Test):

Def 1: Ein Versuch mit k möglichen Ergebnissen werde n mal durchgeführt.
Die beobachteten Häufigkeiten seien $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$.
Die nach der zugrundegelegten Hypothese erwarteten Häufigkeiten seien $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$.

Dann ist: $$\chi^2 = \sum \frac{(b_i - e_i)^2}{e_i}$$

und : f : Freiheitsgrade = die Anzahl der unabhängig voneinander beobachtbaren Häufigkeiten, das heisst in der Regel ist $f = k - 1$, da ja die letzte Häufigkeit aus den anderen berechnet werden kann, weil die Summe aller Häufigkeiten immer n sein muss.

Die Tabelle 2 des Anhangs zeigt dann an, auf welchen Niveaus die Hypothese verworfen werden muss.

In unserem Bsp 3 mit der Münze, die in 200 Würfen 116 mal "Kopf" und 84 mal "Zahl" zeigt, wäre also wie folgt zu rechnen:

1. Ereignis ("Kopf") : $b_1 = 116$ $e_1 = 100$
2. Ereignis ("Zahl") : $b_2 = 84$ $e_2 = 100$

Freiheitsgrade : $f = 2 - 1 = 1$

$\chi^2 = (116-100)^2/100 + (84-100)^2/100 = 5.12$

In der Tabelle findet man:

$\chi^2(5\%) = 3.84$; $\chi^2(2.5\%) = 5.02$ und $\chi^2(1\%) = 6.63$

Die Hypothese "Münze ist fair" wird also auf

dem 5% -Niveau:	verworfen (weil 5.12 > 3.84)
dem 2.5%-Niveau :	verworfen (weil 5.12 > 5.02)
dem 1% -Niveau :	nicht verworfen (weil 5.12 < 6.63)

Bsp 4: Ein Würfel wird 600 mal geworfen. Er zeigt:

"1"	"2"	"3"	"4"	"5"	"6"	
89	95	110	102	108	96	mal

Prüfen Sie die Hypothese "der Würfel ist echt"

$\chi^2 = 1.21 + 0.25 + 1 + 0.04 + 0.64 + 0.16 = 2.30$; $f = 5$

Die Hypothese lässt sich auf keinem Niveau verwerfen, das heisst, der Würfel ist echt.

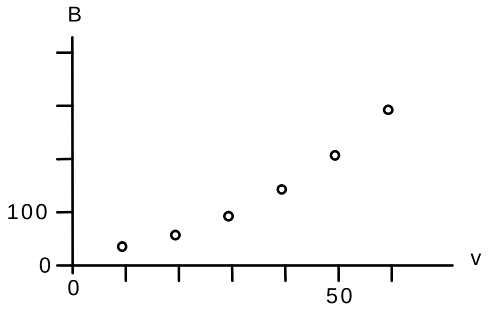
§ 8 REGRESSIONSRECHNUNG (“BEST FIT“)

In der Praxis vermutet man oft, dass zwischen zwei (oder mehreren) gemessenen oder beobachteten Grössen ein funktionaler Zusammenhang besteht, den man gerne in Gestalt einer Formel darstellen möchte.

Bsp 1: Bei der Messung des Bremsweges B eines Autos bei der Geschwindigkeit v hat sich ergeben:

v [ms^{-1}]	10	20	30	40	50	60
B [m]	40	54	90	138	206	292

Daraus ergibt sich das folgende Streudiagramm:



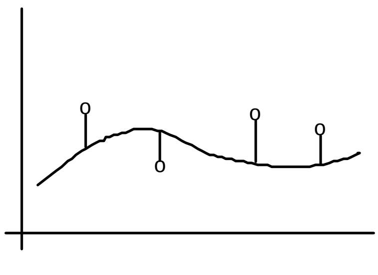
Gesucht wird eine Kurve (bzw. deren formelmässige Darstellung), die den vorgegebenen Werten möglichst gut angepasst ist!

Was versteht man unter einer "möglichst guten Anpassung" ?

<u>Def 1</u>: Von allen Kurven, die sich einer gegebenen Menge von Punkten (Wertepaaren) anpassen, wird diejenige Kurve als <u>beste Anpassung</u> ($\rightarrow$best fit) bezeichnet, bei welcher

$$\Sigma\, d_i^2 \text{ minimal ist.}$$

d_i sind dabei die Differenzen zwischen Messwert und Kurvenfunktionswert.



Dabei wird natürlich nicht in allen Fällen eine Gerade zur vernünftigen Anpassung ausreichen. Oft muss eine quadratische Parabel, eine Kurve noch höheren Grades oder eine Exponentialfunktion verwendet werden.

1. Lineare Regression (Anpassung durch eine Gerade)

Satz1: Die Gerade g, welche die n Punkte $P_1(x_1/y_1)$, $P_2(x_2/y_2)$, ... , $P_n(x_n/y_n)$ am besten annähert ist:

$$g: y = m \cdot x + b$$

wobei m und b als Lösungen des Gleichungssystems

$$\Sigma y = m \cdot \Sigma x + b \cdot n$$
$$\Sigma xy = m \cdot \Sigma x^2 + b \cdot \Sigma x$$

zu bestimmen sind.

Bsp 2: Durchbiegung eines Holzbalkens bei gleichmässiger Belastung in Abhängigkeit vom Feuchtigkeitsgehalt in %:

Feuchtigkeit in % :	0	3	8	10	11
Durchbiegung in [mm]	50	54	65	72	79

$\Sigma x = 32$; $\Sigma y = 320$; $\Sigma xy = 2'271$; $\Sigma x^2 = 294$

Es ergibt sich also:

$$320 = 32m + 5b$$
$$2'271 = 294m + 32b$$

mit den Lösungen: $m = 2.5$ und $b = 48$

Die Regressionsgerade hat also die Gleichung:

$$g: y = 2.5 \cdot x + 48$$

und liefert folgende Werte (inklusive einer Inter- und einer Extrapolation):

Feuchtigkeit in % :	0	3	8	10	11	|	6	14
Durchbiegung in [mm]:	48	55.5	68	73	75.5	|	63	83

2. Quadratische Regression (Anpassung durch eine quadratische Parabel)

Satz2: Die Parabel P mit bester Anpassung an die Punkte $P_1(x_1/y_1)$, $P_2(x_2/y_2)$, ... , $P_n(x_n/y_n)$ ist:

P: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

mit: $\Sigma y = a \cdot \Sigma x^2 + b \cdot \Sigma x + c \cdot n$
und: $\Sigma xy = a \cdot \Sigma x^3 + b \cdot \Sigma x^2 + c \cdot \Sigma x$
und: $\Sigma x^2 y = a \cdot \Sigma x^4 + b \cdot \Sigma x^3 + c \cdot \Sigma x^2$

Bsp 3: Bruchfestigkeit von Stahl in Abhängigkeit vom Kohlenstoffgehalt:

C-Gehalt in Promille:	0	4	8	10	16
σ in [N/mm^2]:	300	500	800	880	600

$\Sigma x = 38$; $\Sigma x^2 = 436$; $\Sigma x^3 = 5'672$; $\Sigma x^4 = 79'888$; $n = 5$
$\Sigma y = 3'080$; $\Sigma xy = 26'800$ und $\Sigma x^2 y = 300'800$

also:
$$3'080 = 436a + 38b + 5c$$
$$26'800 = 5'672a + 436b + 38c$$
$$300'800 = 79'888a + 5'672b + 436c$$

mit den Lösungen $a = -5.42$; $b = 109.85$; $c = 253.6$

Die Regressionsparabel hat also die Gleichung:

P: $y = -5.42x^2 + 109.85x + 253.6$

Für einen C-Gehalt von 13 Promille ergibt dies: $\sigma = 766$ [N/mm^2]

TABELLE 1 : FLAECHEN UNTER DER STANDARD-NORMALVERTEILUNG VON z=0 AUS

z =	F =	z =	F =	z =	F =	z =	F =	z =	F =
0.00	0.0000	0.40	0.1554	0.80	0.2881	1.40	0.4192	2.50	0.4938
0.01	0.0040	0.41	0.1591	0.81	0.2910	1.42	0.4222	2.55	0.4946
0.02	0.0080	0.42	0.1628	0.82	0.2939	1.44	0.4251	2.60	0.4953
0.03	0.0120	0.43	0.1664	0.83	0.2967	1.46	0.4279	2.65	0.4960
0.04	0.0160	0.44	0.1700	0.84	0.2996	1.48	0.4306	2.70	0.4965
0.05	0.0199	0.45	0.1736	0.85	0.3023	1.50	0.4332	2.75	0.4970
0.06	0.0239	0.46	0.1772	0.86	0.3051	1.52	0.4357	2.80	0.4974
0.07	0.0279	0.47	0-1808	0.87	0.3078	1.54	0.4382	2.85	0.4978
0.08	0.0319	0.48	0.1844	0.88	0.3106	1.56	0.4406	2.90	0.4981
0.09	0.0359	0.49	0.1879	0.89	0.3133	1.58	0.4430	2.95	0.4984
0.10	0.0398	0.50	0.1915	0.90	0.3159	1.60	0.4452	3.00	0.4987
0.11	0.0438	0.51	0.1950	0.91	0.3186	1.62	0.4474	3.05	0.4989
0.12	0.0478	0.52	0.1985	0.92	0.3212	1.64	0.4495	3.10	0.4990
0.13	0.0517	0.53	0.2019	0.93	0.3238	1.66	0.4515	3.15	0.4992
0.14	0.0557	0.54	0.2054	0.94	0.3264	1.68	0.4535	3.20	0.4993
0.15	0.0596	0.55	0.2088	0.95	0.3289	1.70	0.4554	3.25	0.4994
0.16	0.0636	0.56	0.2123	0.96	0.3315	1.72	0.4573	3.30	0.4995
0.17	0.0675	0.57	0.2157	0.97	0.3340	1.74	0.4591	3.35	0.4996
0.18	0.0714	0.58	0.2190	0.98	0.3365	1.76	0.4608	3.40	0.4997
0.19	0.0754	0.59	0.2224	0.99	0.3389	1.78	0.4625	3.45	0.4997
0.20	0.0793	0.60	0.2258	1.00	0.3413	1.80	0.4641	3.50	0.4998
0.21	0.0832	0.61	0.2291	1.02	0.3461	1.82	0.4656	3.55	0.4998
0.22	0.0871	0.62	0.2324	1.04	0.3508	1.84	0.4671	3.60	0.4998
0.23	0.0910	0.63	0.2356	1.06	0.3554	1.86	0.4686	3.65	0.4999
0.24	0.0948	0.64	0.2389	1.08	0.3599	1.88	0.4700	3.70	0.4999
0.25	0.0987	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.90	0.4713	3.75	0.4999
0.26	0.1026	0.66	0.2454	1.12	0.3686	1.92	0.4726	3.80	0.4999
0.27	0.1064	0.67	0.2486	1.14	0.3729	1.94	0.4738	3.85	0.4999
0.28	0.1103	0.68	0.2518	1.16	0.3770	1.96	0.4750	3.90	0.5000
0.29	0.1141	0.69	0.2549	1.18	0.3810	1.98	0.4762	3.95	0.5000
0.30	0.1179	0.70	0.2580	1.20	0.3849	2.00	0.4772	4.00	0.5000
0.31	0.1217	0.71	0.2612	1.22	0.3888	2.05	0.4798		
0.32	0.1255	0.72	0.2642	1.24	0.3925	2.10	0.4821		
0.33	0.1293	0.73	0.2673	1.26	0.3962	2.15	0.4842		
0.34	0.1331	0.74	0.2704	1.28	0.3997	2.20	0.4861		
0.35	0.1368	0.75	0.2734	1.30	0.4032	2.25	0.4878		
0.36	0.1406	0.76	0.2764	1.32	0.4066	2.30	0.4893		
0.37	0.1443	0.77	0.2794	1.34	0.4099	2.35	0.4906		
0.38	0.1480	0.78	0.2823	1.36	0.4131	2.40	0.4918		
0.39	0.1517	0.79	0.2852	1.38	0.4162	2.45	0.4929		
0.40	0.1554	0.80	0.2881	1.40	0.4192	2.50	0.4938		

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Bsp: Mittelwert $\mu = 7.2$; Standardabweichung $\sigma = 1.1$: Schnittstelle $x = 8.5 \rightarrow z = 1.182$
d.h. Fläche unter der Kurve zwixchen μ und x: $F \approx 0.3814$

TABELLE 2 : KRITISCHE WERTE VON χ^2 BEI f FREIHEITSGRADEN

VERWERFEN SIE DIE HYPOTHESE, WENN χ^2 GROESSER ALS DER TABELLENWERT IST

f	auf dem Niveau 5%	auf dem Niveau 2.5%	auf dem Niveau 1%
1	3.84	5.02	6.63
2	5.99	7.38	9.21
3	7.81	9.35	11.34
4	9.49	11.14	13.28
5	11.07	12.83	15.09
6	12.59	14.45	16.81
7	14.07	16.01	18.48
8	15.51	17.53	20.09
9	16.92	19.02	21.67
10	18.31	20.48	23.21
12	21.03	23.34	26.22
14	23.69	26.12	29.14
16	26.30	28.85	32.00
18	28.87	31.53	34.81
20	31.41	34.17	37.57
25	37.65	40.65	44.31
30	43.77	46.98	50.89
40	55.8	59.3	63.7
50	67.5	71.4	76.2
60	79.1	83.3	88.4
70	90.5	95.0	100.4
80	101.9	106.6	112.3
90	113.1	118.1	124.1
100	124.3	129.6	135.8

Übungen zu § 2

1. Vereinfachen Sie durch Kürzen: $\frac{n \cdot (n+1)\,!}{(n+1) \cdot (n-1)\,!} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n+2)\,!}{(n+2) \cdot n\,!}$

a) ohne Wiederholungen

2. Auf wieviele Arten können 8 Personen nebeneinander in einer Reihe stehen, wenn zwei unter ihnen immer nebeneinander stehen wollen ?

3. Auf wieviele Arten können sich 8 Personen um einen runden Tisch setzen, wenn zwei unter ihnen immer nebeneinander sitzen wollen ?

4. Vier Studenten einer zwanzigköpfigen Klasse sollen die gleiche Aufgabe lösen.
Auf wieviele Arten kann man in diesem Falle die Aufgabe zuteilen ?

5. Wieviele Schnittpunkte in der Ebene bilden 20 Geraden, von denen keine zwei untereinander parallel sind ?

   Wieviele Schnittpunkte gibt es, wenn von den 20 Geraden deren 5 unter sich parallel sind ?

6. Auf wieviele Arten kann man aus 8 Ehepaaren ein Gremium von 2 Männern und 3 Frauen auswählen ?

7. Wieviele vierstellige Zahlen gibt es, bei denen alle 4 Ziffern voneinander verschieden sind und die nicht mit der Ziffer 0 beginnen ?

