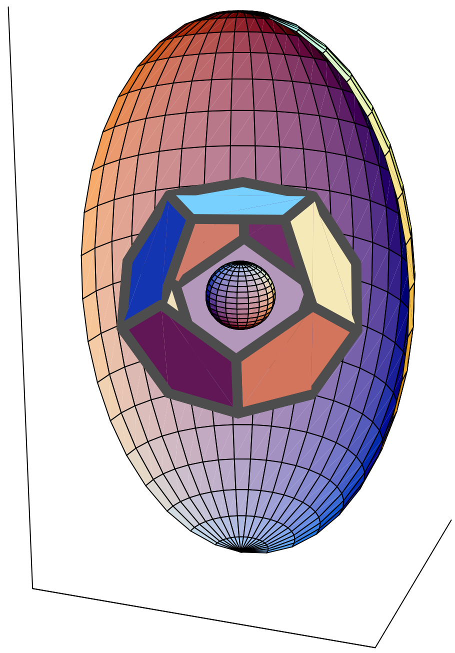
Script ◇ Math ◇ Ing
◇ Grundlagen ◇
für Ingenieure und Architekten



von

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel // Neu: Berner FH, HTA-Biel // BFH, HTI–HSB

Nach den NeXT–Crash von 1999 restauriert, Ausgabe vom 18. Oktober 2005, N.V. 1.02 / d (f)

WIR/NeXT/1993/1996/1999/2005/LaTex/KursEinf.tex

Ehemals Teil 1 und 5 des Repetitoriums und Textbuchs zur Begleitung und Ergänzung des Unterrichts.
Geplante Anzahl Teile, Reihenfolge, Gliederung: Im Jahre 1993 noch offen. (Wurde laufend ergänzt und neu gegliedert.)
Produziert mit LaTeX auf NeXT-Computer, restauriert mit PCTeX unter Win98/XP.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

1999 hat der Autor einen Computer–Crash erlebt. Infolge des dadurch provozierten Systemwechsels haben einige Graphiken gelitten. Sie werden neu erstellt, sobald die Zeit dafür vorhanden ist.

Steh auf, schalt dein Gehirn ein und konzentriere deine Gedanken...

oder nimm dein Bett und geh!

Bieler Adresse des Autors:

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Hochschule für Technik und Informatik (HTI), Berner Fachhochschule (BFH)
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ingenieurschule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997)
Quellgasse 21
Postfach 1180
CH-2501 Biel-Bienne
Tel. (..41) (0)32 266 111 (alt), neu 3216 111, direkt (..41) (0)32 3216 267

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

Kapitel • Chapitre 1

Einführung

Dieses Buch ist entstanden, um den angehenden Ingenieurstudenten in Biel den Zugang zur Mathematik zu erleichtern. Sein Zweck ist es, einen Begleit- und Ergänzungstext zum Kurs darzubieten. Wenn das momentane Planungsziel eingehalten werden kann, so sollen es einst 24 Teile sein, die einen ungefähren Überblick über die an der Ingenieurschule Biel behandelte Mathematik geben wollen. Dabei wird der Umfang wohl etwas ausgedehnt werden, denn der Inhalt soll beständig sein gegen kommende technische Veränderungen. Und er soll dem Studenten zudem auch etwas bieten. Ist das heute noch einem angehenden Studierbereiten noch zuzutrauen? Und wird diese Mathematik eine schwierige Sache sein?
Von Euklid wissen wir, dass es zu seiner Geometrie keinen Königsweg gibt. Kann es vielleicht dann für Ingenieure einen speziell einfachen Weg zur Mathematik geben, etwa einen *Ingenieurweg*, so für „bildungslose Titelhalter"? Wohl kaum! Ein Kopf kann zu mehr taugen als nur als Hutständer. Lernen wir von denen, die's wissen müssen. Und hören wir gut auf den Ton, falls jemand uns einreden will, „ohne gehe es auch im Ingenieurberuf". Wenn wir von den grossen Taten berühmter Leute hören, so bleibt es meistens sehr still um den dahinter versteckten Leidensweg. So z.B. vernehmen wir in der Geschichte immer wieder von Napoleon's grossen Schlachten. Andere Dinge von diesem vielgeliebten und vielgehassten Korsen toskanischer Abstammung bleiben in Schweigen gehüllt. Da warten wir vielfach vergebens, bis ein Historiker uns erzählt, dass dieser Mann auch einen mathematischen Satz entdeckt und bewiesen hat, was sicher nur mit sehr grossem Einsatz möglich war. Weiss man, dass Napoleons Lehrer der bekannte Mathematiker Laplace war, so wird einem klar, was Schulung später für Konsequenzen hat. Einsatz ist es allemal, das zum Sieg führt. Was wird aber nun für uns der Weg sein, auf dem von uns so viel „Einsatz" gefordert ist? Was ist der Zoll beim Grenzübertritt zum Studium?
In dieser Einführung wollen wir zuerst auf die menschlichen Voraussetzungen eingehen, die notwendig sind, um Mathematik erfolgreich erlernen zu können. Und dann erst gehen wir über zum Fache selbst. Dabei wollen wir neben der natürlichen Strenge und Kernigkeit dieser Sache „Mathematik" aber auch die anderen Seiten nicht zu kurz kommen lassen, denn Trockenheit erzeugt Durst, und dieser könnte auf Wege führen, die mehr als nur den Durst stillen. Es geht da nicht ohne ein nötiges Mass an Strenge. Und auch nicht ohne Einsicht in das Geschehen im Menschen bei der Einarbeitung in ein Fach. Was im Menschen beim Lernen vor sich geht, wird eine wichtige Frage sein. Auch hier kann einer Fachmann werden — oder auch nur benachteiligter Laie bleiben. Und nicht nur wir sollen zur Mathematik kommen. Nein, wir sind keine Gefangenen, wir sind freie Menschen. Die Mathematik soll auch zu uns kommen. Wir kommen nicht aus ohne eine zünftige Portion Humor sowie ohne ein Menschenbild. Dies obwohl ein solches Bild nie neutral, unpolitisch und richtungslos sein kann. Denn sonst wäre eine solche Vorstellung, ein solches Bild, nur ein Manipulationsinstrument; also Dir nicht zu Diensten, sondern letztlich zum Verdruss.
So wollen wir davon ausgehen, dass der Mensch nicht nur einen Wert hat; der Mensch hat vor allem eine Würde! So heisst es im Einleitunggstext zum *DIYMU* (Vgl. (Bibl. wirz) [1]) : „Der ... auszubildende Mensch ... ist kein Kaufobjekt mit einem Preis auf einem Markt, er ist kein Sklave. Er gehört weder zu den Möbeln in einem Inventar noch zu den Aktiven in der Bilanz einer Firma. Er ist frei. Doch

der Mensch kann Wert gewinnen! Er kann sich zusätzlich zu seiner Würde als nützliches Glied der Gesellschaft, in der er eingebettet ist, wertvoll erweisen durch seine Taten. Vor seinem Wert steht aber seine Würde und mit ihr die Freiheit. Doch *für seinen Wert steht die Note.* Die misst seine Nützlichkeit im Fach, für die sie steht, doch schmälert sie nie seine Würde in der Gesellschaft, in der er sich wertvoll betätigt. So seien wir Menschen — versuchen wir wertvolle Menschen zu sein!“ Also Ingenieurstudenten, seien wir erst Menschen, bevor wir Ingenieure sind!

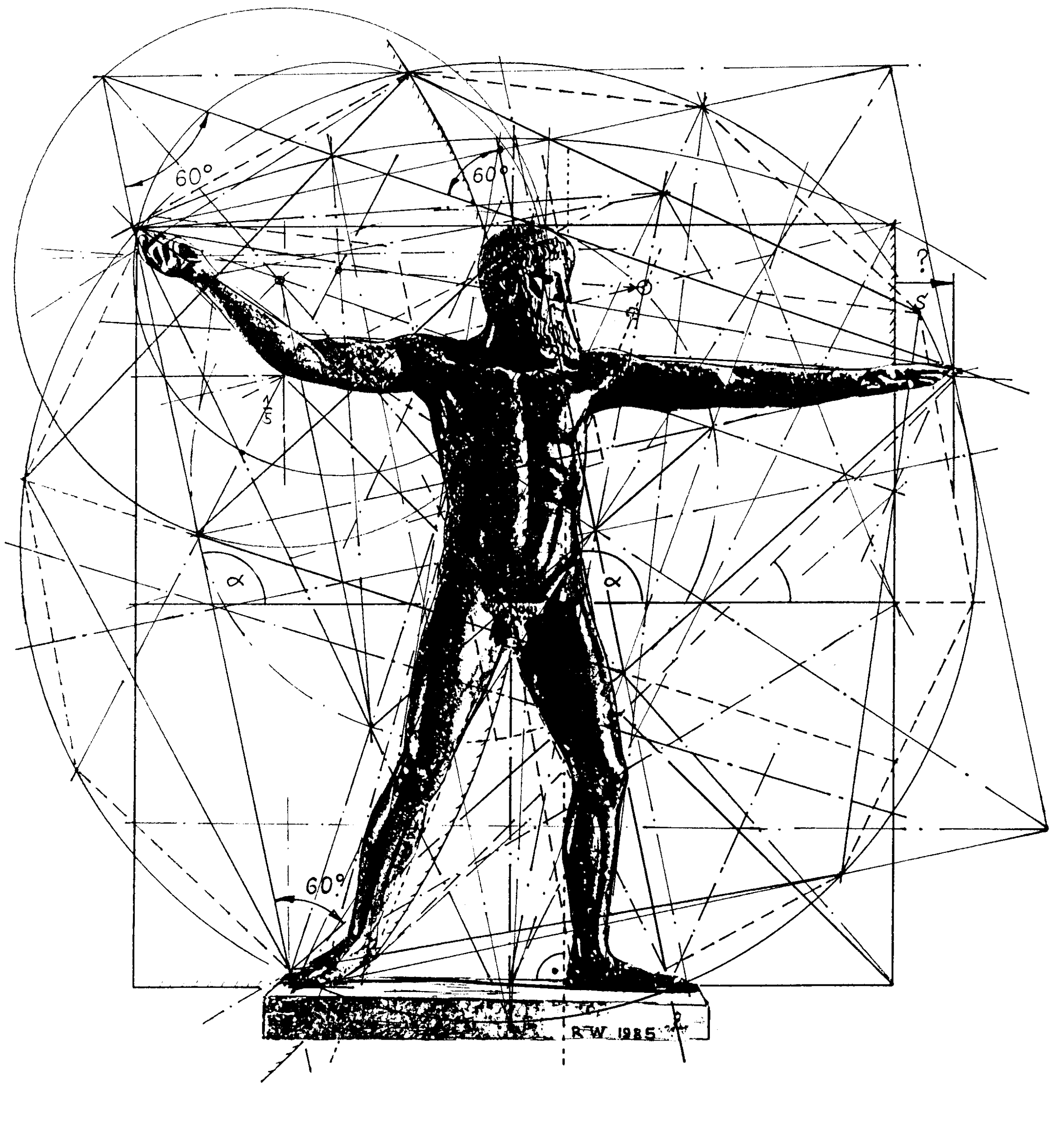
Im Herbst 1993 Der Autor

Auch ein Weg von tausend Meilen beginnt mit einem Schritt ...

Chinesische Weisheit

[1] Übungsbuch *DIYMU*: „An Stelle einer Einleitung“(Bibl.: wirz)

Abbildung 1.1: Das Standbild eines griechischen Gottes in der Geometrie



Bildnachweis: Exakte Nachzeichnung nach einer Photographie eines originalgetreuen Abgusses in der Skulpturenhalle Basel. Das Original des Abgusses befindet sich im griechischen Nationalmuseum Athen.

Kapitel • Chapitre 2

Die Mathematik im Rahmen des Studiums

2.1 Ziel, Weg und Rechtssituation des Studenten

Hier wollen wir nochmals kurz wiederholen, was schon im *DIYMU*[2] Einführung und Studienjahrorganisation Mathematik, ... Pädagogische Hinweise und Rahmen (Bibl.: wirz) ausführlich besprochen worden ist. Doch bevor man richtig beginnen kann, muss der Rahmen passen. Bei Studienbeginn stellen sich erst einige Grundfragen, deren Nichtbehandlung verheerend sein kann. Die Bedingungen müssen klar sein. Die Arbeit kann nur im richtigen und erprobten Geist gedeihen.
Mit welchen Zielen beginnt man da? — Man will einmal ein Diplom, eine Staatsgarantie für sein Können. Man will Erfolg. Und ein ganzes Berufsleben soll gebaut werden auf diese Fundamente. Lange also wird man zehren von der Schule. Und Fakten sind heute so schnellebig. Sind da nun also nicht *allgemeine Methoden wichtiger als nur Fakten*, welche schnell unwichtig werden und vergessen sind? In diesem Sinne werden Zweck und Ziel der Ausbildung an einer Schule vom Gesetzgeber umrissen.
Und nun zum angetretenen Weg: Du hast Talent, willst arbeiten, hast den Willen, hast auch den nötigen Humor und genügend Frustrationstoleranz, um damit schadlos über die Runden zu kommen — was also noch? — Da die Gelehrten nicht vom Himmel fallen, vergesse man nie: **Das Resultat ist immer der Lohn für die eigene Arbeit. Geschenkt bekommt man da nichts. Einsicht ist nicht käuflich!**
Studieren bedeutet ja, „sich um oder für etwas bemühen, sich einer Sache befleissigen, ihr eifrig obliegen, darauf bedacht sein, danach streben, danach trachten, etwas eifrig betreiben und wünschen, Sinn dafür haben“. Also „selber arbeiten, selbständig, unaufgefordert, fleissig, eifrig, mit Ausdauer“. Das heisst *studieren*! Seien wir solche Studenten, die auch *wirklich studieren*, die nicht Sorgen sondern vorzeigbare Resultate bringen. Ungeheuer wichtig und zentral dabei erscheint die im nächsten Kapitel erwähnte *Lerntechnik*.
Zum rechtlichen Rahmen: Voraussetzungen zum Studium sowie Verantwortlichkeiten und Pflichten sind festgelegt worden in den einschlägigen Gesetzen und Reglementen. Auszüge findest Du in *DIYMU*[3], soweit für Dich von Wichtigkeit.

2.2 Zum Stoffinhalt

Abgesehen von den bei manchem Studenten anfänglich vorhandenen Sorgen zum Ziel, heil über die ersten Runden zu kommen, plagt doch manch einen die Frage nach Sinn und Zweck des Stoffes, der da serviert wird. Schliesslich opfert man dafür ja auch freiwillig Zeit, Geld und Kraft. Zum Stoffinhalt taucht oft die Standardfrage auf: „Wo kann man das denn gebrauchen, was der Dozent da vorführt?“

[2] *Do it yourself Mathematik Übungen* (Bibl. wirz)
[3] Vgl. Übungsbuch *DIYMU*: Einführung und Studienjahrorganisation Mathematik (Bibl.: wirz)

Es fällt leicht, darauf eine allgemeine Antwort zu geben: „Das kann man dann wissen und verstehen, wenn man auch einmal soviel Erfahrung hat wie der Dozent". Doch diese Antwort befriedigt manchmal nicht. Ein Beispiel mag da Klarheit schaffen. Was antworte ich meinem Knaben im Kindergartenalter, er mich fragen kommt, ob ein Engel schneller fliegen kann als eine Rakete? Nun, um eine Sache seriös beurteilen zu können, muss man einmal ihren Rahmen sehen. Dann tut es not, diese Sache halt erst selber inhaltlich kennenzulernen. Das heisst also, die Frage nach dem Gebrauch auf später aufsparen und dem kundigen Meister Vertrauen schenken, der da einen führt auf dem Weg zum Studienziel. Auch ist die Frage nach dem Gebrauch keine ideelle, auf Langfristigkeit bedachte Frage, sondern eine utilitaristische, bloss auf die momentane praktische Nützlichkeit abzielende. Was nicht „util", d.h. nützlich ist, scheint auch keinen Wert zu haben. Manch einer braucht eben ein halbes Leben, bis er den Wert eines soliden Grundlagenwissens zu schätzen gelernt hat. Und andere werden bis dann gar uralt — oder kommen gar nie soweit, da sie anderen Zielen nachlaufen. Wertschätzung ist eben mit Einsicht, d.h. mit Erfahrung verbunden. Erfahrung aber muss man erst machen. Solange, bis man eines Tages doch noch so weise wird, dass man dann weiss, was wichtig ist...

Allgemein hat eine Staatsschule immer einen *Bildungsauftrag* (im Eigeninteresse des zahlenden Staats) und einen *Ausbildungsauftrag* (im Interesse um das Ziel der speziellen Sache). Das müssen wir alle akzeptieren, in diese Spannung sind wir gestellt. Vgl. dazu *DIYMU* [3]. In diesem Sinne soll der Ingenieur nach dem Willen des zahlenden Staates vor allem als *Generalist* die Schule verlassen. *Spezialistenausbildung* bleibt Sache der Industrie. Daher lernen wir **Mathematik einmal als Werkzeug**, als Mittel für andere Fächer, aber auch weil es ein **eigenständiges Fach** ist **mit einer unabhängigen Kultur** und einer nicht wegzudenkenden, von vernünftigen Menschen nie angezweifelten **eigenständigen Existenzberechtigung**. Mathematik dient zum unmittelbaren Gebrauch, aber auch auf Vorrat zum späteren Gebrauch. Dazu weiter als Teil der Allgemeinbildung und erwiesenermassen als beste Denkschule. Auch betreiben viele die Mathematik aus reiner Freude an ihr, aus Liebe zur Sache, aus Interesse und nicht bloss aus Zwang. Denn Mathematik hat auch viele schöne Seiten, bietet Harmonie, ist immer klar und rein. Nie wollen wir zulassen, dass daraus „Pfusch" wird. Denken wir doch ein wenig an Euklid (etwa 300 v.Chr.), der von einem Schüler gefragt worden sein soll: „Was kann ich verdienen, wenn ich diese Dinge lerne?" Darauf liess Euklid, wie berichtet wird, einen Skalven rufen und wies diesen an: „Gib ihm drei Obolen! Der arme Mann muss Geld verdienen mit dem was er lernt." Wenn man eine Sache nicht liebt, so kann man sich ihr nie mit Herz und Seele nähern. Dann bleibt da immer eine Wand, die die Sache in vielen Dingen verbirgt und von einem trennt. Sie kann einem dann weder je gehören, noch kann man sie je meistern: Zur Meisterschaft gelangt man somit nie mit einer solchen Haltung. — *Wäre es dann nicht besser, die ungeliebte Sache gleich sein zu lassen, als sie nur halb zu tun?* Und vergessen wir nie den sinngemäss so wiedergegebenen Ratschlag aus der Antike für die gesamte Philosophie und speziell für eines ihrer damaligen geistigen Kinder, nämlich für die Mathematik, der dann so lautet:

Die Mathematik entspringt dem Staunen. Das Staunen durchbricht den Schein des Gewöhnlichen und Alltbekannten. Wenn wir Mathematik lernen wollen, so müssen wir wieder das Staunen lernen.

Es ist einem Ingenieur nicht verboten, etwas Bildung zu haben und mehr in unserer Kultur bewandert zu sein als einer, der noch nie über sein eigenes Fach hinausgesehen hat. Lernen wir hier in diesem Sinne etwas von Euklid, denn er hat auch heute noch viel zu bieten.