8. Gegeben die 8 Buchstaben abegilrs. Alle ihre möglichen Permutationen werden lexikographisch geordnet und fortlaufend numeriert.
Welches ist die Permutation mit der Nummer 7401 ?

b) **mit Wiederholungen**

9. Wieviele verschiedene Wurfbilder sind mit 4 verschiedenfarbigen Würfeln möglich ?

10. Wieviele verschiedene Morsesignale gibt es, wenn alle Signale aus den beiden Zeichen • und - zusammengesetzt sind und höchstens 5 Zeichen umfassen dürfen ?

11. Wieviele Tipkolonnen gibt es im Sport-Toto ?

12. Jemand beobachtet, dass im Fussball in der Regel die Heimklubs bevorteilt sind. Seine Untersuchungen ergeben, dass durchschnittlich von den auf dem Totozettel aufgeführten Matches 7 von der Heimmannschaft und 3 von der Gastmannschaft gewonnen werden, währenddem die übrigen 3 Spiele unentschieden ausgehen.

    Er beschliesst, seinen Totozettel genau nach dieser festen Verteilung auszufüllen. Wieviele Tipkolonnen sind möglich ?

13. Wie in Aufgabe 6. Zusätzlich setzt der Spieler aber fest 3 Einerbänke.

c) vermischte Beispiele

14. Wieviele Steine enthält ein komplettes Dominospiel ?

15. Auf wieviele Arten lassen sich 10 verschiedenfarbige Kugeln so in 4 Fächer legen, dass im ersten Fach vier, im zweiten Fach drei, im dritten Fach zwei und im vierten Fach nur noch eine Kugel zu liegen kommt ?

16. Wieviele verschiedene Wurfbilder sind mit drei verschiedenfarbigen Würfeln möglich ?

17. In einem Schachturnier soll jeder Teilnehmer gegen jeden anderen genau einmal antreten. Da nachträglich noch drei Spieler nachgemeldet werden, müssen 60 Spiele mehr als ursprünglich vorgesehen ausgetragen werden.
Wieviele Spieler nehmen nun schliesslich am Turnier teil ?

18. Auf wievielen verschiedenen Wegen kann ein König auf einem Schachbrett von einer Ecke in die diagonal gegenüberliegende Ecke gelangen, wenn er stets nur nach rechts oder vorwärts aber nie nach links, rückwärts oder diagonal ziehen darf ?

19. Wieviele Diagonalen hat ein n-eck ?

20. Auf wieviele Arten können sich 20 Spatzen auf 3 Bäume verteilen, wenn

    a) die Spatzen als Individuen ununterscheidbar sind ?

    b) man die Spatzen voneinander unterscheiden kann ?

21. Ein Ehepaar hat 4 Kinder. Wieviele unterschiedliche Zusammensetzungen der Geschlechter sind möglich ?

22. Auf wieviele Arten lassen sich in der Ebene n Punkte, von welchen nie drei auf der gleichen Geraden liegen, durch gerade Strecken verbinden, wenn der entstehende Streckenzug zusammenhängend und geschlossen sein soll ? (Kreuzungen sind erlaubt)

23. Wieviele Bücher à 100 Seiten à 40 Zeilen à 50 Zeichen gibt es, wenn dabei die 26 Buchstaben des Alphabets und 4 Sonderzeichen gebraucht werden dürfen ?
($\rightarrow$ Weltbibliothek)

24. Entwickeln Sie: $(x + y)^6$

25. Entwickeln Sie: $(s - t)^4$

Übungen zu § 3

1. Suchen Sie für die folgenden Experimente geeignete Ereignisräume:

   a) 3 verschiedene Münzen werden geworfen
   b) 3 gleiche Münzen werden geworfen
   c) man schiesst auf eine Scheibe mit Zehnerwertung.
   d) aus einem Kartenspiel von 36 Karten werden einem 9 Karten zugeteilt
   e) man wählt zufällig eine natürliche Zahl aus

2. Ein Experiment bestehe darin, aus einem Hut, der 10 Zettel mit den Zahlen von 1 bis 10 enthält, einen Zettel zu ziehen.

   Untersuchen Sie die nachfolgenden Mengen auf ihre Verwendbarkeit als Ereignisraum:

   a) S = {gerade,ungerade}
   b) S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
   c) S = {1,3,5,gerade}
   d) S = {1,2,kleiner als 8, 8, grösser als 8}
   e) S = {kleiner als 5, 5, grösser als 5}
   f) S = {2,4,6,8,10,ungerade}
   g) S = {Primzahl, durch 2 teilbar}

3. Ein grüner und ein roter Würfel werden geworfen. E sei das Ereignis, dass die Summe der geworfenen Augen geradzahlig, F sei das Ereignis, dass die Augenzahl des grünen Würfels ungerade ist.

   a) bestimmen Sie die Elemente der Teilmengen E und F
   b) geben Sie eine Beschreibung des Ereignisses $E \cap F$
   c) wieviele Elemente enthält das Ereignis $E \cup F$?

4. A, B und C seien irgendwelche Ereignisse in einem Ereignisraum S und x sei ein Einzelresultat des Experiments.

   Stellen Sie mit Hilfe der Symbole A, B, C, x, $\cap$, $\cup$, ^{c}, $\in$ die folgenden Sachverhalte dar:

   a) wenigstens eines der drei Ereignisse tritt ein
   b) keines der drei Ereignisse tritt ein
   c) alle drei Ereignisse treten gleichzeitig miteinander ein
   d) A und B treten ein, aber C nicht
   e) nur A allein tritt ein
   f) genau zwei der drei Ereignisse treten gleichzeitig miteinander ein
   g) höchstens zwei der drei Ereignisse treten gleichzeitig miteinander ein
   h) A und B schliessen einander gegenseitig aus
   i) wenn A eintritt, tritt immer auch B ein (aus A folgt B)

5. Ein Würfel zeigt jede Seite mit einer Wahrscheinlichkeit, die proportional zur entsprechenden Augenzahl ist.

   a) Geben Sie die gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Ereignisraum S = {1,2,3,4,5,6} an.
   b) Dasselbe für den Ereignisraum S = {gerade,ungerade}.

6. Zwei Münzen werden geworfen. Die erste zeigt Kopf und Zahl mit gleicher Häufigkeit, währenddem die zweite Kopf doppelt so häufig zeigt wie Zahl.

a) Geben Sie die gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Ereignisraum S = {KK,KZ,ZK,ZZ} an.

b) Dasselbe für den Ereignisraum S = {2 mal K, 1 mal K, kein K}

7. Aus 6 Personen A,B,C,D,E und F soll ein Ausschuss von 3 Personen bestimmt werden. Jede Person hat die gleichen Chancen gewählt zu werden. Wählen Sie einen Ereignisraum S und eine zulässige Wahrscheinlichkeitsverteilung und berechnen Sie anschliessend die Wahrscheinlichkeit, dass

a) A
b) A und B
c) A oder B
d) A nicht
e) weder A noch B
f) A aber B nicht

gewählt wird beziehungsweise werden.

8. Ein Kasten enthält 9 weisse und 1 schwarze Kugel. Eine Kugel wird gezogen, dann wieder zurückgelegt und schliesslich eine weitere Kugel gezogen.
Wählen Sie einen geeigneten Ereignisraum und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) genau eine der gezogenen Kugeln die schwarze ist ?
b) beide gezogenen Kugeln weiss sind ?

Lösen Sie dieselben Aufgaben auch für den Fall, dass die erste Kugel <u>nicht</u> zurückgelegt wird und interpretieren Sie die Resultate.

9. Ein idealer Würfel wird zweimal geworfen.
Wie gross ist die Quote dafür,dass wenigstens bei einem Wurf eine Zahl unter 3 erscheint ?

10. Die Quote für ein Ereignis E sei 2:1, die Quote für das Ereignis $E \cup F$ sei 3:1.

Welches ist der kleinstmögliche, welches der grösstmögliche Wert für p(F)?

11. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter r versammelten Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres Geburtstag haben, wenn man annimmt, dass die Geburtstage sich gleichmässig über das Jahr verteilen und wenn man den Schalttag weglässt ?

Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit für r = 10, 20, 30, 40, 50 und 100

Übungen zu § 4

1. In einem Kasten befinden sich 4 rote, 6 grüne und 2 blaue Kugeln.
   Zwei Kugeln werden willkürlich herausgenommen.

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben, wenn:

   a) die erste Kugel vor dem Ziehen der zweiten zurückgelegt wird
   b) die erste Kugel nicht zurückgelegt wird
   c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln rot sind, wenn sie gleichfarbig sind ?
   (Mit und ohne Zurücklegen der ersten Kugel zu berechnen).

2. Drei Maschinen A, B und C produzieren 50%, 30% bzw. 20% des gesamten Ausstosses einer Fabrik. A produziert dabei durchschnittlich 3% defekte Stücke, B weist 4% und C sogar 5% Ausschuss auf.
   Ein Stück wird aus der Gesamtproduktion willkürlich ausgewählt.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass:

   a) das ausgewählte Stück defekt ist
   b) das ausgewählte Stück defekt ist, wenn es von A stammt
   c) das ausgewählte Stück von A stammt, falls es defekt ist.

3. Eine Lieferung von 20 gebrauchten Fernseh-Geräten wird vom Käufer wie folgt getestet: Zwei Geräte werden willkürlich ausgewählt. Sind beide in Ordnung, wird die Lieferung angenommen, sind beide defekt, wird die Lieferung zurückgewiesen. Ist ein Gerät defekt und das andere in Ordnung, wird ein drittes Gerät getestet. Ist dieses in Ordnung, wird die Lieferung angenommen, andernfalls zurückgewiesen.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung angenommen wird, als Funktion p(x) der Anzahl x der defekten Geräte in der Lieferung.

   Zeichnen Sie die Kurve von p(x) im Bereich von x=0 bis x=20
   (sog. "operating characteristic curve" OCC).

4. Hier die Angaben über die Rauchgewohnheiten von Amerikanerinnen in Zusammenhang mit ihrem Monatseinkommen:

Einkommen in US$ pro Monat	Anzahl befragter Personen	keine Gewohnheits-raucher		Gewohnheitsraucher Zigaretten/Tag		
		nie	selten	- 10	10 - 20	20 +
0	3335	2138	220	447	504	26
0 - 1000	1677	1092	153	236	188	8
1000 -2000	1117	720	79	162	123	33
2000 -3000	956	567	119	116	148	6
3000 +	375	152	73	38	104	8
Total	7460	4669	644	999	1067	81

   Es sei E = "mehr als US$ 2000 Einkommen pro Monat" und F = "10-20 Zigaretten pro Tag".

   Sind E und F voneinander abhängig ?

Übungen zu § 6

1. Ein in Amerika verbreitetes Würfelspiel geht wie folgt:

   Der Spieler legt einen Einsatz t fest und setzt ihn auf eine der sechs Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6. Anschliessend werden drei Würfel geworfen. Zeigen alle drei Würfel die gesetzte Zahl, so erhält der Spieler seinen Einsatz zurück plus den dreifachen Einsatz als Gewinn. Zeigen zwei Würfel die gewählte Zahl, erhält der Spieler seinen Einsatz plus den doppelten Einsatz als Gewinn; zeigt nur ein Würfel die richtige Zahl, erhält er seinen Einsatz zurück plus einen weiteren Einsatz als Gewinn. Erscheint die gewählte Zahl auf keinem der drei Würfel, verliert der Spieler seinen Einsatz.

   Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns unter der Annahme, dass alle Würfel ideal sind.

2. Eine grosse Anzahl von Personen soll auf eine Krankheit untersucht werden, die sich im Blutbild zeigt. Der geschätzte Anteil an kranken Personen sei 1%, das heisst, die Wahrscheinlichkeit, bei einer Untersuchung einer Blutprobe Krankheitserreger zu finden, schätzt man auf $p = 0.01$ und die Wahrscheinlichkeit, dass die untersuchte Person gesund ist, auf $1 - p = 0.99$

   Man kann sich zwei Untersuchungsverfahren vorstellen:

   a) Einzeluntersuchung

      Jede Person wird einzeln untersucht. Man braucht also zur Erfassung der kranken Personen genau einen Test pro Person.

   b) Gruppenuntersuchung

      Immer r Personen werden zu einer Gruppe zusammengefasst, ihre Blutproben vermischt und das Gemisch untersucht. Sind keine Krankheitserreger vorhanden, gelten alle r Personen der Gruppe als gesund. Sind Erreger vorhanden, so wird für diese r Personen eine Einzeluntersuchung eingeleitet.

   Im ersten Fall braucht man durchschnittlich nur $1/r$ Test pro Person, im zweiten Fall allerdings braucht man $(r+1)/r$ Tests pro Person.

   Berechnen Sie den Erwartungswert für die durchschnittliche Anzahl der pro Person nötigen Tests als Funktion der Gruppengrösse r und klären sie so ab, für welche Gruppengrösse r dieser Erwartungswert minimal wird.

3. Jedes Mitglied eines neunköpfigen Komitees kommt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.5$ an eine Versammlung.

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Dreiviertel-Mehrheit anwesend ist ?

4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit 5 Würfen eines fairen Würfels mindestens zweimal eine "6" zu erzielen ?

5. Ihnen wird folgendes Spiel angeboten:

   Eine faire Münze wird 9 mal geworfen. Sie gewinnen genau dann, wenn 4 oder 5 mal Kopf erscheint. Ist das Spiel für Sie günstig ?

6. Jemand behauptet, über aussersinnliche Wahrnehmung zu verfügen.

   Aus einem Kasten mit gleich vielen weissen, roten und blauen Kugeln wird 10 mal eine Kugel gezogen. Der Kandidat errät 6 mal die richtige Farbe.

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, durch blosses Raten zufälligerweise ein ebensogutes oder noch besseres Ergebnis zu erzielen ?

7. Ein Arzt behauptet, dass er eine Methode besitzt, mit der er mit 80% Sicherheit ($p = 0.8$) das Geschlecht eines Kindes monatelang vor der Geburt voraussagen kann.

   Um seine Behauptung zu testen, wird folgendes Verfahren abgesprochen:

   Man lässt den Arzt 14 Voraussagen machen. Wenn die Anzahl der richtigen Voraussagen mindestens 11 beträgt, will man seine Methode akzeptieren. Sonst wird sie als wertlos verworfen.

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Methode des Arztes

   a) verworfen wird, obschon sie richtig ist ? (Fehler 1. Art)
   b) akzeptiert wird, obschon sie falsch ist ? (Fehler 2. Art)

8. Eine Fluggesellschaft stellt fest, dass durchschnittlich 4% aller Fluggäste, die Plätze reserviert haben, nicht zum Abflug erscheinen. Deshalb beschliesst sie, in Zukunft 307 Flugkarten für die 300 verfügbaren Plätze zu verkaufen.

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle erscheinenden Fluggäste auch einen Platz bekommen ?

9. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10000 Würfen einer idealen Münze die Anzahl "Köpfe" um mehr als 1% vom Erwartungswert abweicht ?

10. Wenn die Gewichte von 300 Studenten normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 68.0$ [kg] und der Standardabweichung $\sigma = 3.0$ [kg] sind, wieviele Studenten sind dann:

    a) schwerer als 75.0 [kg]

    b) leichter als 66.0 [kg]

    c) zwischen 70.0 [kg] und 74.0 [kg] einschliesslich der Grenzen

    d) genau 68.0 [kg]

    Die Gewichte werden alle auf 1.0 [kg] genau registriert und notfalls gerundet.

Übungen zu § 7

1. Ein Verlag für Militärzeitschriften will eines seiner Monatsjournale durch eine breit gefächerte Werbeaktion neu lancieren. Er beschliesst, allen sich im Dienst befindlichen Rekruten zwei Gratisexemplare der Zeitschrift mit einer Bestellkarte versehen zukommen zu lassen. Um die aus dieser Aktion erwachsenden Unkosten mit dem zu erwartenden Zuwachs an Abonnenten vergleichen zu können, will der Verlag zuerst eine Stichprobe durchführen.

   a) Berechnen Sie den Stichprobenraum, wenn die Anzahl der zu erwartenden Neuabonnenten mit einer Sicherheit von 95% und einer Genauigkeit von 5% vorausgesagt werden soll.

   b) Es werden 500 Rekruten zufällig ausgewählt und mit den beiden Probeexemplaren beliefert. Davon schicken 25 die Karte mit der Abonnementsbestellung zurück. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die zu erwartende Zahl bei der späteren Werbeaktion um weniger als 5% vom Resultat der Stichprobe ab ?

2. Vor einer Wahl in den Stadtrat soll der Anteil p der Wähler bestimmt werden, die für den Kandidaten A stimmen werden.
   Wie gross muss die Stichprobe sein, wenn man diesen Anteil

   a) mit 90% Sicherheit auf 5% genau

   b) mit 90% Sicherheit auf 1% genau

   c) mit 99% Sicherheit auf 5% genau

   d) mit 99% Sicherheit auf 1% genau

   bestimmen möchte.

   Wägen Sie den nötigen Aufwand für die Sicherheit und den für die Genauigkeit gegeneinander ab.

3. Während eines längeren Zeitraums gibt eine Gruppe von Dozenten bei einer bestimmten Uebung im Durchschnitt 12% Sechser, 18% Fünfer, 47% Vierer, 18% Dreier und 5% Zweier.

   Ein neu gewählter Dozent erteilt nun bei der gleichen Uebung in den nachfolgenden Semestern insgesamt 22 mal eine Sechs, 34 mal eine Fünf, 77 mal eine Vier, 16 mal eine Drei und 1 mal eine Zwei.

   Bestimmen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%, ob der neue Dozent das gleiche Notenschema wie seine Vorgänger benutzt oder nicht.

4. In einer Zeitung liest man:

"In unserer Stadt konnte man im Monat Mai einen unerwarteten Boom bei der Geburt von Knaben feststellen: auf 60 neugeborene Knaben kamen in diesem Monat nur 35 Mädchen!"

Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist $p = 0.514$

Ist diese Zeitungsmeldung tatsächlich eine Sensation oder ist alles nur Zufall ?

5. Insgesamt vier Maschinen produzieren in einer Fabrik Eisenschrauben.

Man entnimmt je 200 Schrauben aus der Produktion der vier Maschinen und findet darunter 2, 9, 10 bzw. 3 defekte Exemplare.

Lohnt es sich bei einer tolerierten Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% die beiden mittleren Maschinen anzuhalten und zu revidieren ?

6. Jemand behauptet, über aussersinnliche Fähigkeiten zu verfügen.

Folgender Test wird verabredet:

Aus einer Urne mit je gleichvielen Zetteln mit den Zahlen von 0 bis 9 werden nacheinander willkürlich 100 Zettel gezogen.

Wieviele Zahlen muss der Kandidat mindestens richtig voraussagen, damit die Hypothese "keine aussersinnlichen Fähigkeiten" auf dem 5%-Niveau verworfen werden kann und so der Testperson mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% tatsächlich aussersinnliche Fähigkeiten attestiert werden können ?

Übungen zu § 8

1. Berechnen Sie die Regressionsgerade für die folgenden Daten:

   Endenergieverbrauch der Schweiz (Stat. Jahrbuch 1990) in 10^{15} [J]

1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1988
173	221	295	448	587	614	684	724	766

   Berechnen Sie eine Prognose für das Jahr 2000.

2. Berechnen Sie die Regressionsparabel für Bsp 1, p.35 (Bremsweg eines Autos) und interpolieren Sie den Bremsweg für v = 45 [ms^{-1}] und extrapolieren Sie den Bremsweg für v = 70 [ms^{-1}].

BERNER FACHHOCHSCHULE

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR BURGDORF

ABTEILUNG ARCHITEKTUR

MATHEMATIK : VORLESUNG 4

INTEGRALRECHNUNG

COPYRIGHT 2007: AMTSNACHFOLGER DES COPYRIGHTBESITZERS 2001

COPYRIGHT 2001: B. GYSLER, DIPL. MATHEMATIKER

PROFESSOR AN DER HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND ARCHITEKTUR

3. AUFLAGE, 2001, BURGDORF, SCHWEIZ

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1 FLÄCHENBERECHNUNGEN

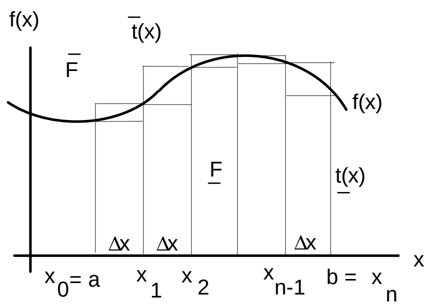
Problemstellung:

Gegeben ist eine im Intervall von x = a bis x = b überall stetige und reellwertige Funktion f(x).

Berechne die zwischen dem Graphen von f(x) und der x-Achse im Abschnitt von a bis b liegende Fläche F.

Lösung:

Die Funktion f(x) wird durch Treppenfunktionen $\underline{t}(x)$ bzw. $\overline{t}(x)$ angenähert und die Fläche F als Grenzwert der Fläche unter diesen Treppenfunktionen dargestellt:



f(x) wird durch eine untere und eine obere Treppenfunktion $\underline{t}(x)$ bzw. $\overline{t}(x)$ angenähert. Dabei wird das Intervall von a bis b in n gleiche Streifen geteilt. Die Breite eines solchen Streifens ist also

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Es ergibt sich für die

- Fläche unter der unteren Treppenfunktion $\underline{t}(x)$ bei n Streifen:

$$\begin{aligned} \underline{F}(n) &= \Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_{n-1}) = \\ &= \Delta x \cdot \left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) \right] \end{aligned}$$

- Fläche unter der oberen Treppenfunktion $\overline{t}(x)$ bei n Streifen:

$$\begin{aligned} \overline{F}(n) &= \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \Delta x \cdot f(x_3) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n) = \\ &= \Delta x \cdot \left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n) \right] \end{aligned}$$

Nun ist offensichtlich $\underline{F}(n) \leq F \leq \overline{F}(n)$ unabhängig von der Streifenzahl n.

Also ist auch $\lim\limits_{n \to \infty} \underline{F}(n) \leq F \leq \lim\limits_{n \to \infty} \overline{F}(n)$, falls diese Grenzwerte existieren.

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{F}(n) - \lim\limits_{n\to\infty} \underline{F}(n) = \lim\limits_{n\to\infty} [\overline{F}(n) - \underline{F}(n)] = \lim\limits_{n\to\infty} [\Delta x\{f(x_n) - f(x_0)\}] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{b-a}{n}\{f(b) - f(a)\}\right] = (b - a) \cdot [f(b) - f(a)] \cdot \lim_{n\to\infty} (1/n) = 0$$

und daraus folgt natürlich:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{F}(n) = \lim_{n\to\infty} \underline{F}(n) .$$

F ist also der gemeinsame Grenzwert von $\underline{F}(n)$ und $\overline{F}(n)$ (falls dieser existiert).

<u>Def 1</u>: Falls der Grenzwert von $\underline{F}(n)$ und $\overline{F}(n)$ der Fläche unter den Treppenfunktionen $\underline{t}(x)$ und

$\overline{t}(x)$ existiert und übereinstimmt, so nennt man ihn das <u>bestimmte Integral</u> der Funktion f(x) in den Grenzen von x = a bis x = b und schreibt dafür:

$$F = \int_a^b f(x)\, dx$$

Bsp 1: Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = x^2$ in den Grenzen von a = 1 bis b = 4

$$F = \int_1^4 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \overline{F}(n) = \lim_{n\to\infty} \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots f(x_n)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Delta x \cdot [f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \ldots\ldots + f(a + n\Delta x)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Delta x \cdot [(a + \Delta x)^2 + (a + 2\Delta x)^2 + \ldots\ldots + (a + n\Delta x)^2] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Delta x \cdot [na^2 + 2a\Delta x\, (1 + 2 + \ldots + n) + (\Delta x)^2\, (1 + 4 + 9 + \ldots + n^2)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Delta x \cdot [na^2 + 2a\Delta x \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right) + (\Delta x)^2 \left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right)$$

Daraus ergibt sich mit $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ nach entsprechender Umformung:

$$F = \lim_{n\to\infty} [a^2(b - a) + a(b - a)^2(1 + \frac{1}{n}) + \frac{1}{6}\, (b - a)^3(1 + \frac{1}{n})\, (2 + \frac{1}{n})] =$$

$$= a^2(b - a) + a(b - a)^2 + \frac{1}{6}\, (b - a)^3 \cdot 2 = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Für a = 1 und b = 4 folgt also:

$$F = \int_1^4 x^2 dx = 64/3 - 1/3 = 21\ [E^2]$$

§ 2 THEORETISCHE GRUNDLAGEN

Satz1: Jede stetige Funktion f(x) ist integrierbar, das heisst, für stetige Funktionen existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{F}(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{F}(n) = F$

1. Allgemeine Integrationsregeln

Satz2: Ist die obere Integrationsgrenze gleich der untern so gilt:

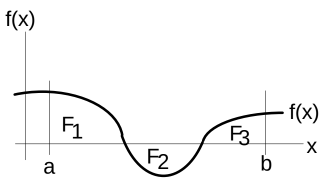
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$ für alle stetigen Funktionen f(x)

Satz3: Werden die Integrationsgrenzen vertauscht so gilt:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$ für alle stetigen Funktionen f(x)

Satz4: Verläuft f(x) zum Teil unterhalb der x-Achse so gilt:

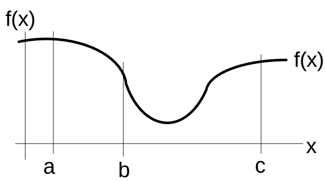
$$\int_a^b f(x)\,dx = F_1 - F_2 + F_3$$



das heisst, Flächenstücke unterhalb der x-Achse geben bei Integration einen negativen Beitrag

Satz5: Zusammensetzen und Aufteilen von Integralen:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



gilt unabhängig von a, b und c

Satz6: Multiplikative Konstante:

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$ für alle stetigen Funktionen f(x)

Satz7: Summe (Differenz) von Funktionen:

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$ für alle stetigen Funktionen f(x) und g(x)

Beweise: Alle nach dem Hauptsatz der Grenzwertrechnung ALG § 12, p. 38

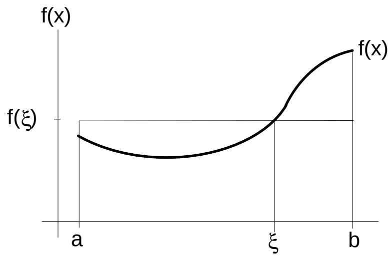
Satz8: (Zwischenwertsatz der Integralrechnung)

Ist f(x) eine stetige Funktion und $a \neq b \in \mathbb{R}$, dann existiert ein Zwischenwert ξ mit
$a \leq \xi \leq b$ so, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$$ gilt.

Beweis : Mit Nullstellensatz über stetige Funktionen

Zum Zwischenwertsatz:



Flächenausgleich !

Bsp 1: $f(x) = x^2$; $a = 0$, $b = 3$

$$\int_0^3 x^2\,dx = 27/3 - 0 = 9 = \xi^2\cdot(3-0) \;\rightarrow\; \xi = +\sqrt{3}$$

2. Integralfunktion und Stammfunktion

Der Wert eines bestimmten Integrals hängt, ausser von der zugrunde liegenden Funktion f(x) natürlich, von den gewählten Integrationsgrenzen ab. Wählt man die untere Grenze a fest und die obere Grenze x variabel, so ist das bestimmte Integral eine Funktion dieser oberen Grenze x :

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$

(um Verwechslungen zu vermeiden sei die Integrations-variable vorübergehend und bei Bedarf mit t bezeichnet)

Diese Funktion F(x) lässt sich geometrisch als "Flächenmessfunktion" deuten:

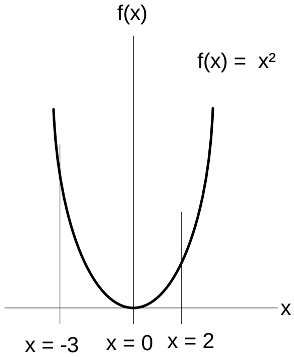
Sie misst die Fläche unter dem Graphen von f(t) von der festen unteren Grenze a aus bis zur oberen variablen Grenze x.

Def 1: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ heisst Integralfunktion von f(x)

Bsp 2: $f(x) = x^2$; $a = 2 \rightarrow \int_2^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$

$a = 0 \rightarrow \int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3}$

$a = -3 \rightarrow \int_{-3}^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} + 9$



sind alles Integralfunktionen der gleichen Funktion $f(x) = x^2$.

Sie messen alle die Fläche unter f(x), allerdings von verschiedenen "Messnullpunkten" aus.

Hauptsatz der Integralrechnung

Ist f(x) stetig und $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ irgendeine Integralfunktion von f(x), so gilt:

$F'(x) = f(x)$ Die Ableitung der Integralfunktion F(x) einer stetigen Funktion f(x) ist die Ausgangsfunktion f(x) selbst.

Def 2: Eine Funktion $\Phi(x)$ heisst Stammfunktion der Funktion f(x), falls $\Phi'(x) = f(x)$ ist.

Satz9: Jede Integralfunktion F(x) von f(x) ist auch eine Stammfunktion $\Phi(x)$ von f(x) aber nicht umgekehrt.

Die Differenz zweier Stammfunktionen $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$ der gleichen Ausgangsfunktion f(x) ist eine Konstante.

Daraus folgt unmittelbar:

Satz10: Ist $\Phi(x)$ irgendeine Stammfunktion von f(x), so erhält man jede andere Stammfunktion und also insbesondere auch jede Integralfunktion von f(x) durch Addition einer passend zu wählenden Konstanten c zu $\Phi(x)$.

3. Formale Lösung eines Integrals

Es soll das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnet werden.

1) Suche irgendeine Stammfunktion $\Phi(x)$ von f(x), also eine Funktion $\Phi(x)$ mit der Eigenschaft $\Phi'(x) = f(x)$

2) Die Integralfunktion von f(x), die von der unteren Grenze a aus misst hat also die Form

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + c$$

3) Bestimme die Konstante c so, dass diejenige Integralfunktion entsteht, die von der unteren Grenze a aus misst durch die Wahl x = a :

$$\int_a^a f(t)\,dt = \Phi(a) + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -\Phi(a) \quad \rightarrow \quad F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$$

4) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

Daraus ergibt sich also folgendes Rezept:

Satz11: Man findet das bestimmte Integral der Funktion f(x) zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze b, indem man sich irgendeine Stammfunktion $\Phi(x)$ von f(x) verschafft und die Differenz $\Phi(b)$ **-** $\Phi(a)$ berechnet.