Eine Bemerkung zu Euklid und seinen Folgen als Vorbild für Mathematik, Kultur und auch für eine noch heute mögliche Denkhaltung:
Euklid lehrte um etwa 300 v.Chr. in Alexandria. Er ist vor allem bekannt geworden durch seine 13 Bücher, die *Elemente der Geometrie*, kurz „Elemente“ genannt. Das ist ein Werk, aus dem die Gelehrten- und Schulwelt nahezu 2000 Jahre schöpfte. (Das 14. Buch stammt nicht von ihm sondern von Hypsikles, das 15. vermutlich von Damaskios.) Interessant ist, dass Euklid aber wohl kaum beabsichtigt haben kann, ein Schulbuch für etwa kommende Schulsysteme zu schreiben. Auch hat er nicht die Geometrie neu erfunden, sondern nur gesammelt. Doch sinnigerweise ist 13 in der Antike eine magische Zahl gewesen. Wieso hat Euklid es unternommen, ein so gewaltiges Werk zu schreiben? — Bekanntlich baut er in seinem Werk die Geometrie erstmals axiomatisch auf. Er hat somit erstmals der späteren Wissenschaft ein Modell für die axiomatische Methode geliefert, eine beispielhafte Anleitung, wie sowas zu machen ist. Doch aus welchem Grunde tat er das? — Hier die Antwort: In der Philosophie war damals das Problem der regelmässigen, d.h. *Platonischen Körper* ein heisses Problem. Euklid hat es unternommen zu beweisen, *dass es nur 5 Platonische Körper geben kann.* Es ging nicht nur darum zu beweisen, dass die 5 bekannten Körper Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder regelmässig sind. Nein, es ging vor allem darum zu zeigen, dass es keinen einzigen weiteren regelmässigen Körper gibt, obwohl die Zahl der möglichen Körper unbeschrämkt ist. Und wie musste er dabei vorgehen... Auf diesen einzigen Höhepunkt im 13. Buch zielend ist sein Werk ausgelegt! Damit der Beweis widerspruchsfrei, lückenlos und glaubhaft werden konnte, musste er die Geometrie mit Hilfe logischer Prinzipien von Grund auf, d.h. von Axiomen aus deduktiv aufbauen. So ist ein so gewaltiges Werk entstanden, das Jahrtausende überdauert hat...
Wir allerdings wollen hier Euklid nicht mehr weiter verfolgen. **Ziel dieser „Mathematik für Ingenieure“** ist es vielmehr, einerseits den Studenten einen auf dem erwarteten Niveau verständlichen Einstieg zu geben, sie da abholen, wo sie sein sollten nach einer seriösen Vorbereitung. Andererseits soll hier ein Überblick geboten werden über ein Fach in all seinen hier relevanten Breiten, von dem die meisten nachher ein Leben lang zehren. Sehr wenig wird es daher wohl kaum sein...
(Zu diesm Abschnitt vgl. auch *DIYMU* [3].)

Kapitel • Chapitre 3

Lerntechnik

3.1 Einige wichtige beachtenswerte Tatsachen

Man kommt bei viel geringerem Aufwand schneller weiter, wenn man die Lerntheorien beachtet und sich eine angepasste, effiziente Lerntechnik aneignet. Nicht „traditionsgerecht“, sondern „gehirngerecht“ soll man lernen. Wer hier nicht selbst plant, für den planen andere oder der *Zufall*. Wer keine Selbstdisziplin hat, der verschüttet seine Kräfte wie Wasser: Verschüttetes Wasser wieder einzusammeln wird dann schwierig sein. Wie also vorgehen? Durch eine *aktive Mitarbeit im Unterricht* kommen wir zu einer maximalen Ausbeute. Durch studieren zu Hause (vor-, nachbereiten, verarbeiten u.s.w.) sichern wir dem neuen Stoff den nötigen Bestand auf *lange Zeit*. — Alles andere bringt kein befriedigendes Resultat, für niemanden. (Vgl. dazu „zyklische Rollmethode“ in *DIYMU*[4].) Und wo dynamische Menschen zusammen etwas unternehmen, entstehen auch immer Konflikte. Dies hat die Natur so eingerichtet. *Offene, begründete, konstruktive Kritik in einem fairen Dialog,* so heisst das Rezept um ohne Verletzung weiterzukommen. Aber Achtung: *C'est le ton qui fait la musique ...*

Als weiteres Rezept merke man sich: Am wichtigsten ist ein ans eigene Wesen *angepasster Lernrhythmus*. Anhand der Literatur zu Lerntricks und Lerntechnik (Bibl. hulshoff, Bibl. kugemann, Bibl. treppenwein, Bibl. buzan1, Bibl. buzan2, Bibl. vester, Bibl. leitner, Bibl. schrader, Bibl. schrader1, Bibl. metzger1, Bibl. frick1, Bibl. kirckhoff1, Bibl. dahmer1, Bibl. truniger1) muss man sich vorerst orientieren über *Lernplateau* und *Vergessenskurve*: Wenn weiter als bis zum Lernplateau gelernt wird, wermindert sich die Menge des erfolgreich gelernten Stoffes wieder. Dagegen nimmt die langfristig vergessene Stoffmenge mit jeder späteren Repetition ab, die Vergessenskurve verläuft dann weiter oben und flacher. Es geht auch nicht ohne zu wissen, wie sich *Kurzfristgedächtnis* und *Langfristgedächtnis* verhalten. Es ist nicht egal, wie und was man auswendig lernt und was nicht. Der Aufwand während all den kommenden Studienjahren lässt sich so mit wenigen Mitteln ganz enorm senken und der Erfolg erhöhen. Wenn die Intelligenz wie erhofft vorhanden ist, wird die Arbeit zur Hauptsache. — Wenn nicht, so ist eben ein Faktor null im Produkt...

Daneben soll einer aber auch die *Psychohygiene* pflegen, denn nur eine ausgeglichene, gutgeschliffene psychische Verfassung garantiert im Leben eine freie Fahrbahn. *Stichworte* sind da Ausdauer, Selbstkontrolle, Selbstdisziplin, Geduld, Durchhaltevermögen, Umlenkung der Agressionen in unschädliche und aufbauende Richtungen, Seltbstachtung, Vertrauen, Toleranz, Realitätssinn. Solche Eigenschaften adeln den Menschen, sie erheben seine Stellung. Wer zieht schon in Hinblick auf eine problemlose Zusammenarbeit den „Problemhaufen“ der reifen Persönlichkeit als Partner vor? — Es sei denn, man wolle in Gesellschaft mit seinesgleichen sein ...

Wie sollen nun in der Mathematik beim Lernen die Gewichte und die eingesetzten Kräfte verteilt werden? Hier hat sich bisher am besten folgendes Schema bewährt[4]:

– Hauptsätze, Definitionen: Dem Sinne nach auswendig wissen.

[4] Vgl. Einführung und Studienjahrorganisation Mathematik, 1.2. (Bibl.: wirz)

– Sätze, Korollare, Lemmata: Kennen.
– Beweise: Verstehen.
– Und nicht zuletzt: Aufgaben lösen, im Team und auch für sich alleine.

Merke:

$$Lernen = verstehen \cdot behalten \cdot abrufen \cdot anwenden.$$

Wenn einer der Faktoren null ist, so ist auch das Produkt null. Als grösstes Problem für die meisten Menschen erweist sich das Abrufen. . .

3.2 Time Management

Managern grosser erfolgreicher Firmen bringt man häufig Tricks bei, mit denen sie ihr Verhalten so verbessernd ändern können, dass dies der Firma etwas bringt — und nicht zuletzt natürlich der Person auch etwas. Ein wichtiges Gebiet dabei ist der *Umgang mit der eigenen Zeit*. Sie verhält sich ähnlich wie das Geld: Ausgeben erzeugt manchmal ein Loch in der Kasse. . . Hier kurz einige Tips (vgl. auch Bibl. wirz[4]).

- ⊘ Richtige Planung: Führe eine Agenda. Plane jeweils detailiert Deine Ziele und Hauptaufgaben des folgenden Tags, der folgenden Woche, des folgenden Monats.

- ⊘ „Fange“ deine *Zeitdiebe*! Kontrolliere sie! „Loche“ sie ein!

- ⊘ Reduziere Stress durch Überblick. Gruppiere Deine Tätigkeit in Gruppen ähnlichen Inhalts. Bearbeite Gruppen und nicht Einzelposten. Nimmst Du die kleinen Aufgaben so in den Griff, so hast Du mehr Zeit für die grossen.

- ⊘ Müdigkeit, Stress, Irritierbarkeit und zuviel Arbeit blockieren Deine Kreativität und reduzieren auch Deine Leistungen an Prüfungen. Verbessere Deine Arbeitsumgebung! (Sauberkeit, Störungen vom Halse halten in allen ihren ärgerlichen Formen.)

- ⊘ Stelle 20 Regeln auf, die für Dich besonders Konsequenzen haben. (Vgl. dazu *TIME MANAGEMENT* im *DIYMU*[4].)

3.3 „Ora et labora“ für den modernen Studenten – aber wie?

„Ora et labora![529]“ So sagt die mehr als anderthalb tausend Jahre alte Benediktinerregel. Ist das heute nicht etwa lächerlich geworden in der profanen Welt? „Arbeite!“ — Doch halt, studieren ohne dabei mit Arbeit belästigt zu werden, kann das je gut gehen? Das funktioniert so nicht. Und ein Ingenieur, der Dinge tut, die nicht funktionieren, was für ein Ingenieur ist das? — Und „bete“? Sinngemäss werden wir alle feststellen müssen, dass ein Weg ohne Beachtung einer gewissen Ethik, ein Tun unter Missachtung der Humanität, ohne Rückbesinnung auf das wesentlich Wichtige, dass so ein Weg Probleme erzeugt und nicht löst. Die Gegenwartsprobleme und der Zustand des Planeten sprechen da eine deutliche Sprache. Ohne Wille zum Besseren kann einer in einem Team nicht gut sein. Ins Moderne umgedeutet im Sinne von „kümmere dich ethisch und arbeite“ erscheint einem da die erwähnte alte Regel plötzlich hochaktuell. Wir können keine bessere Welt bauen, wenn sich das Neue nur besser verkauft und nicht wirklich besser ist als das Alte. Ebenso tragen wir keine Verantwortung vor der Zukunft, wenn wir uns nicht darum kümmern, dass die jungen Studenten besser werden als die alten, sonst wird die künftige Welt nicht besser sein. Die Welt, in der wir leben, hat Genesung bitter nötig. Jetzt braucht es Grosstaten und nicht Schandtaten. Das auch im Studium. Rezepte dazu haben wir viele, von Menschen, die vor uns auch schon denken konnten. Meistens genügt es, endlich einmal die schon vorhandenen Rezepte zu verstehen und sie

[4] Vgl. Einführung und Studienjahrorganisation Mathematik, 1.2. (Bibl.: wirz)
[529] lat. „Bete und arbeite!“

erfolgreich anzuwenden, als immer nur nach neuen Rezepten zu suchen und nie eines richtig anzuwenden. So kann man auch den obigen Spruch gewinnbringend begreifen.

Kapitel • Chapitre 4

Einige Prinzipien und Grundsätze

Wie in Bibl. wirz[4] aufgelistet, sei hier kurz wieder erwähnt:

1. Mathematik ist nicht schwierig. Aber Mathematik ist arbeitsintensiv. Vorausarbeit führt zu Vorsprung.

2. Was man nicht richtig versteht, kann man nie richtig anwenden. Man kann es nie gebrauchen.

3. Auch ein Weg von 1000 Meilen beginnt mit einem Schritt. Tun wir diesen Schritt! („Fussgängerprinzip“.)

4. Wir wollen einem hohen intellektuellen Anspruch genügen. Wir hängen die Latte hoch. Wer hinüber will, muss sich anstrengen. Mit Minimalismus ist hier nichts zu haben.

5. Der „Feind“ ist die Oberflächlichkeit. (An der Oberfläche ist man sehr rasch sehr weit, wie im Wasser.) Nur wer im Verständnis Tiefe gewinnt, kommt zum Kern. Der Grad des Verstehens hängt ab von der Erlebnistiefe.

6. Die Mathematik darf nicht zu einer *Formelgeographie* verkommen. Zugriff auf Daten in einer Datenbank ist noch lange kein Verstehen! Und wer nichts versteht oder nur soviel, wie auch ein „intelligenter Computer“, der taugt heute nicht viel.

7. Methodisch wollen wir uns von den folgenden Prinzipien leiten lassen, die in machbarem Rahmen zu einem vernünftigen Ziel führen:

    - ⊘ Genetisches Vorgehen, verankert im Erfahrungsbereich: Vom schon Verstandenen zum noch nicht Verstandenen.
    - ⊘ Exemplarisches Vorgehen: Die riesige Stofffülle verunmöglicht eine abgerundete, abschliessende Stoffbehandlung und zwingt zur beispielhaften, repräsentativen Auswahl.
    - ⊘ Fachgerecht: Mathematik soll so gezeigt werden und erlebt werden, wie Mathematik eben ist auf wissenschaftlicher Grundlage. Ihr eigen sind axiomatische Methode, Turmstruktur, logisches Deduktionsgerüst, im Unterricht eher sokratisch gehaltener Frontalunterricht, eher Lehrgespräch und Referat als Gruppenarbeit. All das verlangt enorme Konzentration und Selbstbeherrschung vom Studenten. Dafür aber kommt er so vorwärts! Dabei nicht vergessen: Wenn etwas nicht klar ist im Unterricht, dann sofort fragen!

8. Weitere Stichworte für die Schwerpunktsbildung im Vorgehen und in der Stoffauswahl sind:

    - ⊘ Praxisgerechte Stoffauswahl, auch Vernetzung mit andern Gebieten.

[4] Vgl. Einführung und Studienjahrorganisation Mathematik, 1.2. (Bibl.: wirz)

- ⊘ Kulturelle Verwurzelung der Vorgehensweise.
- ⊘ Ganzheitlicher Ansatz: Mathematik sei kein Emotionenkiller. Humor hat durchaus Platz! Man beachte da den feinen Unterschied zwischen Freude und Schadenfreude… „Ein Geist, der nur Verstand ist, gleicht einem Messer, das nur Klinge ist. Die Hand wird blutig beim Gebrauch.“ *Tagore*
- ⊘ Zeitgemäss: Offen für das wirklich Neue, das einem Gebiet Nahrung ist, setzen wir heute auch in der Mathematik moderne Computertechnologien ein. (Vgl. dazu im folgenden Kapitel.)

Man beachte allerdings, dass schon der alte griechische Philosoph Heraklit folgenden Rat erteilt hat: *Erziehen heisst nicht einen Eimer abfüllen, sondern ein Feuer entfachen…* Wer also sein Herz nicht bei der Sache hat, kann seinen Kopf schwer dort behalten!

Kapitel • Chapitre 5

Hilfsmittel, Computermathematik (*Mathematica*), Literatur etc.

Der Einsatz moderner Computertechnik auch in derjenigen Wissenschaft, die einerseits zu den Eltern der Informatik gehört, andererseits aber sich dem Computer gegenüber sehr lange reserviert verhalten hat, mag heute niemanden mehr erstaunen. Die Mathematik wird dadurch reicher, aber leider nicht einfacher. Die Maschine nimmt zwar Routinearbeit ab, verbessert enorm die Resultate, doch bringt sie auch einen grossen zusätzlichen Lernaufwand. Hier in diesem Kurs wird das Softwarepaket *Mathematica* verwendet, das unter vielen andern solchen Paketen heute erworben werden kann. Jedes solche Paket hat seine Stärken, aber natürlich auch seine Schwächen. Jedoch muss man einmal eines kennenlernen, um überhaupt zu einem Urteil zu kommen. Aus diesem Grunde wird in diesem Werk nicht weiter auf Taschenrechner eingegangen, obwohl man diesen gegenüber anerkennend erwähnen muss, dass ihr Entwicklungsstand heutzutage äusserst beachtlich ist. Beispiele zum *Mathematica* finden sich haufenweise im *DIYMU*[5] sowie in den bis heute in grosser Zahl entstandenen *Notebooks in Mathematica* des Autors auf dem Computernetz des Mathematik-Labors der ISB. (In Anlehnung an Bibl. blachman1 ist der sehr umfangreiche, in deutsch verfasste Kurs (Bibl. wirz1) entstanden. Die Software ist momentan im Mathematik–Labor der ISB für Studenten mit Benutzerberechtigung frei verfügbar. Den restlichen Interessenten stellt sie der Autor gegen Bedarfsnachweis gerne gratis zur Verfügung.)
Falls im Text dieses Mathematikkurses bezüglich *Mathematica* Fragen entstehen, sei auf die genannten Stellen sowie auf Bibl. blachman1, blachman2, heinrich, kaufmann, wolfram verwiesen.
Hier noch eine Liste von *Übersichtswerken* in Mathematik für das Ingenieur-Niveau: Bibl. kuipers, dtv, meyers, meschkowski, abc, handbuch, fischer.
Stoff auf Vorkurs–Niveau sowie für Abteilungen mit weniger Mathematik–Stunden findet man in Bibl. malle, gellrich1, gellrich2, scharf1, wendeler oder für DG (Darstellende Geometrie) scharf2.
Betreffend *Lehrbüchern* seien genannt: Bibl. meyberg, bachmann, brauch, finkenstein, dorfler, brenner, burg, papula, fetzer, leupold, schaum, berendt, swobowski, stoyan, ansorge. Empfehlenswert sind auch diverse Bücher aus dem Spektrum–Verlag.
Und noch eine Liste von *Tabellen-, Tafeln- und Formelbüchern*: Bibl. dmk, spiegel, rottmann, bronstein, bartsch, stocker, papula.
Selbstverständlich ist durch diese Listen nur eine Auswahl gegeben. Der Leser möge selber beurteilen, ob für ihn andere Bücher geeigneter erscheinen.
Vgl. zu diesem Kapitel auch Bibl. wirz [5].
Zum Thema „Taschenrechner“: Bis zum jetzigen Zeitpunkt war zu beobachten, dass die meisten Studenten einen besseren HP verwendet haben.

[5] Vgl. (Bibl.: Kleine Einführung ins *Mathematica* (Bibl.: wirz)

Kapitel • Chapitre 6

Learningmanagement

Kurze Übersicht: Organisatorisches, zusammengefasst • *Vue générale: Quant à l'organisation, résumé*

1. **Vorstellung**
   • **Présentation**

2. **Organisation (generell):** Stoff, Scripts, Internet, Übungen, Rhythmus der Übungen, Selbststudium, Tests, Vordiplom, Noten, Präsenz (Unterricht. Tests), Merkblatt
   • **Organisation (en général):** *Matière, scripts, internet, exercices, rythme des exercises tests, études personnelles, diplôme préalable, notes, présence (leçons, tests), feuille de renseignements*

3. **Rahmen:** Maturität, Lehr- und Examensplan, Gesetze und Verordnungen, Mathematik u.s.w. in diesem Rahmen
   • **Cadre:** *Maturité, plan d'étude et d'examens, lois, décrets, mathématiques dans ce cadre*

4. **Stoff** $\leadsto$ Inhaltsverzeichnis Script, Stoffplan (Internet)
   • **Matière** $\leadsto$ *Index script, tableau de matière (internet)*

5. **Ziel**: Erfolg, Leben, Fundament, Staatsgarantie…
   • **But:** *succès, vie, fondement, base, garantie d'état*

6. **Weg:** Viel Arbeit, Vertrauen, hoher Anspruch (intellektuell), Fortschritt in der eigenen Entwicklung steuern
   • **Chemin:** *Beaucoup de travail, confiance, grande exigence (intellectuellement), conduire le progrès (propre développement)*

7. **Methoden generell:** Methoden wichtiger als Fakten ($\leadsto$ Allgemeinwissen, fachtechnische Bildung), Verantwortung tragen, Feedback, Team
   • **Méthodes en général:** *Méthodes plus importantes que les faits ($\leadsto$ connaissances générales, formation technique, avoir la responsabilité), feedback, groupe*

8. **Methoden und Bemerkungen speziell betreffend das Fach:**
   • **Méthodes et remarques concernant en particulier notre matière:**

(a) Planung: Wer nicht plant, für den plant der Zufall $\leadsto$ individuelle Zeitplanung ausserordentlich wichtig, kurzfristig, mittelfristig, langfristig, kontrolliert, Zeitdiebe eliminieren
• *Planification: A celui qui ne projette pas, c'est le hasard qui projette $\leadsto$ La planification du temps à disposition est extraordinairement importante, à court terme, à moyen terme, à long terme, contrôlée, éliminer les voleurs de temps*

(b) Mitarbeit, Notizen, Selbstdisziplin, Konzentration, maximaler Lerneffekt
• *Collaboration, notes, autodiscipline, concentration, résultat d´apprentissage maximal*

(c) Viel Stoff ===> Stress ===> Agression, Meinungsverschiedenheiten
===> Winston Churchill: Wenn zwei Menschen immer wieder die gleiche Ansicht haben, ist einer von ihnen überflüssig
Offene, begründete konstruktive Kritik
• *Matière énorme ===> stress ===> agression, divergence d'opinions*
===> Winston Churchill: Si deux hommes sont continuellement du même avis, un d'eux est superflu
Critique constructive, ouverte et justifiée

(d) Gesprächskultur ===>
Antrag des Mönchs an den Mullah: Darf ich rauchen während ich bete? — Darf ich beten während ich rauche?
• *Culture de discussion ===>*
Demande du moine au mollah: Est-ce que je peux fumer pendant que je prie? — Est-ce que je peux prier pendant que je fume?

(e) Talent, guter Wille, Ausdauer, ...
• *Talent, bonne volonté, endurance, persévérance, constance, ténacité, ...*

(f) Der Lohn ist das Resultat der Arbeit
• *Le résultat du travail est le salaire*

(g) Studieren: lat. studeo:
sich um etwas bemühen, sich für etwas bemühen, eifrig, fleissig obliegen, streben, unaufgefordert, ausdauernd arbeiten, ...
• *Etudier: lat. studeo:*
s'efforcer à quelque chose, s'efforcer pour quelque chose, être de quelque chose de façon zélée, appliqué, s'efforcer d'atteindre quelque chose, travailler sans y avoir été invité; de sa propre initiative, persévérant, ...

(h) Lerntechniken, Arbeitstechnik, Selfmanagement: Zeit einsetzen, vorbereiten, nachbereiten, verarbeiten, ausarbeiten, üben, planvoll, Mindmaps, vertiefen, festigen, Lernplateau, Vergessenskurve ($\leadsto$ mehrmals repetieren!), mit Humor, Psychohygiene: Man lernt immer auch die Umgebung mit...
Literatur anschaffen!
• *Technique de travail et d'apprendisage, selfmanagement: Utiliser, mobiliser du temps, préparer, revoir, approfondir, transformer, élaborer, exercer, méthodiquement, technique d´apprentissage, mindmaps, approfondissent, renforcer, plateau d´apprentissage, courbe d'oublier ($\leadsto$ répéter plusieurs fois!), avec humour, hygiène psychique: L'environnement est toujours une partie de ce qu'on apprend...*
S'acheter de la littérature!

(i) Lernen = Verstehen · behalten · abrufen · anwenden $\leadsto$ Produkt null, wenn Faktor null!
===> Problem: Erinnern (abrufen), Stoffmenge
• *Apprendre = comprendre · retenir · se rappeler · appliquer $\leadsto$ produit zéro si un facteur est zéro*
===> Problème: Se rappeler, quantité de matière

(j) **„make love, not software. . . “**
- . . .

9. **Rechte und Pflichten** des Studenten und der Schule $\rightsquigarrow$ Reglemente: Internet!
   • **Droits et devoirs** *de l'étudiant et de l'école* $\rightsquigarrow$ *règlements, internet*

10. **Ebenen des Gebrauchs:** Sofort, später, Hintergrund (Bescheid wissen, Kulturvertreter), Selbstveränderung, Denkschule, Liebe, Freude, Lust, Interesse
    • **Niveaux d'usage:** *Tout de suite, plus tard, arrière-plan (être au courant, représentant de la culture), changer soi–même, école intellectuelle, amour, joie, plaisir, intérêt*

11. **Prinzipien, Grundsätze:**
    • **Principes et positions:**

    (a) **Studium generell:** Ausdauer statt Schwierigkeit, Vorsprung holen, nur was man versteht kann man anwenden, ein Weg beginnt mit einem Schritt, kein Minimalismus, keine Oberflächlichkeit, Bereitschaft zur Leistung
    • **Généralement, concernant les études:** *Endurance au lieu de la difficulté, prendre de l'avance, on ne peut utiliser que ce qu'on peut comprendre, un chemin commence avec un pas, . . . aucun minimalisme, aucune superficialité et légèreté, être prêt à la performance*

    (b) **Fach:** Genetisch, exemplarisch, fachgerecht, niveaugerecht, praxisgerecht, kulturgerecht, sokratisch, ganzheitlich . . .
    • **Notre matière:** *Génétique, exemplaire, professionnel, conforme au niveau, conforme à la pratique, conforme à la culture, socratique, intégrant (global) . . .*

12. **Semesterorganisation Mathematik:**
    • **Organisation du semestre en mathématiques:**

    (a) **Betr. Noten:** Anzahl Noten, Prüfungsreglement, Prüfungsplan, Prüfungsrahmen, erlaubte Unterlagen, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Übungen und Projekte, Arbeitsnachweismappe
    • **Concernant les notes:** *Nombre de notes, réglement des examens, Plan des examens, conditions concernant les examens, exigences formelles, conditions formelles, philosophie des notes, évaluation des exercices et des projets, porte–feuille*

    (b) **Chargen u.s.w.:** Klassensprecher, Klassenbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden
    • **Charges etc.:** *Chef chargé des copies, heures de consultation*

13. **Hilfsmittel:** Bibliothek, Taschenrechner, Computer, Ma-thematiksoftware, Literatur, Hilfsmittel an Prüfungen (Formelbuch, Zusammenfassung)
    • **Moyens:** *bibliothèque, calculatrice de poche, ordinateur, software en mathématiques, littérature, moyens permis lors des tests (livre de formules, résumé)*

14. **Einführung:** Über das Wesen der Mathematik
    • **Introduction:** *L'essence (caractère) des mathématiques*

    (a) Beispielhafte **Beweise**
    • *Des* **preuves** *exemplaires*

    (b) **Wieso** beweisen?
    • **Pourquoi** *prouver?*

    (c) **Modell** und Wirklichkeit
    • **Modèles** *et réalité*

    (d) **Geschichtlicher Rahmen** und Auftrag
    • **Cadre de l'histoire** *et but*

15. **Kurs** . . . • **Cours** . . .

Kapitel • Chapitre 7

Stofforganisaton

Zum Studium:

> Die Organisation des Studiums im allgemeinen und des Faches im besonderen muss sich den ständig sich verändernden äusseren Gegebenheiten anpassen. Speziell ist sie auch abhängig von der personellen Situation. Nach einem an der Ingenieurschule–HTL bis 1996 möglichen Vorgehen ist die Übungssammlung *DIYMU* aufgebaut, vgl. Bibl. wirz[5].

Zum Inhalt der geplanten nachfolgenden Teile: Der nachfolgende Plan ist auf den bis 1996 erforderlichen Pflichtstoff an der Elektro–Abteilung abgestimmt. (Er ist für andere Abteilungen sowie für die Fachhochschule entsprechend anzupassen. Die Reihenfolge in der folgenden Gliederung ist jeweils nach den aktuellen Bedürfnissen verändert worden.

1. Einführung
2. Aussagenlogik
3. Mengenlehre
4. Relationen, Funktionen, Abbildungen
5. Erfahrung mit Funktionen
6. Kombinatorik
7. Boolsche Algebra und Schaltalgebra
8. Algebra mit Zahlen, komplexe Zahlen
9. Differentialrechnung
10. Integralrechnung
11. Numerik
12. Vektoren und Matrizen
13. Lineare Optimierung

[5] Vgl. Übungsbuch *DIYMU*

14. Fortgeschrittene Vektorgeometrie
15. n-dimensionale Kurven und Vektorraumtransformationen
16. Komplexe Funktionen
17. Reihen und Potenzreihen, Taylorreihen
18. Fourierreihen
19. Differential- und Integralrechnung im n-dimensionalen
20. Vektoranalysis
21. Differentialgleichungen
22. Laplace-Transformationen
23. Wahrscheinlichkeitsrechnung
24. Statistik
25. Weitere Themen für Wahlfächer

Bemerkung zur restaurierten Ausgabe 2000: Heute ist der grösste Teil des Stoffes dieser Liste in Form von drei Scripten in deutscher und französischer Sprache sowie weiteren Teilen in der Art der vorliegenden Einführung erschienen. (Scripte zur Algebra, Analysis und Fortsetzung Mathematik.)

Kapitel • Chapitre 8

Über das Wesen der Mathematik

8.1 Einige modellhafte Beweise

Hier wollen wir anhand folgender Beispiele aus der Geometrie über Wesen und Natur von mathematischen Beweisen nachdenken:

- ⊘ *Aussenwinkel- und Innenwinkelsumme im Dreieck*
- ⊘ *Satz von Pythagoras*
- ⊘ *Höhensatz*
- ⊘ *Kathetensatz*

Beweisen begegnet man in mathematischen Werken auf Schritt und Tritt. Ja man nennt die Mathematik sogar die Wissenschaft vom Beweisen.

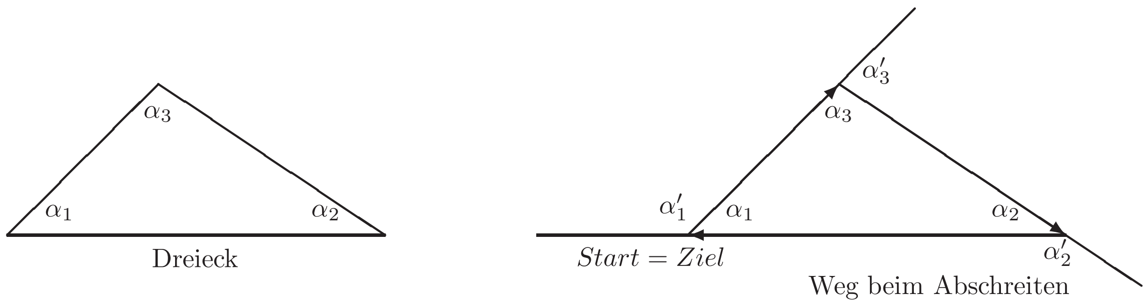
8.1.1 Wieso beweisen?

Seit es elektronische Rechenmaschinen gibt (sogenannte „von Neumann-Computer"), sind die Mathematiker nicht mehr die schnellsten Rechner. Wo braucht es dann die Mathematik unter diesen Umständen noch? Was soll man mit ihnen noch anfangen?
Sicher ist uns gewiss, dass sich die Mathematik nicht selbst erfunden hat. Sie ist auch nicht vom Himmel gefallen. Ihre heutige Form hat sie von den Menschen erhalten, die sie entwickelt haben. Allgemein geniesst sie uneingeschränktes Vertrauen. Man glaubt ihren Resultaten sicher, was wir in keiner andern Wissenschaft so uneingeschränkt kennen. Mathematik ist die Wissenschaft, in der man wohl am exaktesten weiss, wovon man spricht. Denn sie handelt nur von solchen Aussagen, die auch *bewiesen* worden sind. **Mathematik ist daher auch die Wissenschaft vom streng exakten Beweisen.** Und fürs Beweisen wird wohl der Mathematiker, der Mensch, nie ganz durch den Computer ersetzt werden können. — Auch das können die Mathematiker beweisen. Doch beweisen, das scheint uns ja eine komplizierte Sache zu sein . . .
Wir wollen uns nun die folgende *Frage* stellen:

Frage 1 *Müssen denn Beweise immer so abstrakt und kompliziert sein, dass man in der Schule meistens einen grossen Bogen um sie herum macht, also davor kapituliert?*

Wir wollen da an einigen wenigen Beispielen etwas Erfahrung sammeln.

Abbildung 8.1: Beweis ohne Worte



8.1.2 Beispiel: Aussenwinkelsumme im Dreieck

Frage 2 *Wie gross ist die Summe der Aussenwinkel $\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3'$ im Dreieck (vgl. Abb. 8.1)?*

Ein geübter Rechner wird jetzt sagen: $\alpha_1 + \alpha_1' = 180^o$, ebenso für α_2' und α_3'. Man hat demnach 3 mal 180^o, das heisst 540^o. Davon ab geht die Innenwinkelsumme, welche im Dreieck 180^o beträgt. So muss dann also die Aussenwinkelsumme im Dreieck 360^o betragen. *q.e.d.*[1]

Satz 8.1 (Aussenwinkelsumme im Dreieck) *Die Aussenwinkelsumme in einem beliebigen Dreieck beträgt* 360^o.

Doch was sagt ein ungeübter Rechner? Kann man den Sachverhalt nicht einfacher, direkter, anschaulicher einsehen? Und tatsächlich: Es gibt eine Art, die Sache unmittelbar einzusehen, ja quasi zu erleben (vgl. Abb. 8.1 rechts). Das kann hier sogar schon ein Kind im Kindergartenalter, ohne des Rechnens kundig zu sein. Es braucht nur, wie eine Ameise auf der Kante, den Pfeilen nach den Weg des Dreieckrandes abzuschreiten und sich nachher zu fragen, wie gross denn die Drehung sei, die es jetzt vollführt hat. — „Eine volle Drehung! “ — So wird es sagen. Die Drehwinkel an den Ecken sind ja genau die Aussenwinkel. (Weg beim Abschreiten: Vorwärts von A_1 nach A_2, rückwärts dann nach A_3 und vorwärts danach nach A_1.)

8.1.3 Beispiel: Innenwinkelsumme im Dreieck

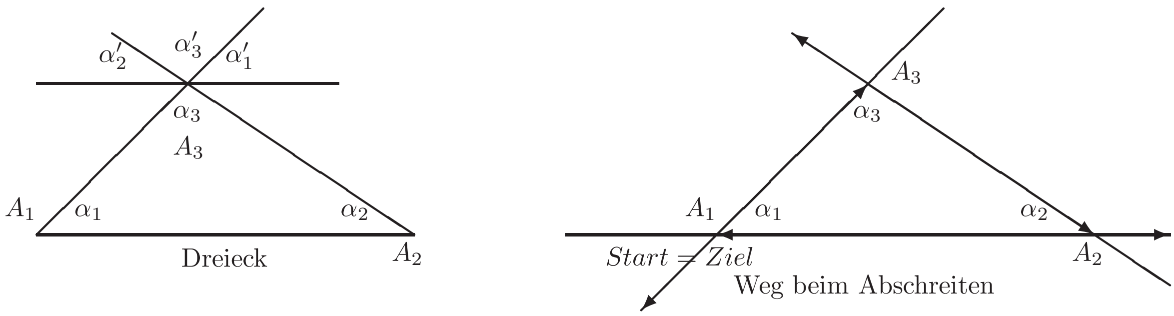
Unser schneller Rechner im obigen Abschnitt hat gewusst, dass die Summe der Innenwinkel in einem beliebigen Dreieck 180^o beträgt. Wie aber hat er das herausgefunden? Natürlich gelangt man auch hier auf Umwegen über die Benutzung mathematischer Vorkenntnisse zum Ziel, doch das liefert keinen unmittelbaren Zugang zur Sache. Eine Möglichkeit zeigt Abb.8.2 links. Wir verschieben die Gerade $\overline{A_1A_2}$ in den Punkt A_3. Dann gilt ersichtlicherweise: $\alpha_1 = \alpha_1'$. Ebenso für α_2 und α_3. Also gilt $\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' = 180^o$. Bei dieser Überlegung benutzen wir aber die Sätze über die Winkel an einer von zwei Parallelen geschnittenen Geraden. Diese Sätze muss man jedoch vorher beweisen. Dazu ist es vonnöten, sich in der Mathematik gut auszukennen. Wir formulieren:

Satz 8.2 (Innenwinkelsumme im Dreieck) *Die Innenwinkelsumme in einem beliebigen Dreieck beträgt* 180^o.

Als einfache Alternative bietet sich auch hier wieder die Betrachtung mit der Ameise an. Doch muss die Ameise diesmal auf der zweiten Strecke rückwärts krabbeln. Am Schluss schaut sie gerade in die zur Ausgangsrichtung entgegengesetzte Richtung. Sie hat sich um die Hälfte einer Volldrehung gedreht. *q.e.d.*

[1] lat. Was zu beweisen war

Abbildung 8.2: Innenwinkel statt Aussenwinkel.



8.1.4 Beispiel: Satz von Pythagoras

Eine Standardfrage an mündlichen Prüfungen lautet:

Frage 3 *Kennen Sie einen Beweis des Satzes von Pythagoras?*

Das ist klassische Mittelschulbildung, eine Antwort zu kennen. Weiss der Kandidat keinen Beweis, so wird man sich eben die Frage stellen müssen, wie hoch seine Hochschulbildung einmal sein kann, wenn nicht mal solche klassische Mittelschulbildung vorhanden ist… Also, was gibt es zu sagen zu Pythagoras? Und wer war dieser Mann überhaupt?
Bemerkung: Pythagoras selbst hat, wie wir heute zu wissen glauben, den nach ihm benannten Satz wohl kaum selbst bewiesen. Auch war der Sachverhalt in den alten Kulturen des vorderen Orients lange vor Pythagoras bekannt. Doch verdankt die Mathematik selbst dem Pythagoras ihren Namen. Pythagoras hat nach seiner Flucht vor Polykrates in Samos, seiner Pristereinweihung in Ägypten sowie seinem offenbar durch Piraten verursachten unfreiwilligen Aufenthalte in Babylon zur Zeit der dortigen Gefangenschaft der Juden, im süditalienischen Crotone eine Philosophenbruderschaft gegründet, die für die Antike wichtigen *Pythagoräer*. Der innern Kreis seiner Jünger hatte den Namen *Mathematiker* oder *Esotheriker*[2], der äussere Kreis *Akusmatiker* oder *Exotheriker*. Die Mathematiker waren also die, die die Sache des Pythagoras auch noch verstehen und nicht nur nacherzählen konnten. Somit wollen wir also hier nach alter Gepflogenheit dem Satz von Pythagoras den Namen lassen.