Bsp 3: $\int_1^6 x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_1^6 = \frac{6^5}{5} - \frac{1^5}{5} = 1'555$

Hier wurde $\Phi(x) = x^5/5$ als Stammfunktion von $f(x) = x^4$ verwendet.
Jede andere Stammfunktion von $f(x) = x^4$ hätte den gleichen Zweck erfüllt.

Bsp 4: $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1$

Das Auffinden geeigneter Stammfunktionen ist also offensichtlich die zentrale Aufgabe bei der formalen Lösung bestimmter Integrale. Dabei können Kenntnisse der Differentialrechnung, einschlägige Formelsammlungen und - mindestens in den einfachsten Fällen - auch der Taschenrechner hilfreich sein. Ein paar der wichtigsten Formeln seien hierzusammengestellt:

a. Potenzfunktionen

$$\int_a^b x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \Big|_a^b \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{R} \text{ ausser für } r = -1$$

b. Spezialfall: Potenzfunktion $f(x) = 1/x = x^{-1}$

$$\int_a^b 1/x \, dx = \int_a^b x^{-1} \, dx = \ln x \Big|_a^b$$

c. Trigonometrische Funktionen

$$\int_a^b \sin x \, dx = -\cos x \Big|_a^b \qquad \int_a^b \cos x \, dx = \sin x \Big|_a^b$$

$$\int_a^b \tan x \, dx = -\ln|\cos x| \Big|_a^b \qquad \int_a^b \cot x \, dx = \ln|\sin x| \Big|_a^b$$

d. Exponentialfunktion

$$\int_a^b e^x \, dx = e^x \Big|_a^b$$

Merke:

In obigen Formeln wurde immer nur eine - die einfachste - Stammfunktion angegeben, die mit c = 0 nämlich.

Natürlich wäre als Stammfunktion von $f(x) = \cos x$ an Stelle von $\Phi(x) = \sin x$ auch zum Beispiel
$\Phi(x) = \sin x + 17$ denkbar und würde die genau gleichen Resultate liefern.

In der Praxis wird natürlich die einfachste Stammfunktion vorgezogen.

Im Rechner sind die formalen Integrale - in einfachen Fällen - anzeigbar mit:

4. Numerische (zahlenmässige) Lösung eines Integrals

Dazu existieren mehrere Näherungsverfahren, die auf einer geeigneten Streifeneinteilung der Fläche unter der Kurve f(x) im Abschnitt von a bis b beruhen.

In der Praxis sind solche Verfahren *(z.B. Sehnenverfahren, Tangentenverfahren, Simpson'sche Näherung etc.)* dank der leistungsfähigen Taschenrechner überflüssig geworden.

Mit Hilfe des Taschenrechners findet man zahlenmässige Resultate in beliebiger Genauigkeit wie folgt:

5. Ergänzung zur Flächenberechnung

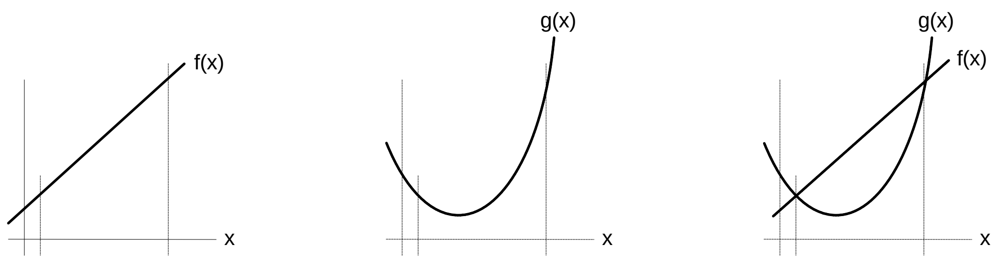
Wie in der Einführung in § 1 bereits dargelegt, kann mit Hilfe des bestimmten Integrals die Fläche unter einer stetigen Kurve in einem gegebenen Abschnitt berechnet werden.

Die Fläche zwischen zwei stetigen Kurven ergibt sich natürlich als Differenz der Integrale und daher (Satz 7, § 2) als Integral der Differenz der beiden Funktionen, deren graphische Darstellung die beiden Kurven sind.

Bsp 3: Berechnen Sie die zwischen $f(x) = 2x + 7$ und $g(x) = x^2 - 8x + 23$ liegende Fläche.

Die graphische Darstellung von f(x) ist eine Gerade mit Steigung 2 und Achsenabschnitt 7, g(x) zeigt eine nach oben geöffnete quadratische Parabel mit Achsenabschnitt 23.

Die beiden Kurven schneiden sich bei: $2x + 7 = x^2 - 8x + 23$ ### $-x^2 + 10x - 16 = 0$ ###
$x_1 = 2$ und $x_2 = 8$



$$F_f = \int_2^8 f(x)\,dx = \qquad F_g = \int_2^8 g(x)\,dx = \qquad F_{fg} = \int_2^8 \left[f(x) - g(x)\right] dx =$$

$$= (x^2 + 7x)\Big|_2^8 = \qquad = \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 23x\right)\Big|_2^8 = \qquad = \left(-\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 16x\right)\Big|_2^8 =$$

$$= 120 - 18 = \\ = 102\ \left[E^2\right]$$

$$= 98.667 - 32.667 = \\ = 66\ \left[E^2\right]$$

$$= 21.333 - (-14.667) = \\ = 36\ \left[E^2\right]$$

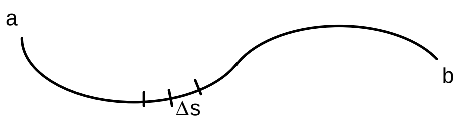
§ 3 ANWENDUNGSBEISPIELE AUS DER PHYSIK

1. Das Arbeitsintegral

Bei konstanter Kraft F ist die längs dem Weg s gegen die Kraft F geleistete Arbeit A bekanntlich

A = F ### s (Arbeit = Kraft ### Weg)

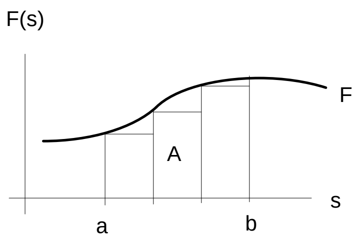
Ist die Kraft F hingegen eine Funktion des Ortes F = F(s) und also längs dem Weg s variabel, so lässt sich die Arbeit durch die folgende Grenzbetrachtung berechnen:



Der Weg s wird in kleine Wegstücke ###s aufgeteilt,
so dass in 1. Näherung angenommen werden darf,
die Kraft F sei längs ###s konstant und für die
insgesamt geleistete Arbeit gelte

A = ### F(s) ######s

Im sogenannten "Kraft-Weg-Diagramm" sieht das so aus:



Hier erscheinen die längs den Wegstücken ###s
geleisteten Anteile an der gesamten Arbeit A
als Rechtecksflächen unter einer Treppenfunktion

Analog zum Vorgehen bei der Flächenberechnung in § 1 wird auch hier der exakte Wert von A als Grenzwert $A = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \sum F(s) \cdot \Delta s$ berechnet.

Es ergibt sich also sofort:

$$A = \int_s F(s)\, ds$$

wobei das Integral so zu begrenzen ist, dass der gesamte
Weg s erfasst wird (### sogenanntes Arbeitsintegral)

Bsp 1: Gravitation der Erde

Es werde ein Satellit von der Erdoberfläche aus in eine Umlaufbahn geschossen.
Der Satellit habe die Masse m, r sei seine Entfernung vom Erdmittelpunkt und R der Erdradius.
Die herrschende Kraft $F(r) = \frac{m \cdot R^2 \cdot g}{r^2}$ ist die Gravitationskraft.

Soll der Satellit auf eine Umlaufbahn mit Radius x - also auf eine Höhe h = x - R über der Erdoberfläche - geschossen werden, ist dazu folgende Arbeit nötig:

$$A(x) = \int_R^x \frac{m \cdot R^2 \cdot g}{r^2}\, dr = m \cdot R^2 \cdot g \cdot \int_R^x r^{-2}\, dr = - m \cdot R^2 \cdot g \cdot r^{-1} \Big|_R^x = m \cdot R^2 \cdot g \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x}\right)$$

Zahlenbeispiel:

Es sei: m = 1000 [kg] ; R = 6'367'650 [m] ; x = 6'467'650 [m] ; also h = 100'000 [m]

$$A(x) = 1000 \cdot (6'367'650)^2 \cdot 9.81 \cdot (1.5704 - 1.5462) \cdot 10^{-7} = 965.832 \cdot 10^6 \; [\mathrm{Nm}]$$

Soll der Satellit das Schwerefeld der Erde ganz verlassen (x ### ###), so ergibt sich:

$$A = \lim_{x \to \infty} A(x) = m \cdot R^2 \cdot g \cdot \frac{1}{R} = m \cdot R \cdot g$$

Soll dem Satelliten weiter sämtliche Energie in Form von kinetischer Energie bereits auf der Erdoberfläche beim Start mitgegeben werden, so ist:

$A = E_{kin} \quad \rightarrow \quad m \cdot R \cdot g = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \rightarrow \quad v = 11'177 \left[ms^{-1}\right]$ (### Fluchtgeschwindigkeit)

<u>Übung:</u> Welche Höhe h_{stat} über der Erdoberfläche muss ein <u>geostationärer</u> Satellit haben ?

(Dies ist ein Satellit, der sich immer über dem gleichen Punkt der Erdoberfläche befindet und sich also genau gleich schnell auf seiner Umlaufbahn bewegt, wie die Erde sich um ihre Achse dreht).

Bsp 2: Hook'sches Federgesetz

Innerhalb gewisser Grenzen ist die Kraft, die benötigt wird, um eine Feder zu dehnen, zur Dehnung proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor die *Federkonstante* genannt wird.

Für eine Feder mit Federkonstante k und Dehnung x gilt also:

$F(x) = k \cdot x$ und also: $A = \int_a^b k \cdot x \, dx$

Zahlenbeispiel:

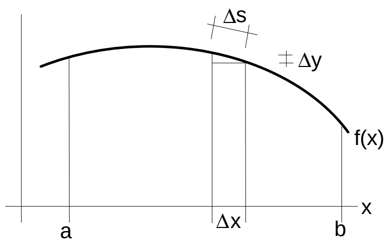
Um eine gegebene Feder der Normallänge 25 [cm] um 0.5 [cm] zu dehnen, werde eine Kraft von 100 [N] benötigt. Man berechne die Arbeit, die geleistet wird, wenn man diese Feder von 27 [cm] auf 30 [cm] dehnt.

Für $x = 0.5$ ist $F(x) = 100 = k \cdot 0.5$ woraus $k = 200$ und also $F(x) = 200x$ folgt.

Damit ist $A = \int_2^5 200x \, dx = 100x^2 \Big|_2^5 = 2100$ [N · cm] = 21 [Nm]

§ 4 BERECHNUNG DER BOGENLÄNGE (KURVENREKTIFIKATION)

Zur Berechnung der Bogenlänge des Graphen einer stetigen Funktion f(x) im Abschnitt von
x = a bis x = b geht man wie folgt vor:



$$B = \lim_{\Delta s \to 0} \sum \Delta s = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{1 + (\Delta y / \Delta x)^2} \cdot \Delta x =$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Satz1: Die Bogenlänge des Graphen der stetigen Funktion f(x) im Abschnitt von x = a bis x = b berechnet sich als:

$$B = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Bsp 1: Berechnen Sie die Länge der Sinuskurve $f(x) = \sin x$ von $x = 0$ bis $x = 2\pi$

$$B = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

Näherung mit Taschenrechner: → B = 7.64 [E]

Bsp 2: Berechnen Sie die Länge des Bogens der quadratischen Parabel $f(x) = x^2$ von $x = 0$ bis $x = 4$

$$B = \int_0^4 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Näherung mit Taschenrechner: → B = 16.82 [E]

§ 5 ROTATIONSKÖRPER

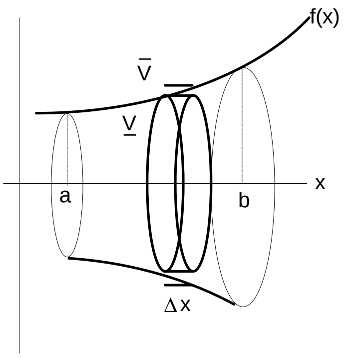
Def 1: Unter einem Rotationskörper versteht man einen Körper, der durch Rotation einer Fläche F um eine feste Achse entsteht.

Bsp 1: F: Kreis (Halbkreis) ### Kugel
F: rechtwinkliges Dreieck ### Kreiskegel
F: Rechteck Zylinder
F: Ellipse (Halbellipse) ### Rotationsellipsoid
F: Kreis, Achse ausserhalb ### Torus

1. Volumen eines Rotationskörpers

Es sei die im Intervall von x = a bis x = b stetige, positivwertige Funktion f(x) gegeben.

Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, falls man die im Abschnitt von x = a bis x = b unter f(x) liegende Fläche um die x-Achse dreht.



Man teilt das Intervall von x = a bis x = b in n gleiche Teile der Länge ###x

Es ist also ###x = $\frac{b-a}{n}$

Anschliessend berechnet man die Summe $\overline{V}$ beziehungsweise $\underline{V}$ der Volumina der einzelnen Zylinderscheibchen.

Klarerweise gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{V} = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{V} = V$

Also ergibt sich beispielsweise mit $\overline{V}$:

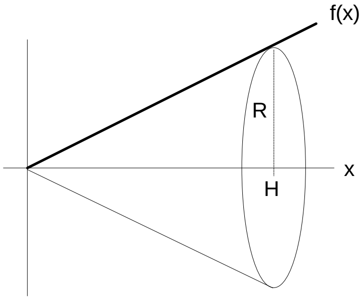
V = $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{V} = \lim\limits_{n\to\infty}$ {[f(x_1)]^2·###·###x + [f(x_2)]^2·###·###x + ... + [f(x_n)]^2·### ·###x } = ###· $\lim\limits_{n\to\infty}$ ### [f(x_i)]^2·###x = =

$$\pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

Satz1: Das Volumen des durch die Fläche unter f(x) im Abschnitt von x = a bis x = b bei Drehung um die x-Achse erzeugten Rotationskörpers berechnet sich als:

$$V_{rot} = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Bsp 1: Berechnen Sie das Volumen eines Kreiskegels mit Grundkreisradius R und Höhe H.



Die erzeugende Fläche ist ein rechtwinkliges Dreieck, die begrenzende Funktion also eine Gerade.