Satz 8.3 (Pythagoras) *In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten a, b, und c gilt:*

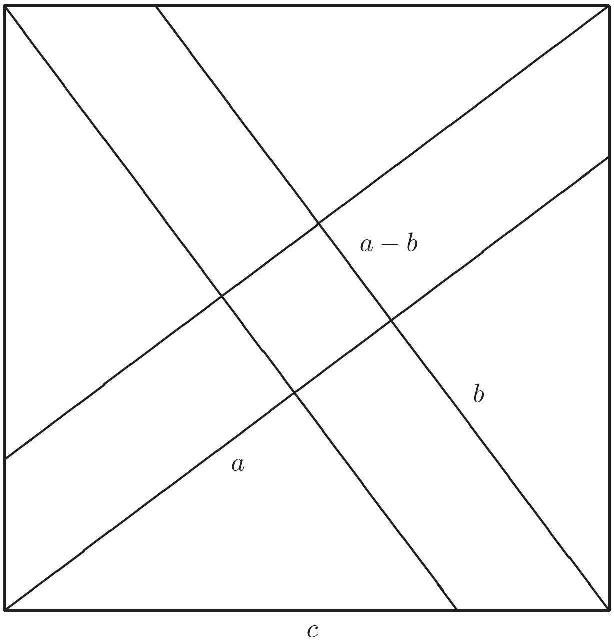
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

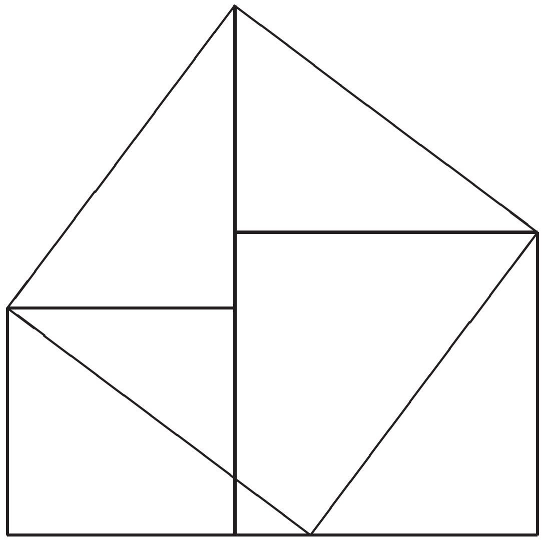
Beweise dafür sind viele bekannt. einer der wohl bekannteste, weil unmittelbar bildlich ablesbar, ersehen wir aus Abb. 8.3.
Beweis:
Es gilt : c^2 = *Flächeninhalt des grossen Quadrats* = *Flächeninhalt des kleinen Quadrats* + 4 *Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten a und b.* Also:

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2} = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2. \qquad q.e.d.$$

[2] eso theros griech. „innere Kreis“

Abbildung 8.3: Satz von Pythagoras





Altindischer Beweis ohne Worte

8.1.5 Beispiel: Kathetensatz und Höhensatz von Euklid

Satz 8.4 (Kathetensatz von Euklid) *In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten a, b, und c gilt:*

$$a^2 = c\,p \qquad \wedge \qquad b^2 = c\,q$$

Mit etwas Phantasie und den elementaren geometrischen Vorkenntnissen ist der Beweis des Kathetensatzes aus Abb.8.4 direkt ersichtlich. Falls das Dir nicht so direkt geling, so wird jetzt eine Repedition dieser Vorkenntnisse unumgänglich! Grundlage ist die Literatur vom Niveau der unteren Mittelschule.
Aus dem Kathetensatz folgt nun unmittelbar der Höhensatz. Es ist:

$$a^2 = c\,p \qquad \wedge \qquad b^2 = c\,q.$$

Weiter nach Pythagoras:

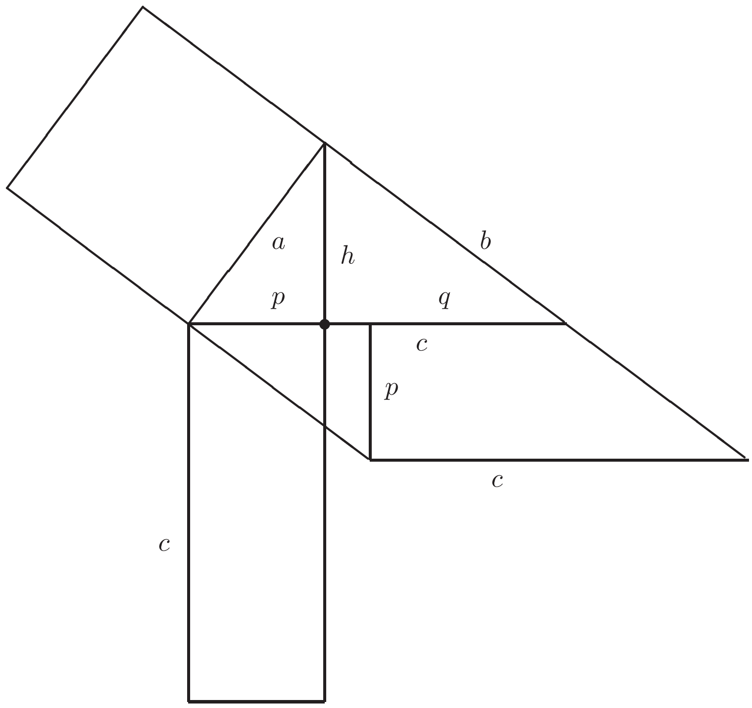
$$h^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2.$$

Somit zusammen:

$$h^2 = c\,p - p^2 = (c-p)\,p = q\,p = p\,q. \qquad q.e.d.$$

Satz 8.5 (Höhensatz von Euklid) *In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck gilt* $h^2 = p\,q$.

Abbildung 8.4: Kathetensatz von Euklid



Kathetensatz: Beweis ohne Worte

8.2 Wirklichkeit und mathematische Modelle

8.2.1 Das Problem der sinnvollen Frage

Hier wollen wir fragen:
Was sind denn die Beziehungen zwischen Mathematik einerseits und Technik sowie Naturwissenschaften andererseits?
Wieso darf man mit Hilfe von Mathematik z.B. die Konstruktionsweise einer Brücke vorausberechnen, die Brücke dann bauen und schliesslich sicher sein, dass sie hält, wenn wir mit einem schweren Lastwagen darüberfahren?

Um die Problematik zu erhellen, wollen wir uns eine alte naturwissenschaftliche Frage stellen. Sie lautet:

Frage 4 *Wieso fällt der Apfel vom Baum?*

Wie soll man da antworten? — Natürlich ist klar, dass er nicht ewig oben bleibt. Ein Kind hat geantwortet: „Weil die Erde ihn liebt!“ Diese Antwort wirkt auf den zweiten Blick vielleicht gar nicht so dumm. Das Kind spricht ehrlich und unverbildet. Doch weiter hilft uns das ja nicht.
Anscheinend liefert folgende Aussage eine Erklärung: „Es existiert halt eine Anziehungskraft.“ So scheint man festzustellen. Doch hilft uns das weiter? Entdeckt man denn im Leben den Apfel nicht viel früher als die Kraft? Ja, der Begriff *Kraft* ist doch sehr abstrakt und nicht jederman ganz klar. Seine Durchdringung erfordert einiges an Aufwand. Und ist man einmal so weit, so müssen wir doch eingestehen, dass durch

das Wort *Kraft* die Frage noch nicht ganz beantwortet ist. Kraft steht hier als Name für ein dahinter verborgenes Naturphänomen, das wieder seine Ursachen hat. Wir werden dann einwenden, die Masse des Apfels und die der Erde sei die Ursache der Kraft. Doch was ist dann die Ursache der Masse? Bei jeder Ursache können wir ja wieder nach der vorausgehenden Ursache fragen, nach der Ursache der Ursache und so fort. Schliesslich landen wir so in einer unendlichen Kette von Ursachen, was uns in einem endlichen Leben nie zu einem Ende führt. So kommen wir also nicht weiter zu einem abschliessenden Verständnis. Verrückt, nicht? Endlich müssen wir einsehen: Aus dieser unangenehmen Lage können wir uns nur so befreien, dass wir halt eingestehen, dass es nicht möglich ist, zu einer abschliessenden Antwort zu kommen. Die eingangs gestellte Frage lässt sich irgendwann weiter nicht mehr durch Angabe weiterer Ursachen beantworten und bringt uns daher nicht viel weiter. Wir müssen uns fragen, ob die eingangs gestellte Frage wissenschaftlich weiter überhaupt sinnvoll ist, oder ob man besser anders frägt, um zu weiteren Resultaten zu kommen. Konsultieren wir nun die Physik und ihre Gesetze, so sehen wir, dass wohl eine andere Frage eher beantwortet werden kann und daher viel sinnvoller wäre. Nämlich:

Frage 5 *Wie fällt der Apfel vom Baum?*

Diese Frage ist es ja, die im Fallgesetz ihre Antwort findet. Also merken wir uns:

In exakten Wissenschaften ist es manchmal viel schwieriger, zu einem Phänomen die exakte richtige Frage zu finden als die exakte richtige Antwort.

Dazu eine Anekdote:

8.2.2 Galilei und Archimedes

In der Physik gewinnt man neue Erkenntnisse, indem man einerseits die Natur mit Hilfe von reproduzierbaren Experimenten beobachtet: *durch den experimentellen Ansatz.* Mit „reproduzierbar“ meinen wir, dass das Experiment unter den gegebenen Bedingungen, d.h. im festgelegten Messrahmen, immer wieder zu gleichen Resultaten führt. Die Resultate analysiert man dann mit mathematischen Methoden und gewinnt so Aussagen in der Sprache der Mathematik: *die Theorie.* Doch andere gehen manchmal genau umgekehrt vor. Aus theoretischen Überlegungen heraus hat jemand eine Vermutung. Um zu entscheiden, ob diese richtig oder falsch ist, benutzt er jetzt die experimentelle Verifikation, die Überprüfung im Labor *(theoretischer Ansatz).* Und früher oder später irgendwann beobachtet er bei beiden Methoden die Natur mit Hilfe des Experiments.
Aristoteles (384 – 322 v.Chr., etwa Zeit der Nachklassik) hat nun beobachtet, dass beim Fallenlassen zweier Körper der schwerere schneller fällt als der leichtere. Klar, denn jedes Kind sieht doch, dass eine Vogelfeder langsamer fällt als ein Stein. Wir halten fest:

Satz 8.6 (Aristoteles) *Leichte Körper fallen langsamer als schwere.*

Bis zu Galilei (1564 – 1642, italienisches Barockzeitalter) war das bei uns im Abendlande so etwas wie ein Glaubenssatz. Wieso war das so? Wer sich in der Geschichte auskennt, der weiss, dass an den Hochschulen der Antike die Sprache der Gebildeten nicht Latein war, sondern Griechisch. Nur im Westteil des Römerreiches und beim Staat hat man Latein gesprochen. Daher gerieten die griechischen wissenschaftlichen Schriften der Antike nach dem Untergang des alten weströmischen Reiches, d.h. nach

der Völkerwanderung, im Abendland ausser Reichweite und daher in Vergessenheit. Der Kontakt zum griechischen Ostrom brach ziemlich ab, nicht zuletzt auch wegen der religiösen Prioritätsstreitigkeiten. Im Westen kam das scholastisch geprägte Mittelalter herein mit seiner Geissel namens *Ideologie*. „Denken“ wurde durch „glauben“ ersetzt, „fragen“ durch Auslegung der offenbaren Heilswahrheit. Wehe dem, der noch zu fragen wagte. Aus dem fragenden Suchen nach Wahrheit, nach Erkenntnis, war die Lehre von der richtigen Wahrheit geworden: Schulung — Scholastik . *Und die Lehre war jetzt die Doktrin der Doktoren.* Über dem Lichte der Wahrheit ward es dunkel.
Im Spätmittelalter jedoch brach plötzlich sehr mächtig die Realität herein über Europa. In Südspanien erlebten die dortigen Kalifen eine Zeit der Hochblüte. Die Araber hatten das altgriechische Wissen bewahrt und der unvermeidliche Kontakt mit ihnen in Spanien führte bei den Christen zu Veränderungen, denn eine höherstehende Kultur verdrängt und überlagert die minderwertigere beim Kontakt. Die Kreuzzüge taten das ihre. Man kam nicht um den geistigen Austausch mit den Arabern herum. Aber wie dieser andern Kultur begegnen? Hat man doch im Westen damals alles auf die Lehre, auf den christlichen Glauben bezogen, eine Grundlage, die die Araber nicht gelten liessen. Man musste sich daher auf die gemeinsamen Wurzeln besinnen. Und die fand man bei den altgriechischen Philosophen, speziell bei Aristoteles, der so viele Fundamente der Wissenschaften gelegt hat. So ist es nicht verwunderlich, dass die Werke des Aristoteles erst um etwa 1200 n.Chr. in Toledo (Spanien) aus dem Arabischen erstmals ins Latein übersetzt worden sind. Latein war die Sprache der Gelehrten des Abendlandes bis ans Ende des 19. Jahrhunderts. Und dem Aristoteles hat man dann im Westen streng nach scholastischer Manier geglaubt. Wehe dem, der es wagte zu zweifeln! Galilei , sensibilisiert durch den Kontakt mit Kopernikus, dessen Anhänger er geworden war, hat es nun gewagt zu zweifeln an so vielen Dingen. Erst im Jahre 1993 hat die römische Kirche das Urteil des Inquisitionsprozesses gegen ihn revidiert. Mit Galilei beginnt wissenschaftsgeschichtlich die Neuzeit, denn er hat es als erster geschafft einen Begriff zu bilden, der das Abstraktionsvermögen in der Antike übersteigen: die abstrakte Grösse *Beschleunigung* als *Veränderung* der abstrakten Grösse *Geschwindigkeit*. Auch verwundert es nicht, dass es erst einen Galilei geben konnte, nachdem sich in Italien die Renaissance breit gemacht hatte. Dies nach dem Kreuzzug gegen das griechische Byzanz, verstärkt durch dessen Fall an die Türken 1453, da dann viele griechische Gelehrten nach Italien ausgewandert sind und so der Kontakt mit der Antike stärker aufblühen konnte. *Was können wir nun von Galilei lernen?* Was hat er genau herausgefunden? Und wie ist er vorgegangen? Während Aristoteles wahrscheinlich experimentell vorgegangen ist, darf man bei Galilei den theoretischen Ansatz vermuten. Von ihm wird nämlich das unten folgende *Gedankenexperiment* überliefert. (Aus „Gedanken“schliessen wir hier auf „theoretisch“.) Dazu das *Fallgesetz*:

Satz 8.7 (Galilei, Fallgesetz 1) *Alle Körper hier auf Erden fallen gleich schnell.*

In vielen Museen wird heute demonstriert, wie Galilei dann dieses Gesetz experimentell verfeinert hat und eine mathematische Beziehung fand:

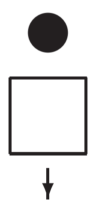
Satz 8.8 (Galilei, Fallgesetz 2) *Es gilt das Gesetz:*

$$s \sim t^2.$$

Später haben andere dann mit noch feineren Messmethoden festgestellt, dass auch die Höhe über Meer in der Formel eine Rolle spielen muss. Und man hat dann das Gesetz entsprechend verfeinert (vgl. *Gravitationsgesetz der Physik* von Newton). Doch wie kam Galilei überhaupt dazu, an Aristoteles zu zweifeln?

Gedankenexperiment von Galilei: (Vgl. Abb. 8.5)
Wir lassen erst den leichteren Körper fallen — und dann gerade anschliessend den schwereren in derselben Bahn. Wenn der schwerere Körper schneller fällt, so muss er bald den leichteren einholen. Nun geschieht's: Einerseits muss jetzt beim Zusammenprall der leichtere Körper den schwereren abbremsen, denn Aristoteles muss ja recht haben. Zusammen sind die beiden Körper dann *langsamer* als der schwerere Körper. Andererseits sind sie zusammen doch schwerer als der schwerere Einzelkörper. So müssen sie zusammen *schneller fallen* als der schwerere, denn Aristoteles muss ja recht haben. Zusammen fallen sie also einerseits langsamer, andererseits schneller. Und das genau ist ein *Widerspruch*! — Wo also

Abbildung 8.5: Das Gedankenexperiment von Galilei



steckt nun der Fehler? Der Gedankengang war doch richtig! — Nur etwas haben wir nie überprüft: die Voraussetzung nämlich, dass Aristoteles recht haben muss. Das kann also nicht sein. Somit müssen beide Körper gleich schnell fallen.

8.2.3 Extrapolation und mathematisches Modell

Um nun zum zweiten Gesetz zu kommen, gab es nur eine Möglichkeit: Messungen, d.h. das Experiment. Wie oft hat Galilei wohl gemessen? — Wir wissen es nicht. Vielleicht 10 mal, vielleicht 100 mal, vielleicht 1000 mal. Doch eines ist ganz sicher: *Man kann nur endlich viele Male messen.* Doch wie ist es dann überhaupt möglich, ein Gesetz als richtig zu verkaufen, wenn man es im Vergleich zu den möglichen Fällen doch nur in einigen wenigen Fällen experimentell überprüft hat? Hier hat uns Descartes (Kartesius, 1596 – 1650) einen Rat gegeben, dem wir folgen wollen:

Axiom 8.1 (Descartes) *Will man auf Grund experimenteller Ergebnisse, d.h. endlich vieler Messungen, ein allgemeingültiges Naturgesetz ableiten, so soll man immer die einfachst mögliche Form für das Gesetz wählen und diese gelten lassen, solange nicht feinere Messungen zu einer Verfeinerung des Gesetzes zwingen.*

So schliesst man von der besonderen Situation, etwa von n Messungen, auf die allgemeine Situation, die unendlich vielen Möglichkeiten. Man sagt, man schliesse *vom Besonderen auf das Allgemeine.* Man *extrapoliert* also. Aber wie können wir das rechtfertigen? Liegt hier nicht nur eine eigenartige, jedoch zufällige Verhaltensweise von uns Menschen vor? — Da müssen wir als unkundig geborne, aber geistig stets wachsende Denker eben zugeben, dass uns eigentlich gar keine andere vernünftige Möglichkeit übrigbleibt. Und mit „vernünftig“ meinen wir, dass wir diese Verhaltensweise aus der *Erfahrung* lernen! Ja, die Erfahrung (und nichts anderes) sagt uns, dass dieses Vorgehen gut so ist. Denn bisher hatten wir damit Erfolg! Nur so können wir „das Vernünftige“ begründen.
So messen wir wie schon Galilei vielleicht 100 mal und finden in jedem gemessenen Fall $s \sim t^2$. Wir vermuten dann, dass der Zusammenhang $s \sim t^2$ allgemein gilt in allen unendlich vielen möglichen Fällen. Doch unendlich oft können wir ja nicht messen. Dass es aber trotzdem nicht falsch ist, in allen diesen unendlich vielen Fällen das Gesetz vorläufig für richtig anzunehmen, begründen wir mit dem Axiom von Descartes. Wir beschreiben demnach die Realität durch ein *Gesetz in der Sprache der Mathemaitk*, durch eine mathematische Beziehung, etwa durch Gleichungen, Formeln oder dergleichen, *die nur gültig sind innerhalb der Messgenauigkeit und unter den Messbedingungen*, d.h. im Rahmen des Experiments. Insofern stimmen unsere Gesetze nicht, sie sind ungenau. Genauere Messungen zwingen uns zu einer genaueren, verfeinerten Formulierung des Gesetzes.
Hat also Aristoteles zu unrecht sein Gesetz behauptet? Nach Descartes nicht, denn damals wusste man noch nichts von Gasen, von Luftwiderstand und solcherlei. Seine Aussage ist im damals für die Beobachtungen gegebenen Rahmen ja richtig. Und Galilei hat daher die Aussage eben nur verfeinert, in einen genaueren Rahmen gestellt. So ist man vorwärts gekommen und kommt weiter vorwärts. Wir halten also als gültig fest:

Methode 8.1 (Naturwissenschaften) *Wir beschreiben die Wirklichkeit durch mathematische Gesetze, die innerhalb der Messgenauigkeit gültig sind. Wir erklären nicht letzte Ursachen der Natur, sondern beschreiben nur ihr Verhalten. Legitimiert wird dieses Vorgehen durch die positive Erfahrung.*

Wir beantworten demnach nicht die Frage *„Warum... ?“* sondern die Frage *„Wie... ?“* — Man muss eben die **sinnvolleren** oder **vernünftigeren Fragen stellen**!
Das hier beschriebene naturwissenschaftliche Vorgehen, der Schluss von endlich vielen gemessenen Einzelfällen auf ein in unendlich vielen Fällen gültiges Gesetz, nennt man *induktiv* . Diese Art Schlussweise nennen wir auch (naturwissenschaftliche) *Induktion* (vom Besonderen zum Allgemeinen). Dagegen steht in der Mathematik die *Deduktion* , die genauer in der mathematischen *Logik* besprochen wird[3].
Wie verhalten sich somit Natur und Mathematik zueinander? Man schaut z.B. im Experiment, wie die Natur funktioniert und und nimmt dazu aus der Mathematik das Gesetz, das z.B. quantitativ den gleichen Sachverhalt spiegelt. Soll etwa die Formel, d.h. die Sprache der Mathematik, also passen, so muss sie sich verhalten wie die Natur. So ein Verhalten „so wie hier ... so auch da“, nennt man *analog* und spricht von einem *Modell* :

Axiom 8.2 (Mathematisches Modell) *Die Natur verhält sich analog zu den entsprechenden mathematischen Gesetzen. Diese Gesetze geben dann ein Modell der Natur.*

Modellhaft wird also die Natur durch die Mathematik beschrieben, so exakt wie nur möglich auf Grund unexakter Messungen, bis eben exaktere Messungen nach einem *exakteren Modell* verlangen. Das Modell verhält sich zur Realität so etwa wie die Modelleisenbahn zur wirklichen Eisenbahn. Man kann wohl mit der Modelleisenbahn Rangierprobleme studieren, was billiger ist als dies mit der wirklichen Eisenbahn zu tun. Doch mit der Modelleisenbahn eine Reise zu unternehmen, das geht eben nicht. Ein Modell stimmt immer nur in einem gegebenen Rahmen: dem Messrahmen. Es ist nie selbst die Wirklichkeit, es ist uns immer nur *Denkhilfe* oder auch *Denkkrücke*.
Wir merken uns:

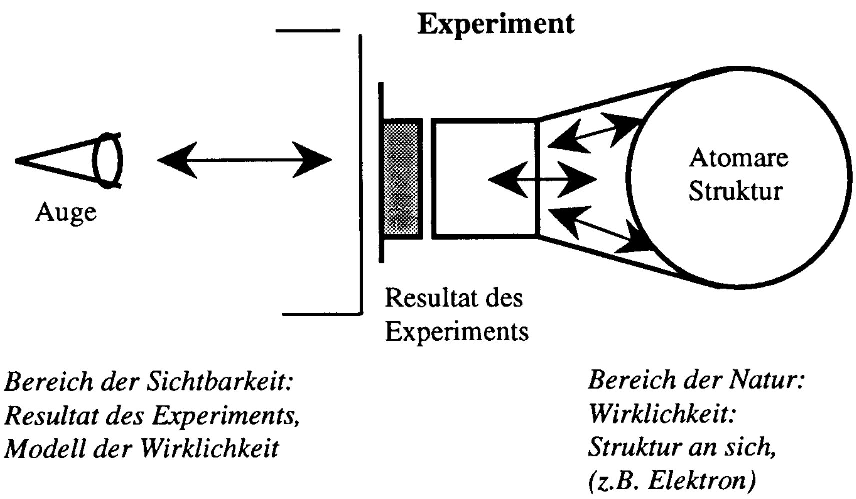
Wir erleben Natur wie Mathematik in ihrem Einzelverhalten kausal.
Natur und Mathematik zueinander aber verhalten sich analog.

8.2.4 Wozu Modelle?

In Abb. 8.6 ist die Beziehung zwischen *sichtbarer Wirklichkeit* und *Wirklichkeit an sich* schematisch dargestellt. Die Brille, durch die man sich feinere Strukturen in der Natur gewahr werden kann, die ausserhalb der durch die Sinne erreichbaren Grössenordnungen und Möglichkeinten liegen, ist das *Experiment.* Z.B. hat wohl noch niemand ein Elektron direkt „vorbeifliegen“ sehen. So ein Teilchen selbst hat ja keine Farbe, keinen Geschmack, keinen Geruch u.s.w.. Was also zeigt das Experiment? Als sichtbares Resultat erscheint natürlich nur die Wirkung das Experiments auf diese atomare resp. partikalhafte Struktur. Es zeigt uns ein Modell, das beim selben untersuchten Gegenstand abhängig von der Experimentieranordnung sehr verschieden ausfallen kann. So erweist sich ein Elektron einmal als *Partikel*, ein anderes Mal als *Welle*. Die dahintersteckende eigentliche Wirklichkeit jedoch bleibt uns verborgen. Sie

[3] Vgl. dazu Teil 2, vom Besonderen zum Allgemeinen, oder auch die Bemerkung zu Euklid auf Seite 9, Abschnitt 2.2.

Abbildung 8.6: Schematische Darstellung der Beziehung zwischen Mensch und Natur via Experiment



ist anders geschaffen als die Welt, in der wir leben: Die Welt des Menschen, der psychischen Wirklichkeit unseres Bewusstseins, die nicht mit der äusseren Realität gleichgesetzt werden soll.
Was taugen nun solche mathematischen Modelle? Sie sind eine tragende Säule unserer Kultur und den Menschen ein Segen. Denn seit es die Möglichkeit einer mathematischen Beschreibung der Natur gibt, sind Konstruktionen an die Stelle von Experimenten getreten. Ein Hochhaus zu bauen stellt kein Wagnis mehr dar. Wir wissen im voraus, dass es halten wird, wiel es berechnet worden ist. Über eine neue Brücke müssen wir nicht zuerst einen Versuchskarren schicken, um herauszufinden, ob sie hält, wenn die Rechnungen stimmen und alle Gefahren bei der Planung berücksichtigt worden sind. Wir können über die Schranken der Zeit hinweg das Verhalten der Natur so vorausberechnen und beherrschen in diesem Sinne die Zeit. Also:

Methode 8.2 (Vorausberechenbarkeit des Verhaltens der Natur) *Durch Verwendung mathematischer Modelle wird das Verhalten der Natur im jeweiligen Fall vorausberechenbar. Der Mensch wird hier so zum Herr der Zeit.*

Dass das nicht immer so gewesen ist, zeigt die Geschichte. Z.B. vor ca. 5000 Jahren stürzte die erste grosse Pyramide von Medium beim Bau zusammen. Diese riesige Baukatastrophe muss vermutlich tausende von Opfern gefordert haben. Man hat eben versucht — das erste Mal ohne Erfolg ...
Beweise sind auch nicht zuletzt daher äusserst wichtig, weil sonst die darauf fussenden Modelle falsch sein könnten und die Wirklichkeit damit falsch beschrieben würde, was in der Anwendung katastrophale Folgen haben kann. Auch für denjenigen, der gerechnet hat...

8.3 Woher? — Wie und wohin? — Wozu?

8.3.1 Woher stammt die Mathematik?

In 8.1.4 haben wir erfahren, dass der Name „Mathematik“ auf Pythagoras oder seine Umgebung zurückgeht. Doch wie ist es zu dieser Wissenschaft gekommen? Das Studium dieser Angelegenheit lässt uns vier Wurzeln unterscheiden. Davon zu wissen, das gehört zum Grundwissen über unsere Kultur. Nach solcher Bildung ruft unsere Zeit, besteht doch die Gefahr, dass Bildung Opfer wird eines alles, auch sich selbst und dann die Welt auffressenden Spezialistentums. Die vier Wurzeln sind:

1. Utilitaristische Wurzeln [4]
2. Dem Menschen innewohnende Wurzeln, Spieltrieb
3. Philosophische Wurzeln
4. Religiöse Wurzeln

Utilitaristische Wurzeln: Wie kam es dazu, zu dieser Wurzel? Drehen wir einmal in Gedanken die Zeit weit zurük. Im Gebiet Kreta – Santorini (auch Thira oder Thera, eine kleine Vulkaninsel ca. 110 km nördlich von Kreta) blühte um ca. 1500 v.Chr. die minoische Kultur, die damals durch einen gewaltigen Vulkanausbruch auf Santorini zerstört worden ist. Der Vultan Santorini ist damals buchstäblich explodiert. Weit mehr als die Hälfte der Insel wurde dabei weggesprengt und verschwand. Der Rest versank unter einer viele Meter hohen Tuffschicht, was uns heute ermöglicht, ganze Dörfer wieder auszugraben. Auf den Innenwänden dortiger Häuser sind gut erhaltene Fresken gefunden worden. Man sieht einen regen Schiffverkehr vermutlich zwischen Kreta und Santorini.
Doch wie war das denn möglich damals, diese Schifffahrt? Wie bringt man es fertig, mit solcher Konstanz der Richtung von Kreta nach Santorini zu segeln, so dass man die kleine, von weit her kaum sichtbare Insel nicht verfehlt? — Das ist ein ähnliches Problem wie bei den Salzkarawanen durch die Sahara: Wie findet man zur richtigen Zeit die lebensrettende Oase, ohne die Richtung ein wenig zu verpassen und ins Verderben zu laufen? Notwendig für solche Unternehmungen ist eine exakte Navigation am Firmament aufgrund komplizierter Geometrie sowie Zeit- und Kalenderarithmetik!
Man muss also in der geschichtlichen Frühzeit und auch in der Vorzeit schon recht gut gerechnet haben. Ohne Rechenkunst ist es ja nicht möglich, Handel zu treiben, Werte zu vergleichen, sich nach einem Jahr von irgendwoher in Europa kommend z.B. in Biel zu treffen, um Güter zu tauschen. Es braucht einen Kalender, es braucht daher Mathematik. Und wenn jedes Jahr der Nil in Ägypten wieder die Felder überschwemmt und mit Schlamm bedeckt hat, so mussten die Harpedonapten[5] die Felder neu vermessen um den Krieg unter den Felachen zu vermeiden. Dazu war exakte Geometrie unumgänglich.
Und heute? Wohl niemand bezweifelt die Nützlichkeit mathematischer Modelle. Wenn es erst um Geld geht, sind alle an fehlerfreien Rechnungen interessiert. Mathematik ist nützlich, ist unentbehrlich, ist nicht wegzudenken. Sie bringt Sicherheit, auf die der Mensch bedacht ist. Denn Sicherheit reduziert Stress. Sicherheit erlaubt ein ruhigeres Leben, erlaubt älter zu werden, auch Dir.
Doch war es alleine die Nützlichkeit, die der Mathmatik den Weg wies?

Dem Menschen innewohnende Wurzeln wie der Spieltrieb: Lust, Freude, Vergnügen, Spiel, auch sie haben der Mathematik zu Grosstaten verholfen. Nicht nur Schachspiel, Tangram oder der Rubik-Würfel alleine verdienen erwähnt zu sein. *Mathematische Spiele* sind ein riesiges Gebiet, womit man ein Leben verspielen könnte! So ist offenbar die Wahrscheinlichkeitsrechnung anfänglich aus dem Wunsch entstanden, die Gewinnaussichten bei Glücksspielen zu eröhen. Bekannt ist hier eine diesbezügliche Auseinandersetzung zwischen Blaise Pascal und dem Chevalier de Méré . Später finden wir in diesem Gebiet Namen wie Jackob Bernoulli , Moivre und Laplace, dem Lehrer von Napoleon. Zweifellos hat also der Spieltrieb viel zur Entwicklung der Mathematik beigetragen.

Philosophische Wurzeln: Dem Laien die philosophischen Wurzeln der Mathematik zu erklären bietet Probleme, denn man sollte erst mehr über beide Gebiete wissen. Zwei kleine Beilpiele mögen als Vertreter dessen dienen, was weiter noch Gewicht hat. Da war einmal Georg Cantor (1845 - 1918) , der „Vater der Mengenlehre“. Ursprünglich theologisch interessiert, wurde er später Professor für Mathematik und beschäftigte sich da auch viel mit philosophischen Problemen. Vor allem interessierte ihn die Natur des Unendlichen. Dies ist ein Gebiet, das vor ihm tabu war, eine reine Domäne der Theologen, war

[4] Nur das Nützliche wird als wertvoll erachtet
[5] griech. „Seilspanner“, Feldvermesser

doch „unendlich“ eine Eigenschaft Gottes. Cantor aber hat entdeckt, dass es *verschiedene Stufen von unendlich* gibt. Er hat neue mathematische Realitäten entdeckt: die *transfiniten Kardinalzahlen.* Und er hat entdeckt, dass man mit diesen unendlichen Zahlen rechnen kann wie mit gewöhnlichen Zahlen, dass man da eine Arithmetik aufbauen kann. Dass also ohne genaue Unterscheidung des Typs von unendlich das Gerede über unendlich ziemlich zwecklos oder aber auch gefährlich sein kann … — dass man z.B. in der Theologie sehr vorsichtig sein muss.
Und da ist 1931 Kurt Gödel und mit ihm später auch Turing oder Ramsey mit dem Vollständigkeitssatz bzw. dem Unvollständigkeitssatz oder den Berechenbarkeitsaussagen. So hat Gödel gezeigt, dass es in der Mathematik Theorien gibt, in denen Aussagen gemacht werden können, zu welchen es auf der logischen Stufe der Sprache, in der die Theorien formuliert sind, keinen Beweis gibt. Da gibt es also irgendwie formulierbare Aussagen, die weder als richtig beweisbar noch als falsch wiederlegbar sind! Der Mensch ist also da an die *Grenzen seiner Erkenntnismöglichkeiten* gekommen. *Er kann beweisen, dass es sprachlich formulierbare Sachverhalte gibt, die nicht beweisbar sind.*

Religiöse Wurzeln: Und auf so etwas eingehen in der heutigen Zeit, wo doch so viele den Religionen entwachsen sind? Aber dagegen: Kann es sich ein gebildeter Mensch leisten, sich in seiner Kultur nicht auszukennen? Wohl kaum! Er würde sich so nämlich zum einseitigen Spezialisten degradieren, der ausserhalb seiner Spezialität nichts zu bieten hat in unserer komplexen Realität. Solche Menschen sind leicht manipulierbar, denn infolge ihres Unvermögens ausserhalb ihres Faches werden sie da abhängig von andern, also unfrei…
Früher war die Religion nicht so getrennt vom täglichen Leben wie heute. Im alten Ägypten und Babylon, aber auch bei den alten Juden spielte die *Zahlenmystik* eine nicht wegzudenkende Rolle. Man war als Mensch eingebettet in das kosmische Geschehen und baute die einfachen in Mensch und Kosmos auffindbaren Zahlen ins religiöse Denken ein. Als Beispiel betrachten wir die Zahlen zwölf und dreizehn. Zwölf, die Zahl des Kosmos und auch des Zodiaks und dreizehn, die „heute dafürgehaltene Unglückszahl“. Da hat doch das Jahr zwölf Vollmonde, d.h. zwölf Mond-Monate. Da ist also der Mondrhythmus, derselbe Rhythmus wie der Rhythmus der Frau. Doch manchmal geht es eben nicht auf. Ab und zu sind es dreizehn Vollmonde pro Jahr, meisens aber nur zwölf. Ebenso, man staune hier, lassen sich um eine Kugel, z.B. um einen Tennisball, exakt zwölf weitere gleichgrosse Kugeln gruppieren, so dass die äussern Kugeln die innere berühren. Doch geht es nicht satt. Irgendwo bleibt immer eine Lücke. Aber eine dreizehnte Kugel hat nie Platz. Das Abbild des Kosmos ist nun im Volk, in der Gruppe zu suchen. So hatte Jsrael zwölf Stämme, und Christus hat zwölf Jünger gehabt, wobei es wiederum da nicht aufging. Einer, Judas nämlich, musste ausgetauscht werden. Auch gab es zwölf kleine Propheten, zwölf Taten des Herakles, zwölf Kreuzstationen, zwölf Tore im himmlischen Jerusalem, die Zahl der Patriarchen war zwölf. Wie erwähnt war der Kosmos nicht ganz stabil in seinem Rhythmus, durchwaltet auch vom Bösen, das im Kosmos durchaus seinen Platz hat. — Und die Frau im Vergleich war auch nicht stabil… Dann zwölf als drei mal vier: Der Kosmos als göttlicher Funke in der Materie. Denn drei war die göttliche Zahl und vier die Zahl des Materiellen, der Erde. Ebenso ist zwölf fünf und sieben. Fünf, die Zahl des Menschen und sieben, die Zahl der Schöpfung … So hatte der Mensch die im Gefühl nachvollziehbare Verbindung zum Kosmos um den Menschen. Ähnliches gilt für andere Zahlen.
Und da war auch noch die Sakralgeometrie . Im alten Ägypten, Griechenland oder auch nur im Zeitalter der europäischen Gotik folgten die Masse und Formen sakraler Bauwerke, von Kultstätten, Tempeln, Altären und Kirchen, streng den sakralen Regeln. Ein Tempel konnte nicht einfach so, irgendwie, gebaut werden. Proportionen waren göttlich, sie mussten stimmen, übereinstimmen mit der Lehre und den Proportionen des Ebenbildes Mensch. Ebenso die Standbilder von Göttern oder Heiligen — sie folgten strenger Mathematik und nicht dem Zufall.
Als Beispiel vergleiche man Abb. 1.1 auf Seite 5: Ich zeige hier eine exakte Zeichnung der Umrisse eines griechischen Standbildes, des sogenannten „Poseidon des Artemision“ von ca. 460 v.Chr., wahrscheinlich ein Werk des Kalamis. (Das Original ist gefunden worden 1928 bei Euböa auf dem Meeresgrunde der Ägäis. Es steht heute im Nationalmuseum in Athen.) Hier ist höchstwahrscheinlich wirklich *Poseidon* dargestellt, also ein Gott. Wie kann man das behaupten, von einer im Meer aufgefundenen Bronzefigur? Wir gehen davon aus, dass das Alter mit Hilfe physikalischer Methoden richtig bestimmt worden ist. Dann betrachten wir die vom Autor nachempfundenen und eingezeichneten geometrischen Linien.

Ja, wie soll man überhaupt einen Gott darstellen, da man einen solchen doch nicht sieht? Nun, da hat man ja doch den Menschen als sein Ebenbild. Auch griechische Götter hatten menschliche Züge. Stellvertretend zeigt der Bildhauer also den Menschen, den Mann natürlich. Studiert man jetzt die Geometrie, in die dieses Standbild gegossen ist, so wird einiges klarer. Die Figur ist in ein Quadrat gestellt, das Symbol der Zahl vier, das Zeichen des Irdischen, der Materie. Die Figur ist auch irdisch: Sie besteht aus Bronze und zeigt einen Menschen. Aber wieso ist nun doch ein Gott und kein Mensch dargestellt? — Da sind ja noch das gleichseitige Dreieck und der Kreis um die Figur. Wie das Quadrat erkennt man diese geometrischen Gebilde als nicht zufällig, denn sie sind ja offensichtlich überbestimmt durch ihre Berührungspunkte mit der Bronze. Z.B. der Kreis: Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, kann man immer genau einen Kreis legen. Aber durch vier Punkte? — Jetzt ist es kein Zufall mehr. Ebenso ist das in Horizontale und Vertikale eingepasste grosse Quadrat nicht zufällig. Ebenso das grosse gleichseitige Dreieck, das sogar die Quadratecke als Randpunkt hat. Dieses Standbild sehen wir also streng in die Geometrie eingespannt, ins „rechte Mass“. Detailanalysen zeigen, dass der goldene Schnitt in allen je möglichen Teilungspunkten angewandt worden ist. Diese Bronze ist durch und durch harmonisch, so wie der absolut vollkommen harmonisch ausgeformte Mensch, der so in der Natur höchstens als statistisches Mittel von idealen ausgewachsenen Menschen vorkommt. Selbst den Bart finden wir nach dem goldenen Schnitt unterteilt, also durchaus geplant, von kundiger Meisterhand. Doch wieso ist jetzt da ein Gott und nicht ein Mensch dargestellt? Eben — weil doch etwas nicht stimmt an der Bronzefigur. Doch der Meister, der sie geschaffen hat, der soviel an Wissen über die Masse des Menschen hineingeformt hat, wird sich doch nicht an der entscheidenden Stelle einen so groben Lapsus erlaubt haben. Wo also liegt das Erkennungszeichen?
Beim ideal geformten Menschen nämlich findet man die Spannweite der Arme als gleich gross wie die Körperhöhe! Bei ausgestreckten Armen passt er genau ins Quadrat. Das wusste man auch schon in der Antike, Vitruv beschreibt es ausführlich. Und eben dieses Gesetz ist hier durchbrochen. Die rechte, wahrscheinlich einen Speer oder einen Dreizack haltende Hand, weist in die Ecke des Quadrats, ins Symbol des Materiellen. Sie wirkt also ins Materielle, hält da Ordnung, führt da den Kampf, so erlebt vom Menschen. Sie berührt aber auch das Dreieck, das Symbol des Göttlichen und den Kreis, das Symbol des Vollkommenen. In diesem Sinne wirkt sie auch. Doch die linke Hand weist zielend über das Quadrat hinaus, was beim Menschen bei seiner kürzeren Armlänge nicht existieren kann. Sie weist in die Spitze des gleichseitigen Dreiecks, ins Symbol des Göttlichen allein und übersteigt noch ein ganz wenig den Kreis, das Symbol des Vollkommenen. Diese Figur zeigt also keinen Menschen, denn so ist der Mensch nicht gebaut. Sie zeigt ein Ebenbild des Menschen, das ins Materielle (ins Quadrat) wirkt, aber ins Göttliche (ins Dreieck) weist. Und dies im Kreis, im Vollkommenen. Aus diesem Grunde wage ich zu behaupten, dass hier ein Gott dargestellt ist, einsichtig nur denjenigen im alten Griechenland, die eingeweiht waren in die Wissenschaft der Mathematik. *Man musste Mathematik können, um näher bei den Göttern zu sein, um ihre Standbilder zu deuten, mehr zu verstehen. . .*

Und dann die Dinge wie etwa die Quadratur des Zirkels oder das delphische Problem. . .