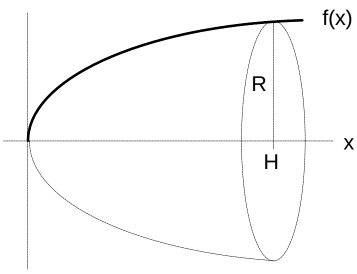
Am einfachsten wählt man:

$f(x) = m \cdot x$ mit $f(H) = m \cdot H = R$ **###** $m = \frac{R}{H}$,

also $f(x) = \frac{R}{H} \cdot x$

$$V = \pi \cdot \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 \, dx = \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot \left[\frac{H^3}{3} - 0 \right] = \frac{1}{3} R^2 \pi H$$

Bsp 2: Berechnen Sie das Volumen eines Rotationsparaboloids mit Grundkreisradius R und Höhe H.



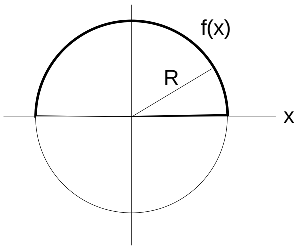
Die erzeugende Fläche ist durch eine zur x-Achse symmetrische quadratische Parabel begrenzt.
Als Funktion wählt man also $f(x) = c \cdot \sqrt{x}$

mit $f(H) = c \cdot \sqrt{H} = R \rightarrow c = \frac{R}{\sqrt{H}}$ und also

$f(x) = \frac{R}{\sqrt{H}} \cdot \sqrt{x}$

$$V = \pi \cdot \int_0^H \frac{R^2}{H} x \, dx = \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^H = \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot \left[\frac{H^2}{2} - 0 \right] = \frac{1}{2} R^2 \pi H$$

Bsp 3: Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R.



Die erzeugende Fläche ist ein ....,
die begrenzende Funktion lautet also

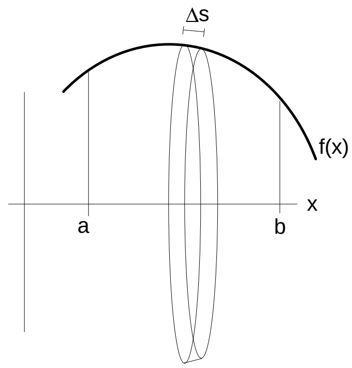
f(x) = ...

V =

Bsp 4: Berechnen Sie das Volumen eines Rotationsellipsoides, das bei Drehung einer Ellipsenfläche mit den halben Hauptachsen a und b um die x-Achse entsteht.

2. Mantelfläche eines Rotationskörpers

Berechnen Sie die Mantelfläche eines Rotationskörpers, der durch Drehung einer Fläche unter dem Graphen einer stetigen Funktion f(x) um die x-Achse entsteht.



Die von Δs im Streifen der Breite Δx erzeugte Kegelstumpfmantelfläche berechnet sich als:
$\Delta M = \pi \cdot \Delta s \cdot \left[f(x) + f(x+\Delta x)\right]$ und natürlich ist:
$M = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum \Delta M$

Damit wird $M = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \sum \pi \cdot \Delta s \cdot \left[f(x) + f(x+\Delta x)\right] = \pi \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot \left[f(x) + f(x+\Delta x)\right] =$

$$= \pi \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \cdot \left[f(x) + f(x+\Delta x)\right] = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx$$

Satz2: Die Mantelfläche des durch die Fläche unter der stetigen Funktion f(x) im Abschnitt
von x = a bis x = b erzeugten Rotationskörpers berechnet sich als:

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx$$

Bsp 5: Berechnen Sie die Mantelfläche des durch die Fläche unter $f(x) = +\sqrt{x}$ erzeugten Rotationsparaboloids im Abschnitt von x = 0 bis x = 6.

$$M = 2\pi \int_0^6 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_0^6 \sqrt{x + 0.25}\, dx = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{x + 0.25}\right)^3 \Big|_0^6 = 64.93\left[E^2\right]$$

Bsp 2: Berechnen Sie die Mantelfläche des aus f(x) = sin x entstehenden Rotationskörpers zwischen x = 0 und x = π

$M = 2\pi \int_0^\pi \sin x \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$ → Näherung mit Taschenrechner → M = 14.424 [E^2]

§ 6 SCHWERPUNKTSBERECHNUNGEN

Def 1: Das statische Moment eines Massenpunktes der Masse m im Abstand r von der Drehachse ist definiert durch

$$M = r \cdot m$$

1. Schwerpunkt einer Linie

Hat man das statische Moment einer Masse m auf einer Bogenlinie B zu berechnen, so teilt man den Bogen in einzelne Massenelemente Δm auf und erhält den Grenzwert:

$$M = \lim_{\Delta m \to 0} \sum r \cdot \Delta m = \int_{(m)} r \, dm$$

Denkt man sich andererseits die Gesamtmasse m des Bogens B in ihrem Schwerpunkt S vereinigt, so ergibt sich für das statische Moment

$$M = r_s \cdot m \qquad (\, r_s \text{ : Achsenabstand des Schwerpunkts S des Bogens B} \,)$$

Aus dem Vergleich ergibt sich:

$$\int_{(m)} r \, dm = r_s \cdot m$$

Für die weitere Entwicklung sind zwei einschränkende Voraussetzungen zu machen:

a) die Masse m sei homogen (gleichmässig) über den Bogen B verteilt, das heisst, die Liniendichte $\lambda = m/B$ ist konstant.

Es ist also: $m = \lambda \cdot B$ und auch $dm = \lambda \cdot dB$

b) die Drehachse sei stets entweder in der x- oder y-Achse (axiale Momente) in der Koordinatenebene des Bogens.

Damit wird: Abstand von der Drehachse:

	axial um x-Achse	axial um y-Achse
beliebiger Punkt P(x/y) des Bogens B	y	x
Schwerpunkt $S(x_s/y_s)$ des Bogens B	y_s	x_s

Es folgt unter diesen speziellen Voraussetzungen sofort:

$$M_x = y_s \cdot \lambda \cdot B = \int_{(B)} y \cdot \lambda \cdot dB = \lambda \cdot \int_{(B)} y \; dB$$

$$M_y = x_s \cdot \lambda \cdot B = \int_{(B)} x \cdot \lambda \cdot dB = \lambda \cdot \int_{(B)} x \; dB$$

Wie man schon weiss, ist $dB = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ (vgl. § 4, p. 13) und da ja y = f(x) ist folgt:

Satz1: Die Schwerpunktskoordinaten des Bogens B der Funktion f(x) im Abschnitt von x = a
bis x = b berechnen sich wie folgt:

$$x_s = \frac{1}{B} \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$y_s = \frac{1}{B} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$\text{wobei } B = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Bsp 1: Man berechne die Schwerpunktskoordinaten des Parabelbogens von $f(x) = x^2$ im Abschnitt von x = 0 bis x = 2.

Mit $f'(x) = 2x$ ergibt sich :

$$B = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 4.6468 \text{ [E]}$$

$$x_s = \frac{1}{B} \cdot \int_0^2 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 4.9966 / 4.6468 = 1.0753$$

$$y_s = \frac{1}{B} \cdot \int_0^2 x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 5{,}7577 / 4.6468 = 1.2391$$

Bsp 2: Gesucht die Koordinaten des Schwerpunkts des Bogens der Sinuskurve von x = 0 bis x = π

$$B = \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = 3.8202 \text{ [E]}$$

$x_s = \pi/2 = 1.5708$ (aus Symmetriegründen)

$$y_s = \frac{1}{B} \cdot \int_0^\pi \sin x \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = \frac{1}{3.8202} \cdot 2.2956 = 0.6009$$

2. Schwerpunkt einer Fläche

Will man das statische Moment einer Masse m auf einer Fläche F zu berechnen, so teilt man - der gleichen Idee wie unter 1. folgend - die Fläche in einzelne Massenelemente Δm auf und erhält den Grenzwert:

$$M = \lim_{\Delta m \to 0} \sum r \cdot \Delta m = \int_{(m)} r \, dm$$

Denkt man sich andererseits die Gesamtmasse m in ihrem Schwerpunkt S vereinigt, so ergibt sich für das statische Moment

$M = r_s \cdot m$ (r_s : Achsenabstand des Schwerpunkts der Fläche F)

Aus dem Vergleich ergibt sich:

$$\int_{(m)} r \, dm = r_s \cdot m$$

Wieder sind die zwei einschränkende Voraussetzungen zu machen:

a) die Masse m sei homogen (gleichmässig) über die Fläche F verteilt, das heisst, die Flächendichte $\sigma = m/F$ ist konstant.

Es ist also: $m = \sigma \cdot F$ und auch $dm = \sigma \cdot dF$

b) die Drehachse sei stets entweder in der x- oder y-Achse (axiale Momente) der durch die Fläche F gelegten Koordinatenebe.

Damit wird: Abstand von der Drehachse:

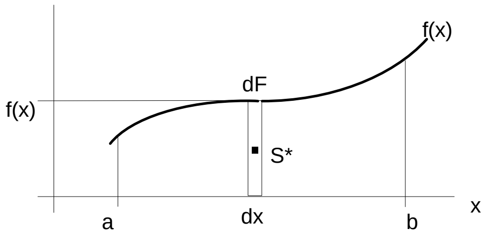
	axial um x-Achse	axial um y-Achse
beliebiger Punkt P(x/y) der Fläche F	y	x
Schwerpunkt S(x_s/y_s) der Fläche F	y_s	x_s

Es folgt genau wie auf p.19:

$$M_x = y_s \cdot \sigma \cdot F = \int_{(F)} y \cdot \sigma \cdot dF = \sigma \cdot \int_{(F)} y \, dF$$

$$M_y = x_s \cdot \sigma \cdot F = \int_{(F)} x \cdot \sigma \cdot dF = \sigma \cdot \int_{(F)} x \, dF$$

Zur Lösung dieser Integrale sei zunächst vorausgesetzt, dass die Fläche F unter dem Graphen einer stetigen Funktion f(x) im Abschnitt von x = a bis x = b liege:



Für den Schwerpunkt S* des Flächenstreifchens dF gilt:

S*(x / ½ f(x))

Ausserdem ist dF = f(x)· dx

Die statischen Momente des Streifchens dF sind damit nach obiger Zusammenstellung:

- um die x-Achse: $dM_x = \tfrac{1}{2} \cdot f(x) \cdot \sigma \cdot f(x) \cdot dx = \sigma \cdot \tfrac{1}{2} \cdot [f(x)]^2 \cdot dx$
- um die y-Achse: $dM_y = x \cdot \sigma \cdot f(x) \cdot dx = \sigma \cdot x \cdot f(x) \cdot dx$

und durch Integration wiederum :

$$M_x = y_s \cdot \sigma \cdot F = \sigma \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \qquad \text{und} \qquad M_y = x_s \cdot \sigma \cdot F = \sigma \cdot \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

woraus sich für die Lage des Gesamtschwerpunktes $S(x_s / y_s)$ der Fläche F ergibt:

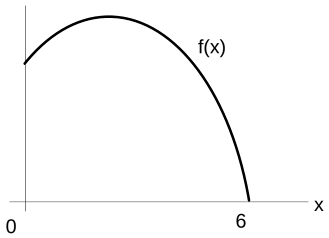
Satz2: Die Schwerpunktskoordinaten einer Fläche F unter dem Graphen der stetigen Funktion f(x) im Abschnitt von x = a bis x = b berechnen sich wie folgt:

$$x_s = \frac{1}{F} \cdot \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

$$y_s = \frac{1}{2F} \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$\text{wobei: } F = \int_a^b f(x) \, dx$$

Bsp 3: Berechnen Sie die Schwerpunktskoordinaten der Fläche unter der Parabel
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 4$ im Abschnitt von x = 0 bis x = 6.



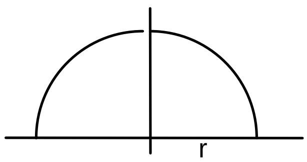
$$F = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 4\right) dx =$$
$$= \left(-\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 4x\right)\Big|_0^6 = 24\ \left[E^2\right]$$

$$x_s = \frac{1}{24}\int_0^6 \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + 4x\right) dx = \frac{1}{24}\left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{4}{9}x^3 + 2x^2\right]\Big|_0^6 = \frac{1}{24}\cdot 60 = 2.50$$

$$y_s = \frac{1}{48}\int_0^6 \left(\frac{1}{9}x^4 - \frac{8}{9}x^3 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{32}{3}x + 16\right) dx =$$
$$= \frac{1}{48}\left[\frac{1}{45}x^5 - \frac{2}{9}x^4 - \frac{8}{27}x^3 + \frac{16}{3}x^2 + 16x\right]\Big|_0^6 = \frac{1}{48}\cdot 108.8 = 2.267$$

also: S(2.50/ 2.267)

Bsp 4: Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Halbkreises mit Radius r.



$f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$
$F = r^2 \cdot \pi / 2$
$x_s = 0$ (klar)

$$y_s = \frac{1}{r^2\pi}\int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{r^2\pi}\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{+r} = \frac{1}{r^2\pi}\left[\frac{2}{3}r^3 - \left(-\frac{2}{3}r^3\right)\right] = \frac{4}{3\pi}\,r = 0.4244\,r$$

Ist der Schwerpunkt einer Fläche F zu bestimmen, welche zwischen zwei stetigen Funktionen f(x) und g(x) liegt, ist das statische Moment von F gleich der Differenz der statischen Momente der Flächen unter f(x) bzw. unter g(x) allein.

Die analoge Herleitung wie vorher ergibt in diesem Falle:

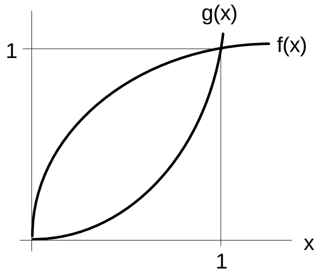
Satz3: Die Schwerpunktskoordinaten einer Fläche F zwischen den Graphen der beiden stetigen Funktionen f(x) und g(x) im Abschnitt von x = a bis x = b berechnen sich als:

$$x_s = \frac{1}{F} \cdot \int_a^b x \cdot \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

$$y_s = \frac{1}{2F} \cdot \int_a^b \left\{ \left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2 \right\} dx$$

$$\text{wobei: } F = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

Bsp 5: Berechnen Sie den Schwerpunkt der Fläche zwischen
$f(x) = +\sqrt{x}$ und $g(x) = x^2$



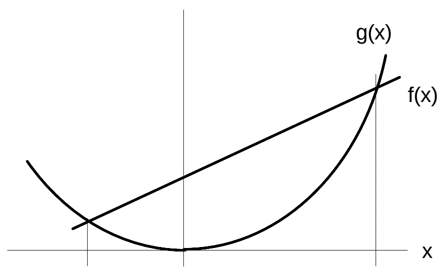
$$F = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \left[E^2\right]$$

Aus Symmetriegründen erkennt man natürlich sofort $x_s = y_s$

$$x_s = 3\int_0^1 (x^{3/2} - x^3)\, dx = 3\left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 3\left[\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right] = 0.45 \quad \rightarrow \quad S\ (\ 0.45\ /\ 0.45\ )$$

Bsp 6: Bestimmen Sie die Schwerpunktskoordinaten der Fläche zwischen
$f(x) = \frac{1}{2} x + 2$ und $g(x) = \frac{1}{4} x^2$

F =



x_s =

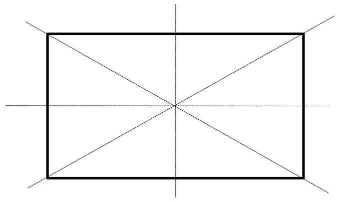
y_s=

3. Weitere Regeln über die Lage eines Flächenschwerpunktes

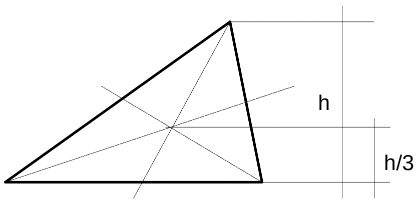
a. Symmetrieachsen

Der Schwerpunkt einer (homogen mit Masse belegten) Fläche liegt immer auf eventuell vorhandenen Symmetrieachsen der Fläche

Bsp: Rechteck



b. Dreieck



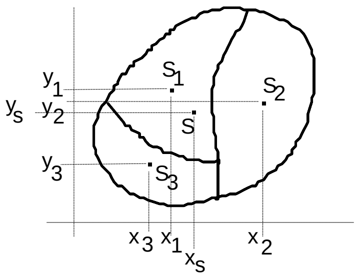
Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt im Schnitt-
punkt der Seitenhalbierenden (Schwerlinien).
Da sich diese im Verhältnis 1 : 2 schneiden, liegt
der Schwerpunkt auf den Parallelen zu den Dreiecksseiten in 1/3 der Gesamthöhe.

Sind die 3 Eckpunkte des Dreiecks in Koordinaten gegeben, so gilt:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad ; \quad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

c. Zusammengesetzte Flächen

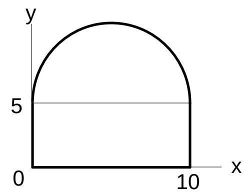
Ist eine Fläche F als Zusammensetzung mehrerer Teilflächen F_1, F_2, F_3 .... darstellbar, deren Einzelschwerpunkte $S_1(x_1 / y_1)$; $S_2(x_2 / y_2)$; $S_3(x_3 / y_3)$ ..... bekannt sind,
so lässt sich der Gesamtschwerpunkt $S(x_s / y_s)$ wie folgt ausrechnen:



$$x_s = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 + x_3 \cdot F_3 + \ldots\ldots.}{F}$$

$$y_s = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2 + y_3 \cdot F_3 + \ldots\ldots.}{F}$$

Bsp 7: Berechnen Sie die Lage des Schwerpunkts der untenstehenden Fläche.



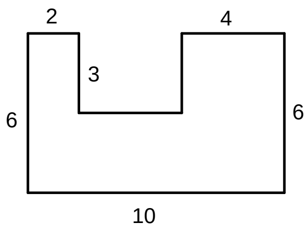
$x_s = 5$ (Symmetrie!)

$F_1 = 50$; $y_1 = 2.5$

$F_2 = 39.27$; $y_2 = 7.12$ (vgl. Bsp 4, p.22)

$$y_s = \frac{2.5 \cdot 50 + 7.12 \cdot 39.27}{89.27} = 4.53$$

Bsp 8: Berechnen Sie die Lage des Schwerpunkts der folgenden Fläche:



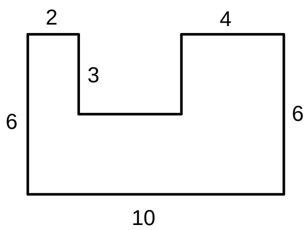
$F_1 =$ $x_1 =$ $y_1 =$

$F_2 =$ $x_2 =$ $y_2 =$

$F_3 =$ $x_3 =$

$F =$ $x_s =$ $y_s =$

Anmerkung: Im Bsp 8 wäre auch ein Lösungsgang mit zwei Teilflächen möglich:



$F_1 =$ $x_1 =$ $y_1 =$

$F_2 =$ $x_2 =$ $y_2 =$

$F =$ $x_s =$ $y_s =$

4. Die Guldin'schen Regeln

Aus dem Vergleich der Resultate Satz1, p.13, Satz2, p.17 und Satz1, p.19 folgt:

Satz4: Die Mantelfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt der Länge des Bogens,
welcher diese bei der Rotation erzeugt und dem Weg des Bogenschwerpunkts bei der Rotation.

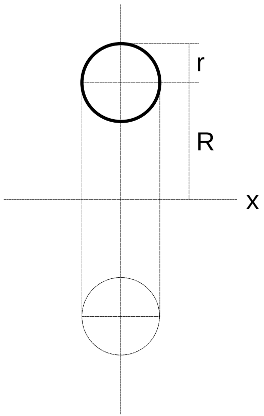
$$M = B \cdot 2 \cdot y_s \cdot \pi$$

Weiter aus dem Vergleich der Resultate Satz1, p.15 und Satz2, p. 21 folgt:

Satz5: Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt der Fläche, welche dieses bei der Rotation erzeugt und dem Weg des Flächenschwerpunkts bei der Rotation.

$$V = F \cdot 2 \cdot y_s \cdot \pi$$

Bsp 9: Mantelfläche und Volumen eines Torus, Radius der Körperseele R, Radius des Querschnitts r.



erzeugender Bogen: $B = 2 \cdot r \cdot \pi$

erzeugende Fläche : $r^2 \cdot \pi$

Weg des Schwerpunkts des Bogens und der Fläche: $2 \cdot R \cdot \pi$

Mantelfläche: $M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot 2 \cdot R \cdot \pi = 4 R r \pi^2$

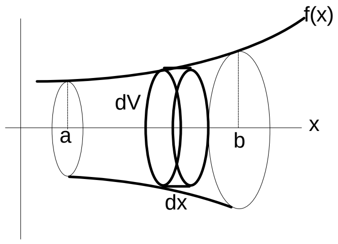
Volumen: $V_{rot} = r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot R \cdot \pi = 2 R r^2 \pi^2$

5. Schwerpunkt eines Rotationskörpers

Unter der Voraussetzung der homogenen Massenverteilung (d.h. Dichte $\rho = m/V =$ konstant) gilt für Körper analog zu p. 19 beziehungsweise p. 21:

$$x_s \cdot \rho \cdot V = \int_{(V)} x \cdot \rho \cdot dV \quad ; \quad y_s \cdot \rho \cdot V = \int_{(V)} y \cdot \rho \cdot dV \quad ; \quad z_s \cdot \rho \cdot V = \int_{(V)} z \cdot \rho \cdot dV$$

Für den Spezialfall des Rotationskörpers mit der x-Achse als Rotationsachse ergibt sich daraus folgende Vereinfachung:



$$y_s = z_s = 0$$

$$dV = \pi \cdot \left[f(x)\right]^2 \cdot dx \qquad \text{und daher:}$$

$$x_s \cdot \rho \cdot V = \int_a^b \left\{ x \cdot \rho \cdot \pi \cdot \left[f(x)\right]^2 \right\} dx$$

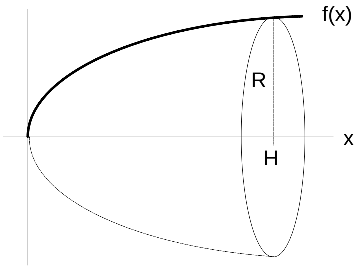
woraus folgt:

Satz6: Der Schwerpunkt eines durch die Fläche unter der stetigen Kurve f(x) erzeugten Rotationskörpers liegt auf der x-Achse und zwar bei

$$x_s = \frac{\pi}{V} \cdot \int_a^b \left\{ x \cdot \left[f(x)\right]^2 \right\} dx$$

wobei: $V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$

Bsp 10: Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Rotationsparaboloids mit der Höhe H und dem Grundkreisradius R

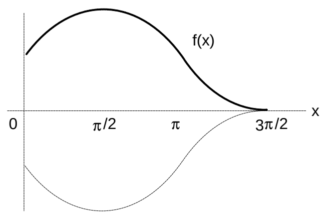


Nach Bsp.2, p. 15 wird die erzeugende Fläche berandet durch:

$$f(x) = \frac{R}{\sqrt{H}} \cdot \sqrt{x} \quad \text{und es ist: } V = \frac{1}{2} R^2 \pi H$$

$$x_s = \frac{2}{R^2 H} \int_0^H \frac{R^2 x^2}{H}\, dx = \frac{2}{H^2} \int_0^H x^2\, dx = \frac{2}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{2}{3} H \qquad \rightarrow \qquad S\left(\frac{2}{3} H / 0 / 0\right)$$

Bsp 11: Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Zwiebelhaube, die durch die Fläche unter $f(x) = 1 + \sin x$ bei Rotation um die x-Achse im Abschnitt von $x = 0$ bis $x = 3\pi/2$ erzeugt wird.



$$V = \pi \cdot \int_0^{3\pi/2} (1 + \sin x)^2\, dx = 28.49 \; [E^3]$$

$$x_S = \frac{\pi}{28.49} \cdot \int_0^{3\pi/2} \left[x \cdot (1 + \sin x)^2\right] dx = 0.1103 \cdot 14.9049 = 1.6440$$

§ 7 TRÄGHEITSMOMENTE

Def 1: Unter dem Trägheitsmoment J eines Massenpunktes m im Abstand r von der Drehachse versteht man

$$J = r^2 \cdot m$$

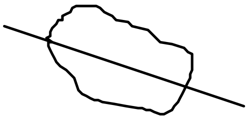
Das Trägheitsmoment eines Körpers lässt sich berechnen, indem man den Körper in lauter Massenelemente Δm zerlegt, für diese die Anteile $\Delta J = r^2 \cdot \Delta m$ berechnet und schliesslich für den Fall $\Delta m \rightarrow 0$ zusammenzählt:

$$J = \lim_{\Delta m \to 0} \sum r^2 \cdot \Delta m = \int_{(m)} r^2 \, dm$$

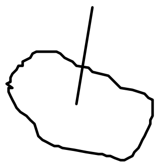
1. Das Flächenträgheitsmoment (FTM)

Liegen alle Massenpunkte in der gleichen Ebene so spricht man vom Flächenträgheitsmoment FTM.
Dabei unterscheidet man bezüglich der Lage der Achse 2 Fälle:

- das axiale FTM : die Drehachse liegt in der Ebene der Fläche
- das polare FTM : die Drehachse steht senkrecht auf der Ebene der Fläche



axiales FTM



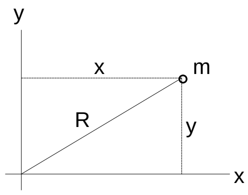
polares FTM

Im folgenden wird stets vorausgesetzt:

- die Masse m sei gleichmässig (homogen) über die Fläche F verteilt, das heisst, die Flächendichte $\sigma = m/F$ ist konstant
  es gilt also: $m/F = \sigma =$ konstant $\rightarrow$ $dm/dF = \lim_{\Delta F \to 0} \Delta m/\Delta F = \sigma =$ konstant

- es sei in die Ebene der Fläche ein Koordinatensystem so gelegt, dass die Drehachse stets in der x- oder der y-Achse liegt (axiale FTM) oder senkrecht dazu im Nullpunkt des Koordinatensystems = z-Achse (polares FTM)

Damit ergibt sich zunächst für einen Massenpunkt m:



axial: $J_x = y^2 \cdot m$ um die x-Achse

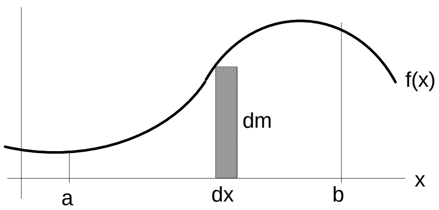
$J_y = x^2 \cdot m$ um die y-Achse

polar: $J_p = R^2 \cdot m = (x^2 + y^2) \cdot m$

Daraus erkennt man natürlich sofort:

$$J_p = J_x + J_y$$

Für eine durch eine stetige Funktion f(x) begrenzte Fläche ist nun:



Das Streifchen dm hat: $dm = \sigma \cdot dF = \sigma \cdot f(x) \cdot dx$

Sein Beitrag zum FTM ist:

$$dJ_x = \int_0^{f(x)} y^2 \cdot \sigma \cdot dy \cdot dx = \sigma \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^{f(x)} \cdot dx = \frac{1}{3} \sigma \left[f(x)\right]^3 dx$$

$$dJ_y = x^2 \cdot \sigma \cdot f(x) \cdot dx$$

und daraus ergibt sich durch Integration und unter Berücksichtigung von $J_p = J_x + J_y$:

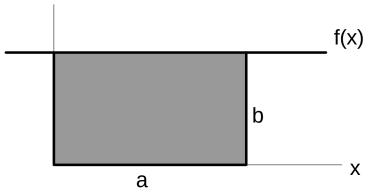
Satz1: Die FTM einer homogen auf die Fläche unter einer stetigen Kurve verteilten Masse berechnen sich wie folgt:

$$J_x = \frac{\sigma}{3} \int_a^b \left[f(x)\right]^3 dx$$

$$J_y = \sigma \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx$$

$$J_p = J_x + J_y$$

Bsp 1: Berechnen Sie die axialen und das polare FTM eines Rechtecks mit den Seiten a und b in Bezug auf eine Drehachse in den Seiten beziehungsweise senkrecht in einem Eckpunkt des Rechtecks.



$m = \sigma \cdot a \cdot b$

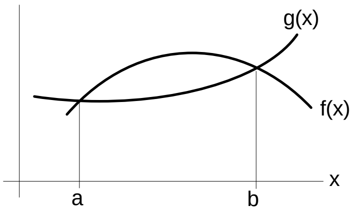
begrenzende Funktion: $f(x) = b$

$$J_x = \frac{\sigma}{3}\int_0^a b^3\,dx = \frac{\sigma}{3} b^3 \cdot x \Big|_0^a = \frac{\sigma}{3} b^3 a = \frac{1}{3} m b^2$$

$$J_y = \sigma \int_0^a x^2 b\,dx = \sigma b \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{\sigma}{3} b a^3 = \frac{1}{3} m a^2$$

$$J_p = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$$

Für eine zwischen zwei stetigen Funktionen f(x) und g(x) liegende Fläche ergibt sich das FTM durch Subtraktion der einzelnen FTM's :



$$J_x = J_{x(f)} - J_{x(g)}$$
$$J_y = J_{y(f)} - J_{y(g)}$$

Oder zusammengefasst:

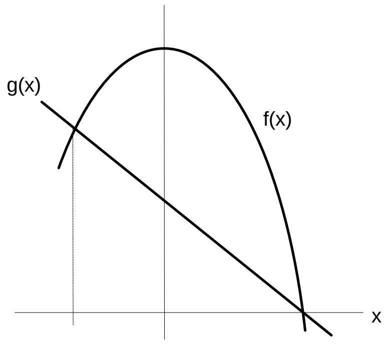
Satz2: Das FTM einer homogen mit Masse belegten Fläche zwischen zwei stetigen Funktionen f(x) und g(x) ergibt sich wie folgt:

$$J_x = \frac{\sigma}{3}\int_a^b \left\{ [f(x)]^3 - [g(x)]^3 \right\} dx$$

$$J_y = \sigma \int_a^b \left\{ x^2 \cdot [f(x) - g(x)] \right\} dx$$

$$J_p = J_x + J_y$$

Bsp 2: Berechnen Sie die axialen und das polare FTM der zwischen $f(x) = -0.5\,x^2 + 8$ und
$g(x) = -x + 4$ liegenden Fläche.