Als Beispiel sei das letztere angeführt. Delphi war neben Delos und Olympia, vielleicht auch Epidauros, eines der Haupttheiligtümer des alten Griechenlands. Hier im heiligen Hain wirkte das Orakel, das Sokrates weisgesagt hat, es gäbe auf Erden keinen weiseren Mann als er. Oder der schwerreiche König Krösos von Lydien, man denke an ihn, er, der da mitgeteilt bekam, er werde ein grosses Reich zerstören wenn er den Fluss Halys überschreite. . . Sein eigenes grosses Reich hat er dann dort zerstört. Und die Nachricht um diesen Schrecken geht heute noch um in der Welt der Gelehrten. Auch schickten die Athener einmal Gesandte zum delphischen Orakel, als wieder in der Polis die Pest wütete.[6] Hier verehrte man Apollo , der Hauptgott der Pythagoräer, Hauptgott der Mathematiker also, den Gott des Lichtes, der Wahrheit, der Erleuchtung — mit seiner Aufforderung zur *Selbsterkenntnis*, der Gott auch der drei mal drei Musen, Gott der Kunst, Gott der Musik. Und siehe da, die Gesandten kamen mit einer Mathematikaufgabe zurück. Die Pest werde bezwungen, so der Orakelspruch, wenn es gelinge, wie man glaubte mit den damaligen Werkzeugen der Geometrie, also mit Zirkel und Lineal, dem Erleuchtungsgott Apollo einen

[6] So berichtet uns Eratosthenes.

kubischen Altar zu bauen, der exakt doppelten Inhalt hat wie ein vorhandene Altar in Delphi, am Nabel der Welt. Man hat dann in der Antike allerlei versucht. Mit Zirkel und Lineal alleine ist es nicht gegangen. Die Erleuchtung kam so nicht. Und jahrhundertelang haben die Mathematiker weiter versucht. Erst im letzten Jahrhundert gelang auf den Fundamenten der Theorien von Abel (1802 – 1829) und Galois (1811 – 1832) der Grosserfolg: *Man konnte beweisen, dass die Würfelverdoppelung mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.* — Anscheinend des Gegenteil von dem, was das Orakel gefordert hatte. So hat die Religion in die Mathematik gewirkt. Zweitausend Jahre lang war man hinter der Lösung des Problems her. — War dies etwa ein schlechter Streich des delphischen Orakels? War das vom Orakel Verlangte wirklich nicht möglich?
Eigentlich war es kein schlechter Streich. Das aber können wir erst sehen, wenn wir nicht nur über Mensch und seine Geometrie mehr wissen, sondern wenn wir dieses delphische Denken auch mehr verstehen, wenn wir die heutige Sichtweise etwas beiseite schieben. Denn da stand ja noch etwas geschrieben über dem Eingang zum Tempel des Apoll. Zuerst jedoch folgende Feststellung: Messen wir zuerst die Körperlänge h des ausgewachsenen, harmonisch geformten Menschen und anschliessend seine Ãmaximale Länge H bei hochgestreckten Armen vom Fuss bis zu den Fingerspitzen, so stellen wir fest, dass im Mittel $H : h = \sqrt[3]{2} : 1$ gilt. D.h. $H^3 : h^3 = 2 : 1$. Der mit H gebildete Kubus ist demnach gerade doppelt so gross wie der mit h gebildete. Und was stand da schon wieder geschrieben über dem Eingang zum Tempel des Apollo in Delphi? Da stand übersetzt: „*Mensch, erkenne Dich selbst!*[7]“ Also nachdenken soll der Mensch, um die Pest besiegen zu können. Erkenntnis gewinnen, Selbsterkenntnis, über sich und sich erkennen. Dazu erst nachdenken über sich. Forschen also. Doch mehr als 2000 Jahre sollte es noch dauern, bis die Menschen soweit waren, dass sie Bakteriologie zu betreiben und mit Antibiotika umzugehen gelernt hatten. Und jetzt, da die Pest damit besiegt ist, haben wir so endlich auch zum Orakelspruch einen Zugang für ein Verständnis gefunden, wenn auch immer ein Gefühl des Unverständnisses bleiben mag.[8] Dazu hat die Mathematik etwa gleichzeitig ihr altes Problem gelöst. Und so sind wir weiter gekommen.

8.3.2 Wohin geht nun die Mathematik? Und wie geht sie vor?

Die Frage „wohin die Mathematik gehe“ muss von der Forschung beantwortet werden. Denn wohin die Mathematik als ganzes geht, das kann heute niemand mehr sagen. Der letzte Mathematiker, der diese Wissenschaft noch einigermassen ganz überblickt hat, war wahrscheinlich David Hilbert (1862-1942). Seither hat das Gebiet sich dermassen explosionsartig ausgedehnt, dass es heute rein aus Zeitgründen niemandem mehr gelingen kann, alles zu erarbeiten in einem endlichen Leben. Man ist hier zum Spezialisten verdammt.
Und man kann auch nicht sagen, wie lange es noch dauern wird, bis sich die Forschung auf diesem Gebiet tot gelaufen hat. Denn Wissenschaften müssen nicht unbedingt immer Höhepunkte feiern. Unsere Erde und somit die Menschheit ist einmal geboren und wird einmal vergehn, dies aus rein physikalischen Gründen. Alles Endliche hat also einmal ein Ende, auch jede Wissenschaft und jede Kunst. Jedoch vermag niemand zweifelsfrei bei einer nicht schon toten Wissenschaft vorherzusagen, wie lange sie noch blühen wird.
Auf den Ingenieur bezogen wird die Frage zu beantworten viel, viel einfacher. Die Ingenieurmathematik als der Teil der Wissenschaft Mathematik, der in Ingenieurfächern Anwendung findet, füllt vielleicht einige 1000 Seiten. Doch gemessen am Ganzen hat er an einem winzig kleinen Orte platz. Die Ingenieurmathematik steht zur gesamten Mathematik etwa so wie das Vorwort zu einem Buch. Das soll ein Ingenieur nie vergessen, wenn er mit seinen Kenntnissen der Sache über Mathematik urteilt und andere belehren will.
Wie man aber in der Mathematik vorgeht, das muss auch ein Ingenieur wissen. Üblicherweise weisen Theorien da eine „Turmstruktur“ auf: Ausgehend von Definitionen, sprachlichen Abmachungen, Axiomen gelangt man mittels eines logischen Deduktionsgerüstes zu mathematischen Sätzen, zu zentralen wichtigen Aussagen. Und anhand einsichtiger Beispiele genau das zu zeigen wird eine der Aufgaben der folgenden Teile sein. Um über Mathematik urteilen zu können, sie richtig und gewinnbringend anwenden

[7] *griech.* $\gamma\nu\omega\vartheta\iota\ \sigma\alpha\upsilon\tau o\nu$
[8] Vieles bleibt immer unverständlich. Ein Skeptiker muss behaupten, der Nachbar, der da angeblich voller Schmerzen schreit, sei doch nur ein Simulant, denn Schmerz ist nicht messbar...

zu können, um in ihr „gebildet“ zu sein, muss man sie kennen. Kennen aber kann man sie nur, wenn man sie erlebt hat, wenn man an Beispielen erfahren hat, was ihr tiefes Wesen ist.

8.3.3 Wozu die Mathematik?

Wie wichtig die Möglichkeit der *Vorausberechnung* mit Hilfe mathematischer Modelle ist, haben wir in 8.2.4 auf Seite 33 geschildert. Mathematik gibt *Denksicherheit* — und *Ingenieure brauchen Sicherheit*, denn sie bauen darauf. In der Mathematik „weiss man, wovon man redet, man ist sich einig über die Wahrheit von bewiesenen Sätzen“, sofern man die Voraussetzungen sowie die Logik akzeptiert. Dagegen gelten Messungen als fehlerbehaftet, also als unexakt. Und somit sind auch auch mathematisch beschriebene Modelle in den Naturwissenschaften unexakt, sofern sie nur Modelle sind.

$\leadsto$ **Merke: Mathematik ist die Sprache der exakten Naturwissenschaften und damit der Technik. Auf sie baut die Technik Effizienz und Sicherheit in komplexeren Situationen. Durch sie unterscheidet sich der Ingenieur vom Handwerker.**

Mathematische Begriffe, Sachverhalte und Methoden sind in den Ingenieurwissenschaften unverzichtbar. Mathematik ist hier Grundlage und ebenso unerlässliches Hilfsmittel für Fachkundige im ingenieurnahen Bereich, deren Kenntnisse über das blosse Kopieren oder Abschreiben unverstandener Inhalte hinausgehen. Um sich im Ingenieurbereich als fachkompetent ausweisen zu können muss absolut garantiert sein, dass jemand Konstruktionen und Projekte nicht in verantwortungsloser Weise auf eine Basis von blackboxartig übernommenen und damit ungesicherten Inhalten stellt. Das hiesse ja seinen Job nicht zu machen — oder die zu tragende Verantwortung, für die diese Leute bezahlt werden, an die „black box“abzuschieben. Hier liegt der Kern der Verantwortungslosigkeit, in welcher technische Unfälle und Katastrophen serienweise ihre Ursache haben.

Auch dient uns Mathematik als *Denkschule*. Hier haben tatsächlich grossangelegte Versuche in Schulen ergeben, *dass bei mehr Mathematik die Denkleistungen der Unterrichteten besser werden*. In andern Fächern konnte man ähnliche Feststellungen nicht machen, obwohl immer noch solche Behauptungen kursieren.[9] Daraus aber muss jeder selbst die Konsequenzen ziehen. Statistische Aussagen brauchen für den Einzelfall nicht zuzutreffen. Jedoch bei vielen Einzelfällen wird ihr Eintreffen wohl kaum ausbleiben.

Obendrein ist die Mathematik seit den Anfängen des wissenschaftlichen Denkens in der altgriechischen Kultur zentraler Bestandteil der *Bildung* (im deutschsprachigen Sinne) in einer Leitkultur. Diese Tradition ist bis heute in keiner Hochkultur in Frage gestellt worden. Wo solche Erscheinungen der Infragestellung auftreten, tritt Dekadenz und Unverstand auf die Bühne des Geschehens. Etwa heute dort wo die Irrlehre grassiert, dass man alles der freien Marktwirtschaft überlassen kann. Da gilt es zu bedenken, dass dieser freie Markt mit seinem Ziel der Rendite noch nie unentgeltliche wissenschaftliche oder auch künstlerische Sonderleistungen hervorgebracht hat. **Es gibt eben Dinge, die die Marktwirtschaft nicht hervorbringen kann**, wie z.B. auch die Verfassung eines Staates, ethische Richtlinien, die Gesetze des Zusammenlebens, die für den Staat unerlässliche Gesundheit der Bürger, die für den demokratischen Staat unerlässliche Bildung der Bürger, ihre Friedfertigkeit, Gelassenheit, ihr psychisches Wohlbefinden, Ruhe und Ordnung im Lande u.s.w.. Das Gesetz von Angebot und Nachfrage führt zum Weg des geringsten Widerstandes, zum Streben nach dem minimalen Aufwand mit maximaler Ausbeute, also weg von der Anstrengung, die man auf sich zu nehmen hat um etwas Bildung zu erhalten. Das läuft in Bildungsfragen gegen den Sinn des Staates und den Zweck einer Schule. Das kann kaum auf der Grundlage des geltenden Rechts seriös vertreten werden.

[9] Das jedenfalls hat die Presse berichtet.

Und nicht zuletzt kann die Mathematik dann auch noch Spass machen...
Weiteres zum Thema vgl. auch unter „Materialien Architektur: Skript Architektur und Mathematik 3, d“vom Autor, Kapitel „Die Kunstfrage — und vom Nutzen der Mathematik für den Architekten“.

8.4 Beweisen oder anschaulich begründen?

8.4.1 Ein Beispiel aus dem Rechnen mit Primzalen:

Wir wollen uns jetzt folgende Frage stellen:

Problem 8.1 (Primzahlexponenten) *Ist $2^p - 1$ eine Primzahl, falls p eine Primzahl ist?*

Die Menge der Primzahlen kennen wir gut: $\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$. Es ist:

$$2^2 - 1 = 3 \in \mathbf{P},$$

$$2^3 - 1 = 7 \in \mathbf{P},$$

$$2^5 - 1 = 31 \in \mathbf{P},$$

$$2^7 - 1 = 127 \in \mathbf{P},$$

Gilt somit allgemein $2^p - 1 \in \mathbf{P}$ für $p \in \mathbf{P}$? Einer, der hier die Methode der naturwissenschaftlichen Induktion anwendete, käme jetzt zum Schluss, dass ein Resultat auch im allgemeinen Fall Gültigkeit haben muss, wenn es in einigen besonderen Fällen beobachtet worden ist. Leider funktioniert diese Schlussweise nicht, denn es ist $2^{11} - 1 \notin \mathbf{P}$, denn diese Zahl hat den Teiler 23. Wir merken uns daher:

Axiom 8.3 (Beweispflicht in der Mathematik) *Eine mathematische Aussage muss man exakt beweisen.*
Allgemeine Behauptungen aufgrund blosser besonderer Beobachtungen sind nicht erlaubt.

8.4.2 Das Beispiel der pythagoräischen Zahlentripel:

Wir wollen folgende Sprechweise werwenden:

Definition 8.1 (Pythagoräische Zahlentripel) *Ein Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen $(\in \mathbf{N})$, das der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ genügt, heisst* **pythagoräisches Zahlentripel**.

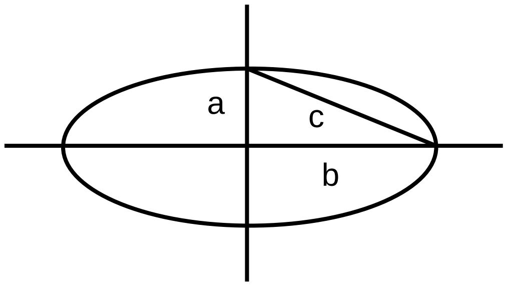
Solche Zahlen existieren und sind bekannt. In vielen Büchern finden wir einige aufgelistet. Z.B.

$$\begin{array}{rl} (3,4,5): & 3^2 + 4^2 = 5^2 \\ (6,8,10): & 6^2 + 8^2 = 10^2 \\ (5,12,13): & 5^2 + 12^2 = 13^2 \\ (7,24,25): & 7^2 + 24^2 = 25^2 \\ (8,15,17): & 8^2 + 15^2 = 17^2 \end{array}$$

Als interessant erscheint jetzt folgendes Problem:

Problem 8.2 (Pythagoräische Zahlentripel) *Wieviele solcher Tripel gibt es und wie berechnet man sie, falls das überhaupt möglich ist?*

Abbildung 8.7: Schematischer Grundriss eines prähistorischen Tempels in Grossbritannien



Ja, und wenn es unendlich viele solcher Tripel gäbe, wie könnte man dann tatsächlich auch beweisen, dass es unendlich viele sind? Einzelüberprüfungen sind ja immer nur in endlich vielen Fällen möglich! — Es braucht also hier Methoden, die „dicht" halten. Ohne mehr Mathematik geht es also nicht. Zudem hat man bezüglich solcher Tripel etwa zwischen 1970 und 1980 eine interessante Entdeckung gemacht :

Bei der Untersuchung der gefundenen Fundamente von megalithischen Bauten in Grossbritannien, die man für Tempel hält, hat man entdeckt, dass die erhaltenen Fundamente, also die Grundrisse, die Form von Ellipsen haben (vgl. Abb. 8.7)[10]. Doch diese Ellipsen sind offensichtlich nicht zufällig. Einmal findet man überall in allen solchen Tempeln weit herum dasselbe Grundmass. Die Halbachsen a und b sind immer ganzzahlige Vielfache dieses Grundmasses. Somit muss es eine „megalithische Elle" gegeben haben, wahrscheinlich durchgesetzt von einem Staatswesen, das man nicht mehr kennt. Weiter finden sich in den Massen a, b und c immer pythagoräische Zahlentripel — und zwar meistens nicht nur die einfachsten! Somit stellt sich die Frage, wie diese Steinzeitmenschen (vielleicht 2000 v.Chr.) solche Tripel haben finden können, hatten sie doch keine Schrift. Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegung zeigt, dass man die gefundenen komplizierteren Tripel unmöglich zufällig einfach so entdecken kann. Eines vielleicht schon, doch dann muss man vernünftigerweise annehmen, dass hier nachgedacht worden ist. Es handelt sich ja auch nicht um nur irgendwelche Bauten. Jetzt kann man natürlich nur noch spekulieren.
Wieso ich das erzähle? Ich möchte eben wissen, ob ein angehender Ingenieur heute das auch noch kann, was da Steinzeitmenschen offenbar konnten! Also: Wie finden wir solche Tripel? (*Hinweis: Falls alle eigenen Versuche fehlgeschlagen haben: Ein Tip ist gegeben unter 8.6.)*

8.4.3 Sind Brüche wirklich eine so klare Sache?

Wir rechnen einmal los, wie man es in der Schule lernt:

$$1=\frac{9}{10}+\frac{1}{10}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{1}{100}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots=0.999999\ldots$$

Dieses Verfahren bricht ersichtlich nie ab, geht also immer weiter. Es ist daher:

$$1=0.999999\ldots=0.\overline{9}.$$

Kann denn das stimmen? Es ist doch $1=1$. Und 1 ist ja nicht gleich sonst irgend etwas, z.B. $0.99999\ldots$, oder nicht? — Oder etwa doch? Wie soll man sich das erklären?
Die gewöhnliche Schulweisheit genügt offenbar hier nicht mehr zur weiteren Schaffung von Klarheit.

Problem 8.3 (Theoriedefizit) *Eine exakte Theorie wird hier absolut notwendig!*

Wir halten fest:

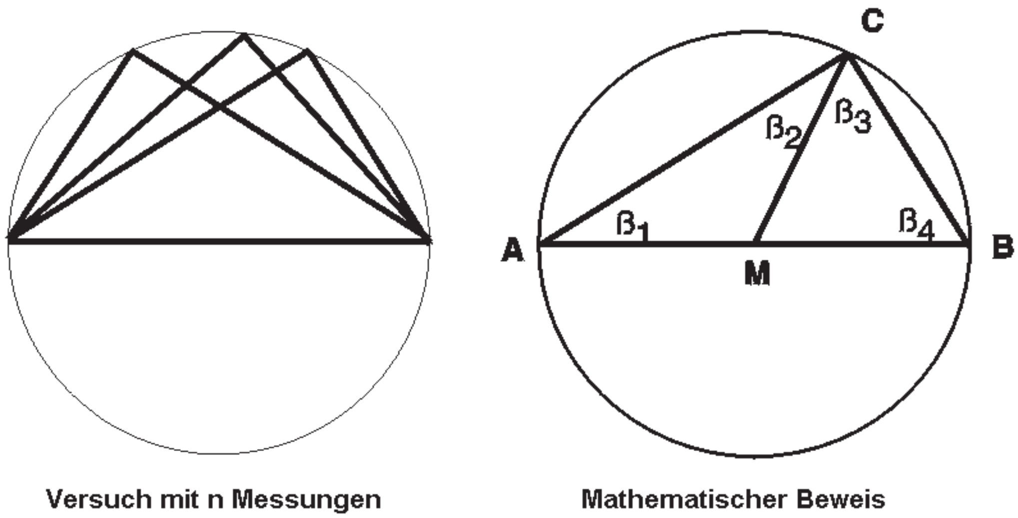
[10] Mündlich mitgeteilt in einem Vortrag von Prof. L. B. Van der Waerden

Methode 8.3 (Beweisen in der Mathematik) *In der Mathematik genügen blosse Behauptungen oder Vermutungen nicht mehr.*
Man muss die Aussagen, die man vermutet, auch streng beweisen.

Was ein strenger Beweis dann eigentlich ist, zeigen wir in den folgenden Teilen.