$f \cap g$: $-0.5\,x^2 + 8 = -x + 4 \rightarrow -0.5\,x^2 + x + 4 = 0$

$\rightarrow x_1 = -2\,;\; x_2 = 4$

$$m = \sigma \int_{-2}^{4} \left[-0.5\,x^2 + 8 - (-x+4)\right] dx =$$

$$= \sigma \int_{-2}^{4} \left[-0.5\,x^2 + x + 4\right] dx =$$

$$= \sigma \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]\Big|_{-2}^{4} = \sigma\left[13.33 - (-4.67)\right] = 18\,\sigma$$

Zwischenrechnung: $\left[f(x)\right]^3 = -\frac{1}{8}x^6 + 6\,x^4 - 96\,x^2 + 512$

$\left[g(x)\right]^3 = -x^3 + 12\,x^2 - 48\,x + 64$

$$J_x = \frac{\sigma}{3} \int_{-2}^{4} \left[-\frac{1}{8}x^6 + 6\,x^4 + x^3 - 108\,x^2 + 48\,x + 448\right] dx =$$

$$= \frac{\sigma}{3} \left[-\frac{1}{56}x^7 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 36\,x^3 + 24\,x^2 + 448\,x\right]\Big|_{-2}^{4} =$$

$$= \frac{\sigma}{3}\left[872.229 - (-544.114)\right] = 472.114\;\sigma = 26.229 \cdot m$$

$$J_y = \sigma \int_{-2}^{4} \left[x^2 \cdot (-0.5\,x^2 + x + 4)\right] dx = \sigma \int_{-2}^{4} (-0.5\,x^4 + x^3 + 4\,x^2)\; dx =$$

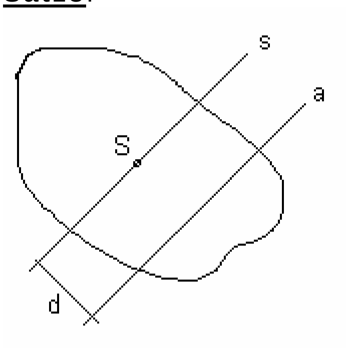
$$= \sigma \left[-\frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]\Big|_{-2}^{4} =$$

$$= \sigma\left[46.993 - (-3.467)\right] = 50.4\;\sigma = 2.8 \cdot m$$

$$J_p = J_x + J_y = 29.029 \cdot m$$

2. Der Satz von Steiner

Satz3:

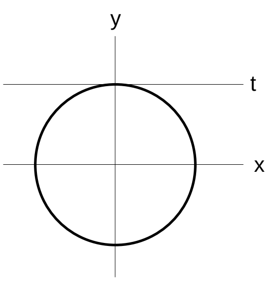


Das Trägheitsmoment J_a einer Masse m in Bezug auf eine Drehachse a ist gleich der Summe des Trägheitsmoments J_s dieser Masse bezüglich einer durch den Schwerpunkt S gehenden, zu a parallelen Achse und dem Produkt $m \cdot d^2$, wo d der senkrecht gemessene Abstand zwischen den beiden Achsen ist.

$$J_a = J_s + m \cdot d^2$$

Bsp 3: Berechnen Sie das axiale FTM einer Kreisscheibe mit Radius r

a) um einen Durchmesser
b) um eine Tangente
c) das polare FTM für eine im Kreismittelpunkt senkrecht stehende Achse



$$m = r^2 \cdot \pi \cdot \sigma$$
$$J_x = J_y$$
$$J_p = J_x + J_y$$

a) $$J_x = 2 \cdot \frac{\sigma}{3} \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{2\sigma}{3}\left[\frac{1}{4}\left\{x \cdot \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^3 + \frac{3}{2} r^2 x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{3}{2} r^4 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right\}\right]\Bigg|_{-r}^{r} =$$

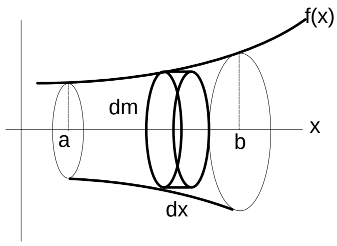
$$= \frac{2\sigma}{3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} r^4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2} r^4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{4} r^4 \pi \sigma = \frac{1}{4} m r^2$$

b) Daraus mit dem Satz von Steiner:

$$J_t = J_x + m \cdot r^2 = \frac{5}{4} m r^2$$

c) und schliesslich: $$J_p = J_x + J_y = \frac{1}{2} m r^2$$

3. Das Trägheitsmoment von Rotationskörpern (RTM)



Der Rotationskörper wird in lauter gleich breite Kreisscheib-
chen der Breite dx und der Masse $dm = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot dx$ unterteilt.

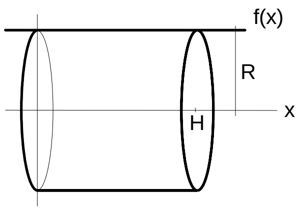
Der Beitrag eines einzelnen Scheibchens an das polare TM
bezüglich der Rotationsachse ist nach Bsp 3, p.33:

$$dJ_p = \frac{dm \cdot r^2}{2} = \frac{\rho \cdot \pi}{2} r^4 \, dx$$ und mit $r = f(x)$ folgt daraus:

Satz4: Das Trägheitsmoment eines durch die Fläche unter f(x) erzeugten Rotationskörpers bezüglich seiner Rotationsachse ist:

$$J = \frac{\rho \cdot \pi}{2} \int_a^b [f(x)]^4 \, dx$$

Bsp 4: Berechne das RTM eines Zylinders der Höhe H und Grundkreisradius R ($\to$ f(x) = R)



$$J = \frac{\rho \cdot \pi}{2} \int_0^H R^4 \, dx = \frac{\rho \cdot \pi \cdot R^4}{2} \, x \Big|_0^H =$$

$$= \frac{\rho \cdot \pi \cdot R^4}{2} H = \frac{1}{2} M R^2$$

Bsp 5: Bereche das RTM eines Hohlzylinders der Höhe H mit Aussenradius R und Innenradius r.

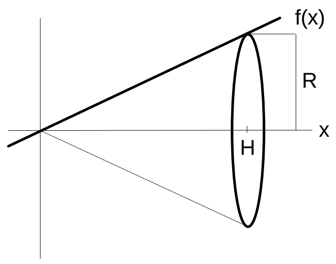
$$M = \rho \cdot \pi \cdot H \cdot (R^2 - r^2)$$

$$J = \frac{1}{2} \rho \cdot \pi \cdot H \cdot R^4 - \frac{1}{2} \rho \cdot \pi \cdot H \cdot r^4 = \frac{1}{2} \rho \cdot \pi \cdot H \cdot \left[R^4 - r^4\right] \cdot \frac{M}{\rho \cdot \pi \cdot H \cdot \left[R^2 - r^2\right]} = \frac{1}{2}(R^2 + r^2) \cdot M$$

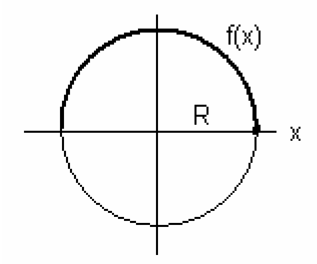
Beachten Sie:

Das RTM eines Hohlzylinders ist grösser als das eines Vollzylinders bei gleicher Masse M !

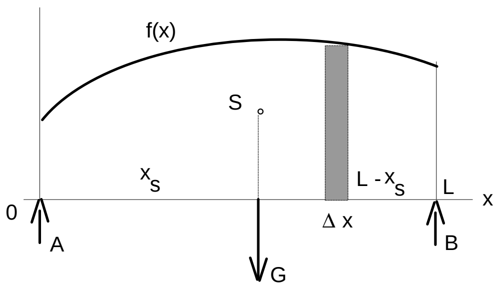
Bsp 6: Berechnen Sie das RTM eines Kreiskegels mit Höhe H und Grundkreisradius R.



Bsp 7: Berechnen Sie das RTM einer Kugel mit Radius R.



§ 8 BALKEN MIT UNGLEICHMÄSSIGER STRECKENLAST



Die Belastungsfunktion f(x) gibt über jedem Punkt x ($0 \le x \le L$) des Balkens die dort wirkende vertikale Belastung an.

Die Funktion f(x) hat also die Dimension einer Kraft. Nach oben gerichtete Kräfte werden mit einem positiven Vorzeichen versehen.

Der Ursprung des gewählten Koordinatensystems liege im linken Auflagepunkt des Balkens, die x-Achse zeige in Balkenrichtung und die Belastung sei durch eine im Intervall von x = 0 bis x = L stetige Belastungsfunktion f(x) gegeben.

Für die Gesamtlast ist dann natürlich $G = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\cdot\Delta x$ und daher mit Grenzwertbildung:

$$G = -\int_0^L f(x)\,dx \qquad (1)$$

[Die Gesamtlast lässt sich also als Fläche unter f(x) interpretieren]

Stellt man sich die Gesamtlast G im Schwerpunkt $S(x_s / y_s)$ angreifend vor, so lässt sich nach Satz2, p. 21 herleiten:

$$x_s \cdot G = -\int_0^L x\cdot f(x)\,dx \quad \text{woraus } x_s \text{ berechnet werden kann} \qquad (2)$$

Da die Lasten auf die beiden Auflager A und B mit der Gesamtlast G im Gleichgewicht sein müssen, gilt, dass die Summe der wirkenden Kräfte und die Summe der wirkenden Drehmomente über den ganzen Balken = 0 sein müssen:

$$A + B + G = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma M = 0 \qquad (3)$$

Liegt der Drehpunkt im linken Auflager, so ist also: $\Sigma M = B \cdot L + G \cdot x_s = 0$;
liegt der Drehpunkt im rechten Auflager, so ist: $\Sigma M = A \cdot L + G \cdot (L - x_s) = 0$.

Daraus folgt sofort:

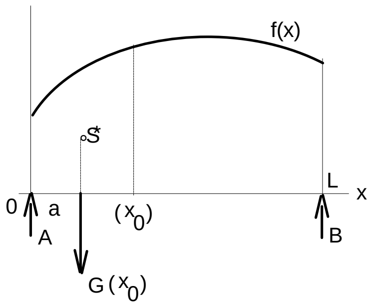
$$A = -G\cdot\frac{L - x_s}{L} \quad \text{und} \quad B = -G\cdot\frac{x_s}{L} \qquad (4)$$

Im folgenden wird angenommen, dass die innerhalb des Balkens wirkenden Längskräfte (Durchbiegung, Deformation) vernachlässigt werden können.

Die Querkraft $Q(x_0)$ für einen beliebigen Schnitt an der Stelle x_0 $(0 \le x_0 \le L)$ ist die Summe aller senkrechten Kräfte vom linken Auflager bis zur Schnittstelle x_0 , das heisst, die Summe der Auflagekraft A (positiv) und der Last $G(x_0)$ auf den Balken auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = x_0$

Nach (1) ist natürlich $G(x_0) = -\int_0^{x_0} f(x)\,dx$ und daher ist:

$$Q(x_0) = A - \int_0^{x_0} f(x)\,dx \qquad (5)$$



Das Drehmoment $M(x_0)$ an der Schnittstelle x_0 ist die Summe aller links von x_0 angreifenden Momente bezogen auf die Stelle x_0 .

Also ist:

$$M(x_0) = A\cdot x_0 + G(x_0)\cdot(x_0 - a) = A\cdot x_0 + G(x_0)\cdot x_0 - G(x_0)\cdot a$$

wobei a die x-Koordinate des Schwerpunkts S* der Teilfläche $G(x_0)$ ist.

Da sich a nach Satz2, p. 21 mittels: $a\cdot G(x_0) = -\int_0^{x_0} x\cdot f(x)\,dx$ berechnen lässt,

ergibt sich:

$$M(x_0) = A\cdot x_0 - x_0 \cdot \int_0^{x_0} f(x)\,dx + \int_0^{x_0} x\cdot f(x)\,dx \qquad (6)$$

Aus dem Vergleich der Formeln (5) und (6) erkennt man leicht:

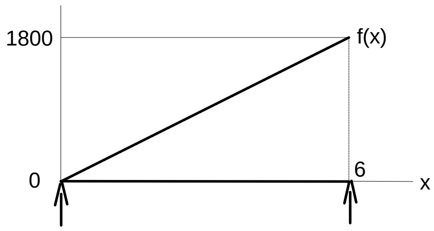
$$M'(x_0) = Q(x_0) \quad \text{und} \quad Q'(x_0) = -f(x_0) \qquad (7)$$

<u>Def 1</u>: Die Schnittstelle x_k mit extremalem Drehmoment heisst <u>kritischer Punkt</u>. Es ist nach Formel (7) derjenige Punkt des Balkens, wo die Querkraft gerade = 0 ist.

kritischer Punkt: $M'(x_k) = Q(x_k) = 0 \quad \rightarrow \quad x_k \qquad (8)$

Bsp 1: Die Belastung eines Balkens der Länge L = 6 [m] werde durch die Belastungsfunktion
$f(x) = 300 \cdot x$ [N] gegeben.

Berechnen Sie die Gesamtlast G, die Auflagerkräfte A und B, die Querkraft $Q(x_0)$ und das Drehmoment $M(x_0)$ für eine beliebige Stelle x_0 des Balkens und für die Balkenmitte
$x_0 = 3$ [m] sowie die Lage des kritischen Punktes x_k .



(1) $$G = -\int_0^6 300\,x\,dx = -150\,x^2 \Big|_0^6 = -5'400\ [\mathrm{N}]$$

(2) $$x_s \cdot G = -5'400\,x_s = -\int_0^6 300\,x^2\,dx =$$
$$= -100\,x^3 \Big|_0^6 = -21'600 \quad \rightarrow \quad x_s = 4\ [\mathrm{m}]$$

(4) $$A = 5'400 \cdot \frac{6-4}{6} = 1'800\ [\mathrm{N}]\ ; \qquad B = 5'400 \cdot \frac{4}{6} = 3'600\ [\mathrm{N}]$$

(5) $$Q(x_0) = 1'800 - \int_0^{x_0} 300\,x\,dx = 1'800 - 150\,x^2 \Big|_0^{x_0} = 1'800 - 150\,x_0^{\,2}$$

(6) $$M(x_0) = 1'800\,x_0 - x_0 \int_0^{x_0} 300\,x\,dx + \int_0^{x_0} 300\,x^2\,dx = 1'800x_0 - x_0 \cdot 150\,x^2 \Big|_0^{x_0} + 100\,x^3 \Big|_0^{x_0} =$$
$$= 1'800\,x_0 - 150\,x_0^{\,3} + 100\,x_0^{\,3} = 1'800\,x_0 - 50\,x_0^{\,3}$$

Für die Balkenmitte ergibt sich also:

$Q(3) = 1'800 - 150 \cdot 3^2 = 450$ [N]

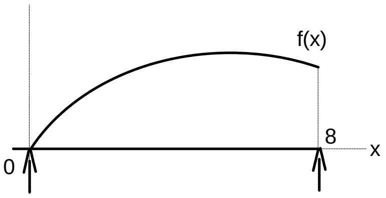
$M(3) = 1'800 \cdot 3 - 50 \cdot 3^3 = 4'050$ [Nm]

(8) $$Q(x_k) = 0 \quad \rightarrow \quad 1'800 - 150\,x_k^{\,2} = 0 \quad \rightarrow \quad x_k = 3.46\ [\mathrm{m}]$$
$$M_{max} = M(x_k) = 4'157\ [\mathrm{Nm}]$$

Bsp 2: Die Belastung für einen L = 8 [m] langen Balken sei durch die Belastungsfunktion

$f(x) = 800 \cdot \sin\left(\frac{x}{4}\right)$ [N] gegeben.