8.4.4 Wozu beweisen, wenn messen auch genügt?

Abbildung 8.8: Thaleskreis



Oft geht ein Lehrer in der Schule wie folgt vor: Er nimmt ein grosses Brett, zeichnet darauf einen Kreis, dann in diesem Kreis einen Durchmesser. An jedem Ende dieses Durchmessers schlägt er nun je einen Nagel ein und spannt von den Nägeln aus eine Schnur, die den Kreisrand berührt. Wie man weiss, entsteht so auf dem Kreisrand jeweils ein rechter Winkel. Um dies zu erkennen, misst er diesen Winkel in vielleicht sieben verschiedenen Positionen und stellt dann fest: „Dieser Winkel ist immer rechtwinklig.“ (Vgl. Abb. 8.8.) Ist dieses Vorgehen erlaubt?
Das Vorgehen des Lehrers nennt man *„Exploration“*[11]. Das Resultat dieser Exploration aber ist kein bewiesener Sachverhalt, sondern nur eine Vermutung. Die verwendete Schlussmethode erkennen wir als eine *Extrapolation*, d.h. sie ist *induktiv*. Mit der induktiven Methode von nur sieben gemessenen Fällen auf unendlich viele allgemeingültige Fälle zu schliessen wäre *Naturwissenschaft* und nicht *Mathematik*. Was dagegen die Mathematik eben ausmacht, ist ein mathematischer Beweis.
Einen solchen ersieht man aus Abb. 8.8 rechts. Es gilt für jeden Punkt C auf der Kreislinie ($C \neq A, C \neq B$):

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 180^o.$$

Weiter ist wegen $\beta_1 = \beta_2$ und $\beta_3 = \beta_4$ jetzt:

$$\beta_1 + \beta_3 = \beta_2 + \beta_4,$$

also

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \beta_2 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 2(\beta_2 + \beta_3) = 180^o.$$

Und daher $\beta_2 + \beta_3 = 90^o$. *q.e.d.*

[11] Erforschung

Noch einfacher: Zeichne statt einen Halbkreis einen Vollkreis. Der Punkt C wird an M gespieglet. Dann entsteht offensichtlich ein Rechteck. In einem Rechteck messen die Winkel 90^o... ☺

8.5 Abstrakte Begriffe in der Mathematik

Bekanntlich machen viele Menschen gerne einen grossen Bogen um Dinge, die nicht so ganz konkret sind. Falls es sich um Verworrenes handelt, so versteht man das natürlich. Aber sonst? Klare Dinge, die nicht so konkret sind, nennt man *abstrakt.* Und gerade in der Mathematik häufen sich solche abstrakten Begriffe und Betrachtungsgegenstände geistiger Natur besonders. Sie erfordern bei der Betrachtung grosse Anstrengung, sehr starke Konzentration, viel Denkenergie. Mit Trägheit und Faulheit ist da nichts zu wollen. Man muss mit Härte gegen sich selbst am Ball bleiben, bis man die Sache endlich durchschaut hat, die da mit den äusseren Sinnen nicht wahrzunehmen sind. Das geht allen so. Niemand hat je einen idealen Punkt gesehen — oder einen idealen Kreis. Man sieht nur innerhalb der Messgenauigkeiten scharf. Die Gegenstände der Mathematik nennt man daher *geistige Realitäten* , im Gegensatz zu den physikalisch wahrnehmbaren. Betrachten wir dazu zwei Beispiele.

8.5.1 Kettenbrüche

Wer hat schon draussen in der Natur einen *Kettenbruch* gesehen? Wo kann man sowas kaufen? — Ja, was ist das überhaupt, so ein Kettenbruch?
Schauen wir uns dazu ein Beispiel an. Es ist:

$$\frac{31}{14} = 2 + \frac{3}{14} = 2 + \frac{1}{\frac{14}{3}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Diesen Bruch schreiben wir kurz $[2; 4, 1, 2]$, denn die 1 sind ja gegeben. Bei rationalen Zahlen bricht dieses Verfahren immer ab. Es gilt:

Satz 8.9 (Über endliche Kettenbrüche) *Jede rationale Zahl lässt sich in einen endlichen Kettenbruch entwickeln und umgekehrt.*

Was ist aber z.B. bei der Zahl π ? — Hier bricht die Kettenbruchentwicklung nicht ab. Man redet von einem *unendlichen Kettenbruch.* Bei π zeigt es sich, dass diese Entwicklung total unregelmässig ist. Man kennt zwar den Anfang, doch weiss kein Mensch, wie es dann weitergeht. Was also die Kettenbruchentwicklung von π ist, wird nie jemand konkret sagen können. Dieser Kettenbruch ist eben *abstrakt.*
Andererseits erlebt man manchmal interessante Überraschungen mit Kettenbrüchen. Betrachten wir als Beispiel den Kettenbruch

$$g = [1; 1, 1, 1, 1, 1 \ldots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Da dieser Kettenbruch unendlich ist, gilt $g = 1 + \frac{1}{g}$. Und somit $g^2 = g + 1$. Somit hat man eine quadratische Gleichung: $g^2 - g - 1 = 0$. Daraus errechnet man $g = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Da der gegebene Kettenbruch positiv sein muss (es wird nirgends subtrahiert), kommt nur die positive Lösung in Frage. Daher ist:

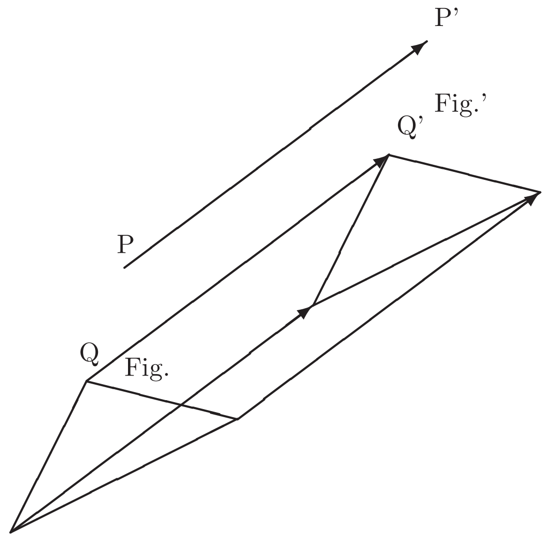
$$g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Das ist aber genau die Zahl, die beim *goldenen Schnitt* auftritt! Was für eine Überraschung, dass zum goldenen Schnitt so ein schöner Kettenbruch gehört! Da staunt doch selbst der Mathematiker...

8.5.2 Vektoren

Bemerkung: Hier ist nur eine kurze Einführung in die Vektorrechnung gegeben. Eine tiefere Behandlung erfolgt in Teil 12.

Abbildung 8.9: Translation als geometrischer Vektor



Koordinatenfreie Vektoren: Was ist das eigentlich, ein *Vektor*? Oder einfacher, was ist ein *geometrischer Vektor*? (Hier sei vorläufig nur die Rede von *Vektoren der Geometrie.*) Zuerst wollen wir mit einem vielverbreiteten Missverständnis aufräumen, denn ich konnte beobachten, dass Vektoren von Studenten anfänglich oft mit *geometrischen Pfeilen* verwechselt wurden. Doch *Pfeil* ist ein anderer, viel anschaulicher Begriff. Man definiert ihn so:

Definition 8.2 (Geometrischer Pfeil) *Ein* **geometrischer Pfeil** *ist eine gerichtete Strecke.*

Der Pfeil hat aber etwas mit dem Vektor zu tun, denn Pfeile sind dienlich, um den geometrischen Vektor zu definieren. Dazu studieren wir eine Translation[12] einer geometrischen Figur resp. der ganzen Ebene oder des Raumes. Eine Figur wird verschoben, indem man jeden Punkt der Figur um die gleiche Strecke in der selben Richtung verschiebt. D.h. man verschiebt jeden Punkt der Figur um *denselben Pfeil.* Genauso wenn man die ganze Ebene oder den gesamten Raum verschiebt. Dazu sind natürlich unendlich viele Pfeile nötig. Und es ist daher unmöglich, alle diese Pfeile aufzuschreiben. Um eine Translation eindeutig festzulegen, genügt es aber, einen einzigen Pfeil anzugeben. Der Pfeil bestimmt die Translation, denn es ist nun unschwer, alle andern nötigen parallelen, gleichgerichteten, gleichlangen Pfeile sich vorzustellen. Und diesen unendlich vielen Pfeilen, die eine Translation ausmachen, gibt man nun den Namen *„Vektor“*. Es handelt sich also um eine unendliche Menge oder um eine *Klasse* von Pfeilen.

Definition 8.3 (Vektor) *Eine Klasse von geometrischen Pfeilen, die zu einem gegebenen Peil gleichgerichtet sind und zu diesem die gleiche Länge haben, heisst* **geometrischer Vektor**.

Schreibweise: Einen Vektor mit dem Namen v bezeichnen wir mit $\vec{v}$.
Wie gesagt ist also ein Vektor $\vec{v}$ eindeutig festgelegt, wenn man nur einen einzigen Pfeil der Klasse kennt.

Definition 8.4 (Repräsentant) *Einen solchen Pfeil, der immer einen Vektor eindeutig festlegt, nennt man* **Repräsentant** *des Vektors.*

[12] Verschiebung

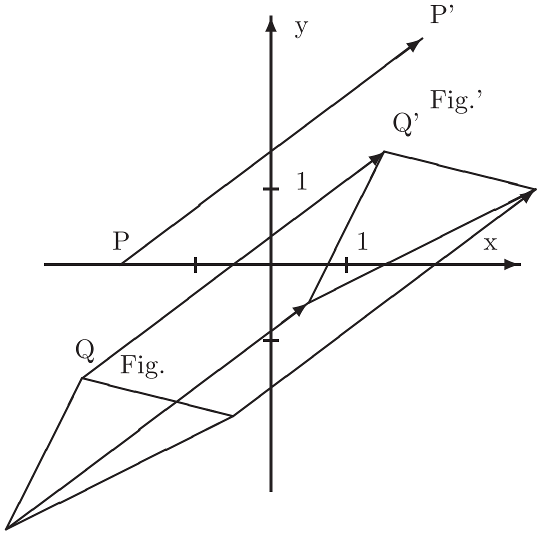
Da es offenbar unmöglich ist, sich alle Repräsentanten eines Vektors vorzustellen, erscheint uns *Vektor* als sehr *abstrakter Begriff*.

In Abb. 8.9 finden wir einen Vektor gegeben durch den Repräsentanten $\overrightarrow{PP'}$. $\overrightarrow{PP'}$ ist ein Pfeil, der natürlich gleich lang und gleichgerichtet ist zu dem Pfeil $\overrightarrow{QQ'}$. Daher ist $\overrightarrow{QQ'}$ ein anderer Repräsentant von $\vec{v}$. Da in einem Text Vektoren und ihre Repräsentanten meistens genügend klar unterscheidbar sind, akzeptieren wir hier eine etwas saloppe Schreibweise und geben einen Repräsentanten an, wenn wir einen Vektor festlegen wollen. Für $\vec{v}$ schreiben wir also $\overrightarrow{PP'}$ oder auch $\overrightarrow{QQ'}$:

$$\vec{v'} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} \; .$$

Normalerweise geht es aus dem Kontext hervor, ob jeweils nur ein Pfeil oder ein ganzer Vektor gemeint ist, so dass Verwechslungen nicht vorkommen sollten.

Abbildung 8.10: Ein geometrischer Vektor in einem Koordinatensystem, repräsentiert durch Pfeile



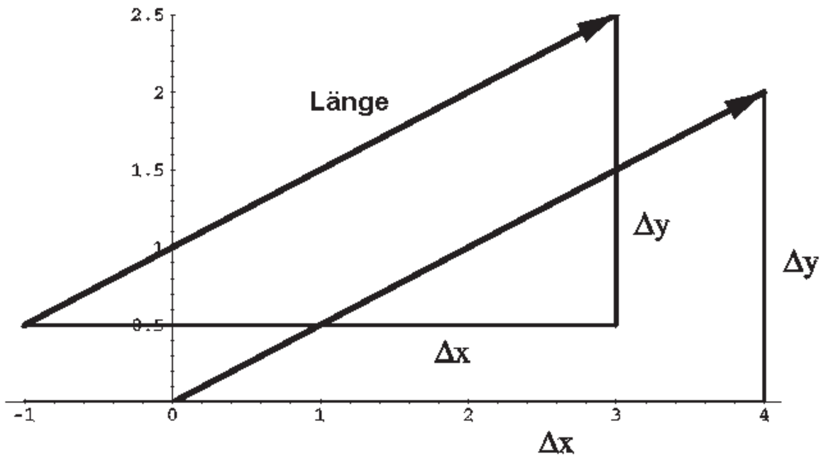
Beispiele für Vektoren finden wir genügend in der Physik: Geschwindigkeit $\vec{v}$, Weg $\vec{s}$, die Kraft $\vec{F}$, die Feldstärke $\vec{E}$ u.s.w.. Z.B. kann eine Geschwindigkeit nur eindeutig angegeben werden, wenn nicht nur die Grösse, sondern auch die Richtung bekannt ist. Falls man mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ eine Stunde nach Osten statt nach Westen fährt, so kommt man ganz wo anders hin!

Vektoren in einem Koordinatensystem: Nun ist es nicht verboten, in unsere Ebene oder in den Raum ein z.B. kartesisches Koordinatensystem[13] zu legen. Vgl. dazu 8.10. *Kartesisch* heisst das Koordinatensystem nach *Descartes* oder *Kartesius*, dem Begründer der analytischen Geometrie (1596 –1650).
Aus Abb. 8.11 ersehen wir, dass es genügt, die Zahlen Δx und Δy anzugeben, um einen Vektor eindeutig festzulegen. Diese Zahlen sind die Koordinaten desjenigen repräsentierenden Pfeiles, der am Ursprung des Koordinatensystens ansetzt. Es sind aber auch die Koordinatendifferenzen irgend eines entsprechenden Pfeiles in der Ebene. Somit gilt in einem kartesischen Koordinatensystem:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

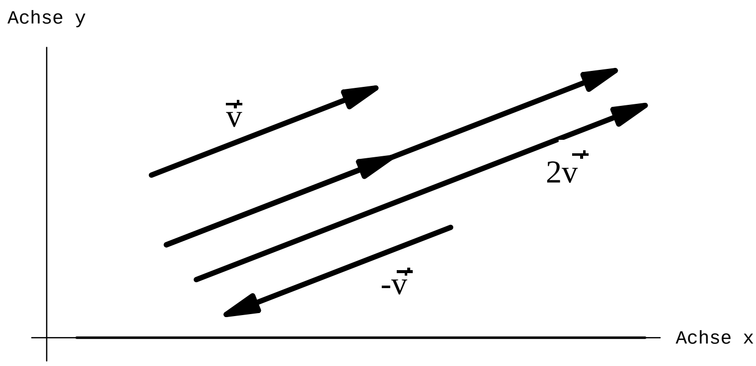
[13] Rechtwinklig aufeinander stehende Achsen, Einheitslängen auf allen Achsen gleich, gleiche Koordinatenabstände.

Abbildung 8.11: Vektoren und Koordinaten



In Abb. 8.11 wäre $\vec{v} = \binom{\Delta x}{\Delta y} = \binom{4}{2}$.

Abbildung 8.12: Produkt mit gemischten Faktoren „Vektor mal Zahl“



Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl: Wir kennen von der Schule die *Streckung* einer geometrischen Strecke, z.B. um den Faktor λ. Ebenso können wir einen Pfeil um λ strecken und erhalten dann einen neuen gestreckten Pfeil mit derselben Richtung, dem selben Anfangspunkt, aber der λ-fachen Länge. Genauso darf man für mehrere Pfeile gleichzeitig verfahren. Wir können auch die ganze Ebene oder den ganzen Raum mit allen darin enthaltenen geometrischen Figuren oder Gebilden in einem Arbeitsgang mit demselben Faktor strecken, wobei alle Pfeile die Richtung beibehalten sollen. Man führt also eine *Parallelstreckung* durch (vgl. Abb. 8.12). So kann man zur Streckung einer ganzen Klasse von Pfeilen kommen, d.h. zur Streckung eines Vektors. Wir sagen dann, der ursprüngliche Vektor $\vec{v}$ sei mit der Zahl λ multipliziert worden. Um den gestreckten Vektor zu erhalten, genügt es offenbar, einen Repräsentanten zu strecken.

Definition 8.5 (Produkt „Zahl mal Vektor“(Streckung)) *Das* **Produkt** *„Zahl λ mal Vektor $\vec{v}$“ erhält man durch Streckung eines Repräsentanten von $\vec{v}$ um λ. Das ergibt einen Repräsentanten von $\lambda\vec{v}$.*

Wie bei den Pfeilen erhalten wir als Produkt eines Vektors mit einer negativen Zahl einen Vektor, der gerade in umgekehrter Richtung schaut. Auch sieht man sofort, dass bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl λ jede Koordinate mit λ multipliziert werden muss.

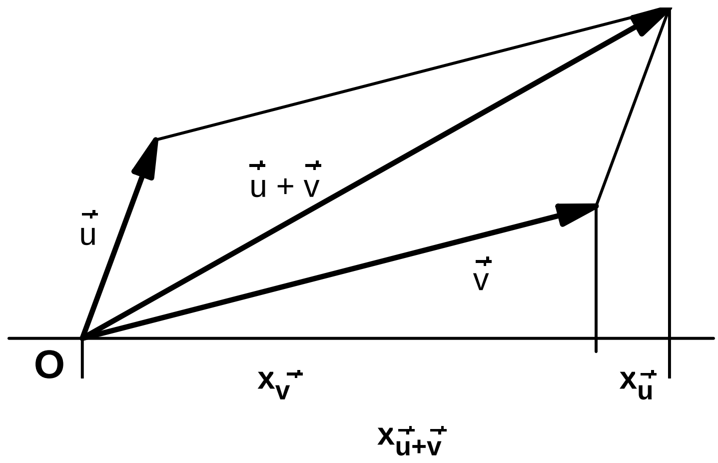
Beispiele:

$$4\vec{v} = 4\begin{pmatrix}20\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}80\\12\end{pmatrix}.$$

Oder

$$-5\vec{v} = -5\begin{pmatrix}20\\3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}100\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-100\\-15\end{pmatrix}.$$

Abbildung 8.13: Vektoraddition (Parallelogrammaddition)



Addition von Vektoren: Was soll man nun als die *Summe zweier Vektoren* ansehen, da doch auch die beliebig mögliche Richtung und nicht nur die Grösse eine Rolle spielt? Es hat sich gezeigt, dass es am sinnvollsten ist, es so zu machen wie bei den Kräften in der Physik: Man nimmt als *Vektorsumme* die *Resultierende*[14] (vgl. Abb. 8.13). Daher definieren wir:

Definition 8.6 (Vektorsumme) *Die* **Summe zweier Vektoren** *findet man mittels zweier bei O angesetzten Repräsentanten, die ein Parallelogramm bestimmen. Dabei wird der Summenvektor repräsentiert durch den die Diagonale bildenden Pfeil mit demselben Anfangspunkt O. Diese Addition heisst auch Parallelogrammaddition.*

D.h. die Summe zweier geometrischer Vektoren kann man graphisch bestimmen. Natürlich geht es auch rechnerisch, denn die Koordinaten addieren sich ja aus geometrischen Gründen. Das zeigt auch sofort ein Blick auf Abb.8.13, wo das für die x-Koordinate eingezeichnet ist.