Berechnen Sie die gleichen Grössen wie in Bsp 1.



(1) G =

(2) $x_s \cdot G$ =

= → x_s

(4) A = ; B =

(5) $Q(x_0)$ =

(6) $M(x_0)$ =

Balkenmitte: Q(4) = M(4) =

(8) $Q(x_k) = 0$ →

→ x_k = M_{max} =

Übungen zu § 1

1. Versuchen Sie analog zum Bsp. 1. p. 3, das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = x^3$ zu finden.

Zur Herleitung brauchen Sie die Formel:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

2. Was vermuten Sie allgemein für das bestimmte Integral von $f(x) = x^n$ $(n \in \boldsymbol{N})$?

Übungen zu § 2

1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale zunächst formal und überprüfen Sie die Resultate hinsichtlich Genauigkeit mit dem numerischen Verfahren des Taschenrechners:

a. $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \, dx$ b. $\int_0^{10} x \, dx$

c. $\int_0^2 (7x^4 - 3x^2) \, dx$ d. $\int_1^2 \frac{1}{x^3} \, dx$

e. $\int_2^6 (1 - \frac{1}{x}) \, dx$ f. $\int_0^1 (\sin x - \cos x + 1) \, dx$

g. $\int_1^3 \frac{1+x}{x} \, dx$ h. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$

i. $\int_0^3 e^x \, dx$ j. $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx$

2. Berechnen Sie die vom Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$ und der x-Achse begrenzte Fläche.

3. Berechnen Sie das vom Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$ und der x-Achse begrenzte Flächenstück.

4. Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen f(x) und g(x).
$f(x) = \frac{1}{9}x^2 + 1$; $g(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 3$

5. Die Fläche zwischen $f(x) = -x^3 + 3x$ und der x-Achse innerhalb des 1. Quadranten wird durch die Winkelhalbierende g(x) = x in zwei Stücke zerlegt. Berechnen Sie diese.

6. Die Parabel 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat im Punkte P(1/4) eine waagrechte Tangente und in Q(0/2) ihren Wendepunkt.

   a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c und d.

   b) Berechnen Sie die Fläche unter f(x) von x = 0 bis x = 2.

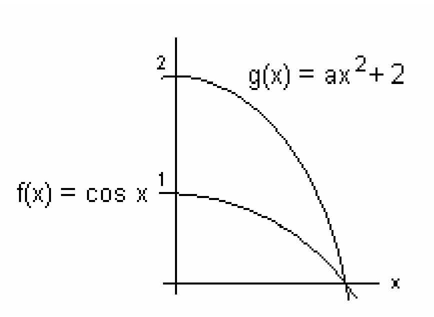
7. Bestimmen Sie die Fläche zwischen den beiden positiven Koordinatenachsen, dem Graphen von

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{1+x^2}$$ und der Vertikalen im Minimum von f(x).

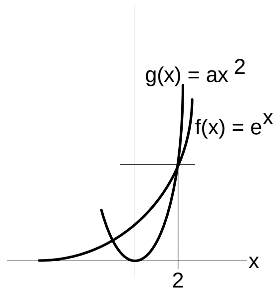
8. Bis zu welcher oberen Grenze t ist die Fläche unter $f(x) = +\sqrt{x}$ von x = 0 aus zu erstrecken, damit sie genau F = 8 [E²] misst ?

9. Berechnen Sie bei den beiden untenstehenden Skizzen je zuerst den Koeffizienten a der quadratischen Parabel g(x) und anschliessend die schraffierte Fläche.

a)



b)



10. Die unter $f(x) = e^x$ liegende Fläche im Abschnitt von x = 0 bis x = 5 soll durch zwei vertikale Geraden g und h in drei gleiche Teile geteilt werden.

Wo schneiden g und h die x-Achse ?

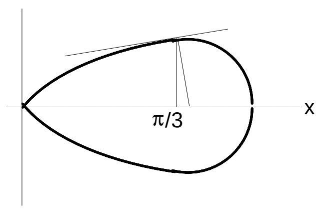
11. Der symmetrische Querschnitt eines Abwasserrohres besteht aus je einem Bogen der beiden Kurven k_1 : $x^2 - 4y - 16 = 0$ und k_2 : $x^2 + y^2 - 4y - 16 = 0$.

Wie gross ist die Querschnittsfläche des Rohrs ?

12. Die Graphen von f(x) = sin x und g(x) = 1 - cos x schliessen zwei verschieden grosse Flächenstücke ein. Berechnen Sie diese.

13. Der Querschnitt eines Tropfens wird in seinem ersten Abschnitt durch f(x) = sin x begrenzt. An der Stelle x = **###**/3 geht die Kurve ohne Knick in einen Kreisbogen über.

Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Tropfens.



14. Gegeben die Funktion $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{4x}{11}$

Gesucht die linke Begrenzung x = t eines vertikalen Streifens der Breite 3 so, dass die unter f(x) liegende Fläche in diesem Streifen minimal wird.

15. Eine sich nach unten öffnende quadratische Parabel hat ihren Scheitel in S(0/3).

Wie lautet ihre Gleichung, wenn ihr Graph mit den beiden positiven Koordinatenachsen eine Fläche von $F = 8$ [E^2] einschliessen soll ?

Übungen zu § 3

1. Berechnen Sie die Arbeit A welche nötig ist, um eine Feder mit der Federkonstanten $k = 8$ [Nm^{-1}] von der Länge $a = 0.2$ [m] auf die Länge $b = 0.35$ [m] auszudehnen.

2. Die Feder eines Prellbocks hat die Federkonstante $k = 4 \cdot 10^6$ [Nm^{-1}]. Berechnen Sie die Arbeit, die geleistet wird, wenn ein Güterwagen die Feder um $x = 0.025$ [m] zusammendrückt.

3. Berechnen Sie die Arbeit, die geleistet wird, wenn ein 70 [kg] schwerer Mann von Meereshöhe aus auf einen 1'000 [m] hohen Berg steigt.

Übungen zu § 4

1. Berechnen Sie die Bogenlänge des Graphen der Funktion $f(x) = x^{3/2}$ ($\rightarrow$ Neill'sche Parabel)
im Abschnitt von $x = 0$ bis $x = 6$

2. Berechnen Sie den Umfang der Ellipse mit den Hauptachsen $a = 8$ [cm] und $b = 6$ [cm].

3. Berechnen Sie die Bogenlänge des Graphen der Funktion $f(x) = \ln x$ im Abschnitt von
$x = 1$ bis $x = 5$.

4. Gegeben die sogenannte Astroide A: $x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}$

   a) Zeichnen Sie die Kurve für $r = 10$

   b) Berechnen Sie die eingeschlossene Fläche

   c) Bestimmen Sie den Umfang der Figur

5. Berechnen Sie die Länge der Flugbahn eines in einer horizontalen Ebene abgefeuerten Geschosses. Abschusswinkel $\alpha = 30°$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 300$ [ms^{-1}],
ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Übungen zu § 5

1. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung der Fläche zwischen

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ und der x-Achse entsteht.

2. Berechnen Sie das Volumen der "Zwiebelhaube", die die Fläche unter $f(x) = 1 + \sin x$ im Abschnitt von $x = 0$ bis $x = 3\pi/2$ erzeugt.

3. Ein Fass entsteht durch Rotation des Mittelteils einer Ellipse um deren grosse Hauptachse. Es hat einen grössten Durchmesser von D = 6 [dm], einen kleinsten Durchmesser von d = 4 [dm] und die Länge L = 8 [dm].

Berechnen Sie den Inhalt des Fasses in [dm^3].

4. Berechnen Sie das Volumen des Torus, der durch Rotation eines Kreises mit Radius r um eine Achse entsteht, die vom Kreismittelpunkt die Entfernung R hat ($R>r$).

5. Ein Stromlinienkörper entsteht dadurch, dass man die Ellipse E: $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ samt ihren beiden Tangenten in $x = 6$ um die x-Achse rotieren lässt.

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

6. Berechnen Sie die Mantelfläche des Körpers, der bei Rotation der Fläche unter $f(x) = x^3$ um die x-Achse im Abschnitt von $x = 0$ bis $x = 2$ entsteht.

7. Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationsellipsoids mit den Hauptachsen a = 8 [cm], b = c = 6 [cm].

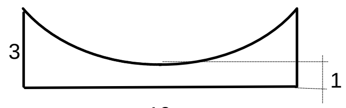
Übungen zu § 6

1. Berechnen Sie die Lage des Schwerpunkts eines Halbkreisbogens mit Radius r

    a) allgemein

    b) für r = 10 [cm]

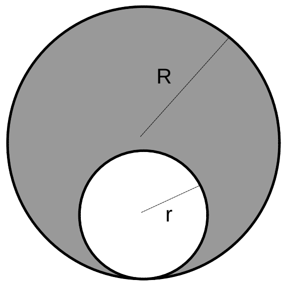
2. Berechnen Sie den Schwerpunkt der nebenstehend skizzierten Fläche unter dem Bogen einer quadratischen Parabel



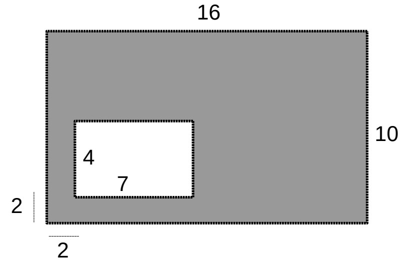
3. a) Berechnen Sie den Schwerpunkt der schraffierten Fläche allgemein für die Radien R und r

    b) Für R = 12 [cm] und r = 6 [cm]

    c) Bestimmen Sie das Verhältnis $\mu = r : R$ so, dass der Schwerpunkt auf den Rand der Fläche zu liegen kommt.

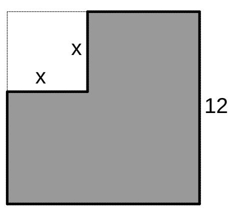


4. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts der nebenstehend skizzierten Fläche (Massangaben in [cm]).



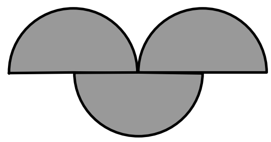
5. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts der schraffierten Fläche allgemein als Funktion von x (Massangaben in [cm]).

    Wie gross müsste x sein, damit der Schwerpunkt genau auf die einspringende Ecke der Fläche zu liegen kommt ?

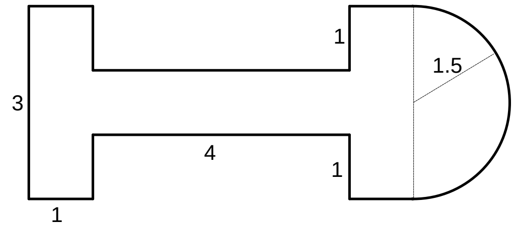


6. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Fläche unter $f(x) = e^x$ im Abschnitt von $x = -1$ bis $x = +1$

7. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts der nebenstehenden Figur, welche aus drei gleichen Halbkreisen mit Radius r = 6 [cm] zusammengesetzt ist.



8. Berechnen Sie den Schwerpunkt der nebenstehend skizzierten zusammengesetzten Fläche.



9. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts des Halbellipsoids mit den Achsen a = 12 [cm] und b = c = 9 [cm].

10. Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Rotationskörpers, der von der Fläche unter

$$f(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$ im Abschnitt von x = 0 bis x = 6 erzeugt wird.

11. Bestimmen Sie mit Hilfe der Guldin'schen Regel das Volumen des spindelartigen Körpers, der entsteht, wenn ein gleichseitiges Dreieck um eine seiner Seiten rotiert.

Übungen zu § 7

1. Berechnen Sie für ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge s = 6

   a) das axiale Flächenträgheitsmoment J bezüglich einer Dreiecksseite

   b) das polare Flächenträgheitsmoment J bezüglich einer in einem Eckpunkt senkrecht stehenden Achse

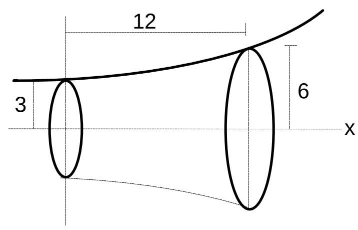
   c) das polare Flächenträgheitsmoment J bezüglich der im Schwerpunkt senkrecht stehenden Achse.

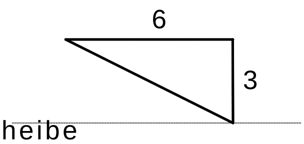
2. Berechnen Sie das Rotationsträgheitsmoment J eines Rotationsellipsoids mit den Achsen a = 8 [cm], b = c = 6 [cm].

3. Berechnen Sie das Rotationsträgheitsmoment J eines Torus, Radius der Körperseele R, Radius des Querschnitts r.

4. Nebenstehend skizzierte Vase werde durch die Fläche unter einer quadratischen Parabel erzeugt (Massangaben in [cm]).

   Bestimmen Sie die Lage ihres Schwerpunkts und ihr Rotationsträgheitsmoment J bezüglich der Rotationsachse.





Drehachse

5. Nebenstehendes Dreieck erzeugt bei der Rotation um die eingezeichnete Achse das Kopfstück der Scheibe einer Spitz-Schleifmaschine.

   Berechnen Sie das Rotationsträgheitsmoment J dieser Scheibe als Vielfaches ihrer Masse M.

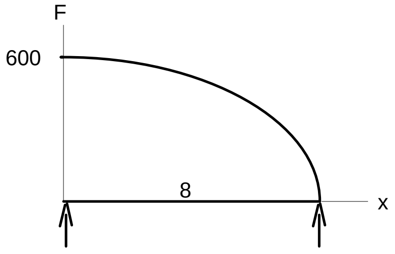
Übungen zu § 8

Berechnen Sie G, A, B, $Q(x_0)$, $M(x_0)$, x_k und M_{max} für die drei folgenden Fälle:

1. Balkenlänge L = 8 [m] ; Belastungsfunktion $f(x) = -25 \cdot x^2 + 1600$ [N]

2. Balkenlänge L = 5 [m] ; Belastungsfunktion $f(x) = 1'000 \cdot e^{0.1\,x}$ [N]

3. Die Belastungsfunktion über einem Balken der Länge L = 8 [m] zeigt eine vollständige Viertelellipse so, dass die Belastung am linken Balkenende F_{li} = 600 [N], am rechten Balkenende F_{re} = 0 [N] misst.



Ende

Ende