Beispiel:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix}20\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\12\end{pmatrix}.$$

Doch was ist die *Differenz* zweier Vektoren? Die *Subtraktion von Vektoren* kann man auf natürliche Weise auf die Addition zurückführen, indem man den mit -1 multiplizierten, d.h. umgekehrten Vektor addiert:

[14] *Diagonalpfeil* resp. kürzester Pfeil vom Anfangs- zum Endpunkt eines Pfeilzuges

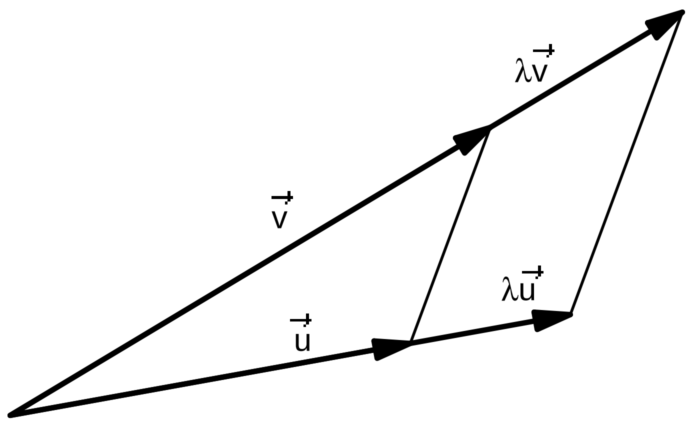
Definition 8.7 (Vektordifferenz) $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$, *wobei* $-\vec{b}$ *der zu* $\vec{b}$ *umgekehrte Vektor ist.*

Beispiel:

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Wissens über die zentrische Streckung geometrischer Figuren erkennt man sofort, dass statt einer Summe auch die Komponenten gestreckt werden können:

Abbildung 8.14: Multiplikation einer Summe von Vektoren mit einer Zahl



Satz 8.10 (Multiplikation einer Summe von Vektoren mit einer Zahl) *Es gilt:*

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}.$$

Vgl. dazu auch Abb. 8.14.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren: Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren ist wie folgt definiert (vgl. Abb. 8.15):

Definition 8.8 (Skalarprodukt)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\varphi),$$

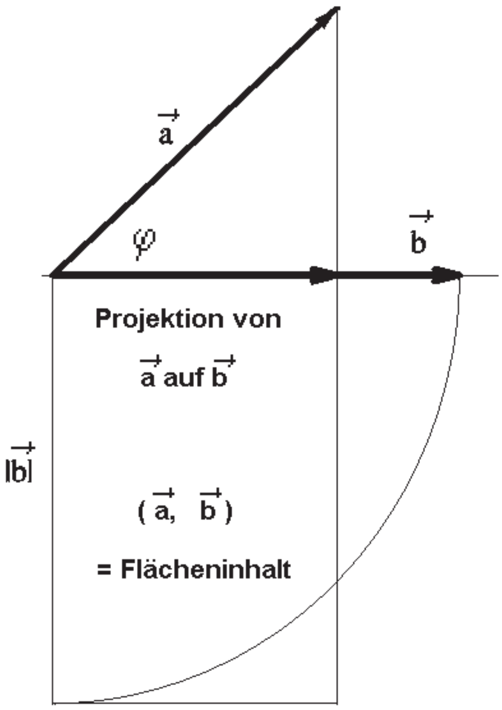
wobei φ *der Zwischenwinkel beim Drehsinn in Gegenuhrzeigerrichtung von* $\vec{a}$ *nach* $\vec{b}$ *ist.*

Oft schreibt man für das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auch mit $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$. Oder auch mit $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$. Die Bedeutung ersehen wir in Abb. 8.15. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist der dort ersichtliche Flächeninhalt. Daraus wird sofort klar, das das „Skalarprodukt von drei Vektoren “ keinen Sinn macht. Denn mit zwei Vektoren erhalten wir einen Flächeninhalt und eben nicht wieder einen Vektor.
Die Berechnung des Skalarprodukts ist sehr einfach. In Teil 12 werden wir allgemein zeigen:

Satz 8.11 (Skalarprodukt im 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem) *Es gilt:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Abbildung 8.15: Das Skalarprodukt von Vektoren



Beispiel:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 9 = 8 + 18 + 45 = 71.$$

Damit die eben erwähnte Berechnungsformel nicht total in der Luft hängt, sei hier kurz angedeutet, wie man sie gewinnen kann: Aus Definition 8.8 folgt, dass das Skalarprodukt kommutativ ist. Es gilt also für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Beziehung $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$. Da das Skalarprodukt dem Inhalt einer Rechtecksfläche entspricht, entnimmt man Abbildung 8.13 und Abbildung 8.15, dass das Distributivgesetz gilt: $\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$. Daher gilt z.B. im 2-dimensionalen Fall:

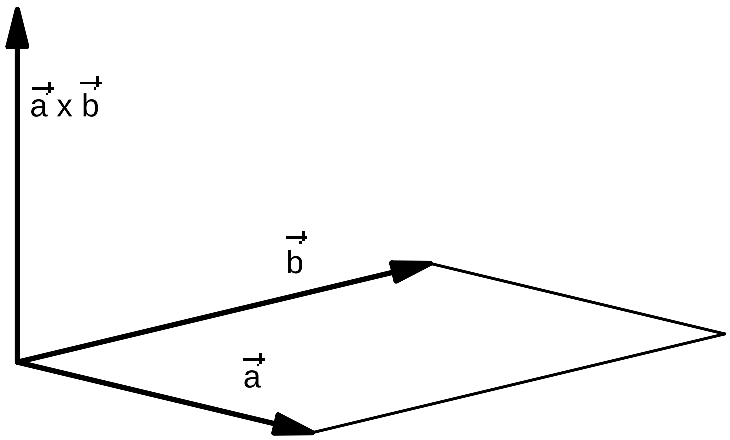
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2})\cdot(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}) = a_1\vec{e_1}\cdot b_1\vec{e_1} + a_1\vec{e_1}\cdot b_2\vec{e_2} + a_2\vec{e_2}\cdot b_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}\cdot b_1\vec{e_1}.$$

Beachten wir die Winkel zwischen $\vec{e_1}$ und $\vec{e_1}$ sowie zwischen $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$, so folgt aus Definition 8.8: $\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} = 1$ und $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = 0$. Daher erhalten wir:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Wie schon angedeutet, ergeben sich viele Anwendung für das Skalarprodukt in der Physik. Beispielsweise haben die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ je eine Richtung, sind also Vektoren, die vielleicht zur Entfaltung ihrer Wirkung noch an eine Linie gebunden sind *Wirkungslinie*. Die Arbeit W hat keine Richtung. W ist also kein Vektor. Um die Arbeit zu berechnen, spielt nur die Projektion der Kraft auf den Weg eine Rolle (wie in Abb. 8.15). Daher gilt: $W = \vec{F}\cdot\vec{s}$.
Man beachte auch, dass sich über das Skalarprodukt der Winkel zwischen zwei Vektoren aus den Koordinaten mit Hilfe von 8.8 und 8.11 einfach berechnen lässt.
TEIL1BV6

Abbildung 8.16: Das Vektorprodukt von zwei Vektoren im Raum



Das Vektorprodukt: Im dreidimensionalen Raum kann man mit zwei Vektoren ein weiteres, vom Skalarprodukt verschiedenes Produkt definieren, das vor allem in der Physik eine grosse Bedeutung hat, nämlich das **Vektorprodukt**. Betrachten wir zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das Vektorprodukt ist im Unterschied zum Skalarprodukt ein Vektor $\vec{c}$, der in solcher Weise senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, dass durch eine Schraube mit einem Rechtsgewinde und der Achse in Richtung $\vec{c}$ beim Hineinschrauben $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ gedreht wird. Man nennt diese Regel, durch die die Richtung von $\vec{c}$ festgelegt wird, auch die *Rechtsschraubenregel, Rechtshandregel* oder auch *Korkzieherregel*. Das System der Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ heisst dann *Rechtssystem* . Wir definieren:

Definition 8.9 (Vektorprodukt)

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \text{ Vektor der Länge } |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\varphi),$$

wobei $\vec{c}$ senkrecht steht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$. φ ist dabei der Zwischenwinkel beim Drehsinn in Gegenuhrzeigerrichtung von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ und $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ bildet ein Rechtssystem.

Man beachte, dass die Länge von $\vec{c}$ gerade dem Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms entspricht. Wichtig ist nun die koordinatenweise Berechnung von $\vec{c}$. Es gilt der folgende Satz:

Satz 8.12 (Vektorprodukt im 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Man kann sich die Berechnungsweise von $\vec{a} \times \vec{b}$ dadurch merken, dass man es ausnützt, dass hier eigentlich die *Determinante* [15] der Matrix $\begin{pmatrix} \vec{e_1} & a_1 & b_1 \\ \vec{e_2} & a_2 & b_2 \\ \vec{e_3} & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ berechnet wird. Dazu gibt es die **Regel von Sarrus** :

Man berechnet zuerst die Summe der Produkte wie nachfolgend durch die Pfeile angegeben:

$$\begin{array}{ccccccccc} \vec{e_1} & & a_1 & & b_1 & & \vec{e_1} & & a_1 \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\ \vec{e_2} & & a_2 & & b_2 & & \vec{e_2} & & a_2 \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \vec{e_3} & & a_3 & & b_3 & & \vec{e_3} & & a_3 \end{array} = \vec{e_1}a_2b_3 + \vec{e_2}a_3b_1 + \vec{e_3}a_1b_2.$$

[15] Vgl. Teil 12

Davon subtrahiert man:

$$\begin{array}{ccccccccccl}
\vec{e_1} & & a_1 & & b_1 & & \vec{e_1} & & a_1 & & \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
\vec{e_2} & & a_2 & & b_2 & & \vec{e_2} & & a_2 & & = \vec{e_1}a_2b_3 + \vec{e_2}a_3b_1 + \vec{e_3}a_1b_2. \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
\vec{e_3} & & a_3 & & b_3 & & \vec{e_3} & & a_3 & &
\end{array}$$

Dieses Schema lässt sich einfach im Kopfe behalten.
Beispiel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - (-5) \\ 5 - 12 \\ (-3) - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

8.6 Zu den Übungsaufgaben

Übungen zu diesem Kapitel „Einführungsteil“ befinden sich im Übungsbuch *DIYMU*: Übungen - Praktikum Kap. 1 (Bibl.: wirz). Falls zur Lösung einer Aufgabe der Computer benutzt werden muss, so steht momentan an der ISB das Softwarepaket *Mathematica* zur Verfügung. (Lernsoftware vgl. Kleine Einführung in *Mathematica* (Bibl.: wirz1).
Versuche vorerst, diese Aufgaben ohne Zuhilfenahme dieses Textes zu lösen. Falls Du hier alles aufmerksam durchgearbeitet hast, wird Dir dies kaum schwer fallen!

Hinweis zu 8.4.2:

Satz 8.13 (Pythagoräische Zahlentripel) *(a, b, c) kann man wie folgt berechnen:*

$$c = m^2 + n^2; \qquad a = m^2 - n^2; \qquad b = 2mn; \qquad m, n \in \mathbf{N}.$$

Den Gültigkeitsbeweis dieser Formeln kann man mittels der später in Teil 8 besprochenen Methode der *vollständigen Induktion* versuchen. Eine direkte Argumentation geht so: Seien $a, b, c \in \mathbf{Z}, a < c, b < c$ und paarweise teilerfremd (sonst könnte man in $a^2 + b^2 = c^2$ den gemeinsamen Teiler kürzen) sowie a gerade. c kann ja nicht gerade sein, sonst wäre $c^2 = (2c_1)^2 = 4c_1^2 = a^2 + b^2 = (2a_1 + 1)^2 + (2b_1 + 1)^2 = 4a_1^2 + 4a_1 + 1 + 4b_1^2 + 4b_1 + 1 = 4k + 2$, woraus $4(c_1^2 - k) = 2$, d.h. 4 teilt 2 folgen würde. Sei $\frac{b+c}{a} = \frac{n}{m}$ (1) (gekürzter Bruch). Dann ist $1 = \frac{a^2}{a^2} = \frac{c^2-b^2}{a^2} = \frac{(c+b)(c-b)}{aa} = \frac{(c+b)}{a}\frac{(c-b)}{a} = \frac{m}{n}\frac{n}{m}(= 1)$, also $\frac{(c-b)}{a} = \frac{m}{n}$ (2). Addition und Subtraktion von (1) und (2) ergibt $\frac{c}{a} = \frac{n^2+m^2}{2nm}$ (3), $\frac{b}{a} = \frac{n^2-m^2}{2nm}$ (4). Die Brüche rechts in den letzten beiden Gleichungen sind nicht kürzbar. n, m sind teilerfremd. Wären diese beiden Zahlen gleichzeitig ungerade, so würden die Zähler von $\frac{n^2+m^2}{2nm}$ und $\frac{n^2-m^2}{2nm}$ gerade, man könnte kürzen. Dann hätte man auf einer Seite jeweils einen geraden Nenner a und auf der andern einen ungeraden nm bei gleichen gekürzten Brüchen, was nicht geht. Somit sind (3) und (4) Gleichungen zwischen gekürzten Brüchen, also $c = n^2 + m^2$, $b = n^2 - m^2$, $a = 2nm$. Man hat die allgemeine Formel für primitive (gekürzte) pythagoräische Zahlentripel!

Die **Übungen zur Vektorrechnung** finden sich in *DIYMU*, „Übungen zu Kapitel 12“.

Folgende **Übungsbeispiele** zeigen, dass in der Mathematik nicht immer ein Taschenrechner notwendig ist:

1. Beweise, dass in einem beliebigen Dreieck die Innenwinkelsumme immer 180^o beträgt.
2. Beweise den *Satz von Pythagoras.*
3. Beweise den *Höhensatz.*

4. Beweise den *Kathetensatz.*

5. Erkläre den Begriff *„Modell“.*

6. Begründe, wieso man in der Mathematik *Beweise* führt.

7. Beschreibe *Herkunft, Ziel, Zweck* und *Nutzen* der Mathematik.

8.7 Das griechische Alphabet

In der Mathematik ist es üblich, griechische Buchstaben zu verwenden. Z.B. kleine solche Buchstaben für Funktionen, Winkel etc., grosse für Ebenen etc.. In der nachstehenden Tabelle ist dieses Alphabet wiedergegeben. *Hinweis: Es lohnt sich, die Buchstaben zu lernen!*

A	α	Alpha	I	ι	Iota	P	ϱ oder ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	Mü	Υ	υ	Ypsilon
E	ε oder ϵ	Epsilon	N	ν	Nü	Φ	φ oder ϕ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	$\o$	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	ϑ oder θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

Kapitel • Chapitre 9

Vorwort zum Repetitorium Standard–Funktionen

Liebe Leserin, lieber Leser,

Der in dieser Zusammenstellung dargebotene Stoff sollte einem Studenten einer Fachhochschule zum grössten Teil von der Berufsmittelschule resp. von der Mittelschule her bekannt sein. Und trotzdem... Immer kann man wieder Lücken entdecken. Dem einen dient diese Sammlung daher als Lückenstopfer, dem andern als Übersicht, dem dritten als Nachschlagemöglichkeit, mit kleinem Aufwand zu beschaffen. Der Text ist in Skriptform abgefasst. Das bedeutet, dass er in äusserst knapper Fassung nur das wesentliche Skelett des Stoffinhalts wiedergibt. Für weitere und ausführliche Erklärungen, Beispiele, exakte Beweise und erweiternde Ausführungen ergeht daher an den Studenten der Rat, ein oder mehrere Lehrbücher beizuziehen. Studieren bedeutet ja zu einem wesentlichen Teil, sein Wissen selbständig, fleissig, zielstrebig, beharrlich mit Hilfe der Literatur zu erweitern und zu vertiefen, streckenweise sogar aus eigener Kraft selbständig zu erarbeiten, zu festigen und anzuwenden. Ein Skript ist dabei nur ein Wegweiser — und nie ein Lehrbuchersatz. Welche Lehrbücher jemand verwenden will, ist jedem freigestellt. Das hier angegangene Thema findet man vielen Unterrichtswerken dargestellt. Eine Liste von ausgewählter, heute verfügbarer einschlägiger Literatur, die für das Niveau dienlich sein mag, findet sich hinten im Literaturverzeichnis.

Im Sommer 1996 — Der Autor

Weisheit — wissen was wichtig ist ... und Bildung ist auch die Fähigkeit, Wesentliches vom Unwesentlichen zu unterscheiden, reif zu urteilen ...

Alte Sprüche

Kapitel • Chapitre 10

Funktionen: Grundlagen

10.1 Werkzeuge

10.1.1 Einleitung

Wieso sind Funktionen so wichtig in Technik und Naturwissenschaften? — Weil man sehr oft das Problem hat, das Verhalten einer interessanten Grösse in Abhängigkeit von einer andern Grösse zu beschreiben. Z.B. das Verhalten des elektrischen Stromes I in Abhängigkeit von der Zeit t, $t \in [t_1, t_2]$. Sei etwa $I = I_0 \cos(t)$. I hängt also hier von t ab, ändert sich mit t, wobei auch die Zeit t sich immer ändert, also variabel ist. Man kann sie ja nicht aufhalten. Daher ist t eine unabhängige Variable und I die abhängige Variable. Man hat so eine Zuordnung oder Abbildung $t \mapsto I$, $I = I(t)$; (t, I) ist ja ein geordnetes Paar. Diese Zuordnung ist trivialerweise linkstotal und rechtseindeutig[1]. Linkstotal, weil es zu jedem $t \in [t_1, t_2]$ einen Funktionswert $I(t)$ gibt, rechtseindeutig weil der Funktionswert $I(t)$ immer eindeutig ist und es zu einem t nie zwei verschiedene Funktionswerte $I(t)$ geben kann.
Das Verhalten einer interessanten Grösse in Abhängigkeit von einer andern Grösse beschreiben wir daher durch mathematische Funktionen. Abhängige und unabhängige Grössen sind bei uns fast immer irgendwelche Zahlen, die wir oft auf Skalen von Messinstrumenten ablesen können. Wir geben sie dann in Form von Dezimalbrüchen an, haben also meistens mit reellen Zahlen zu tun.

10.1.2 Reelle Zahlen

In diesem Teil werden wir nur Funktionen betrachten, die auf den *reellen Zahlen* $\mathbf{R}$ oder auf Teilmengen davon definiert sind. Daher sprechen wir hier von *reellen Funktionen*. Die reellen Zahlen nehmen wir als gegeben an. Man kann sie sich vorstellen als die Menge aller erdenklichen endlichen oder unendlichen Dezimalbrüche, periodische oder nicht–periodische. Sie werden genauer in der Zahlenlehre besprochen. Folgende Eigenschaften dieser Zahlen sind für unsere Belange hier wesentlich:

Satz 10.1 (Wichtige Eigenschaften der reellen Zahlen) *:*

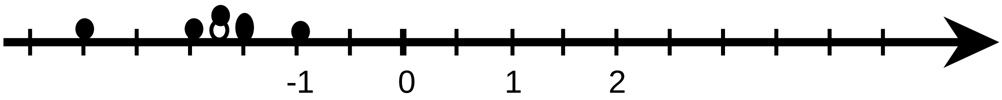
1. $\mathbf{R}$ *ist* **geordnet***:* $\forall_{a,b\in\mathbf{R}} : a < b \quad \dot\vee \quad a = b \quad \dot\vee \quad a > b.$
2. $\mathbf{R}$ *ist* **lückenlos***.*
3. $\mathbf{R}$ *ist* **dicht***.*

Die reellen Zahlen $\mathbf{R}$ sind *lückenlos* im Gegensatz zu den rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$, wo es ja *Lücken* gibt: Z.B. bei $\sqrt{2}$ ist in $\mathbf{Q}$ eine Lücke, denn $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Man kann aber $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen (Brüche) beliebig genau annähern, ohne jedoch den exakten Wert mit einer rationalen Zahl je zu treffen. In jeder noch so kleinen Umgebung oder Nachbarschaft von $\sqrt{2}$ gibt es immer rationale Zahlen. $\sqrt{2}$ selbst aber ist keine

[1] Vgl. Teil 2, Mengen, Relationen, Funktionen

solche: Da klafft eine Lücke — obschon $\sqrt{2}$ als Diagonale des Einheitsquadrats konstruierbar ist.
Die reellen Zahlen $\mathbf{Q}$ sind *dicht*, wie schon die rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$: Zu zwei Zahlen r_1 und r_2, wie nahe beieinander sie auch immer gelegen sind, gibt es immer eine weitere Zahl r_3, die dazwischen liegt. Z.B. der Mittelwert $\frac{r_1+r_2}{2}$ hat diese Eigenschaft: $r_1 < r_3 = \frac{r_1+r_2}{2} < r_2$. Wenn man die Zahlen sich auf der *Zahlengeraden*, d.h. auf einer äquidistant skalierten Geraden (auch *Zahlenstrahl*) dargestellt denkt, so gibt es zwischen beliebigen Punkten immer einen neuen Punkt – und zwischen einem alten und dem neuen wieder einen neuen und so fort, überall gibt es demnach Punkte, sie liegen *dicht* (vgl. Abb. 10.1).

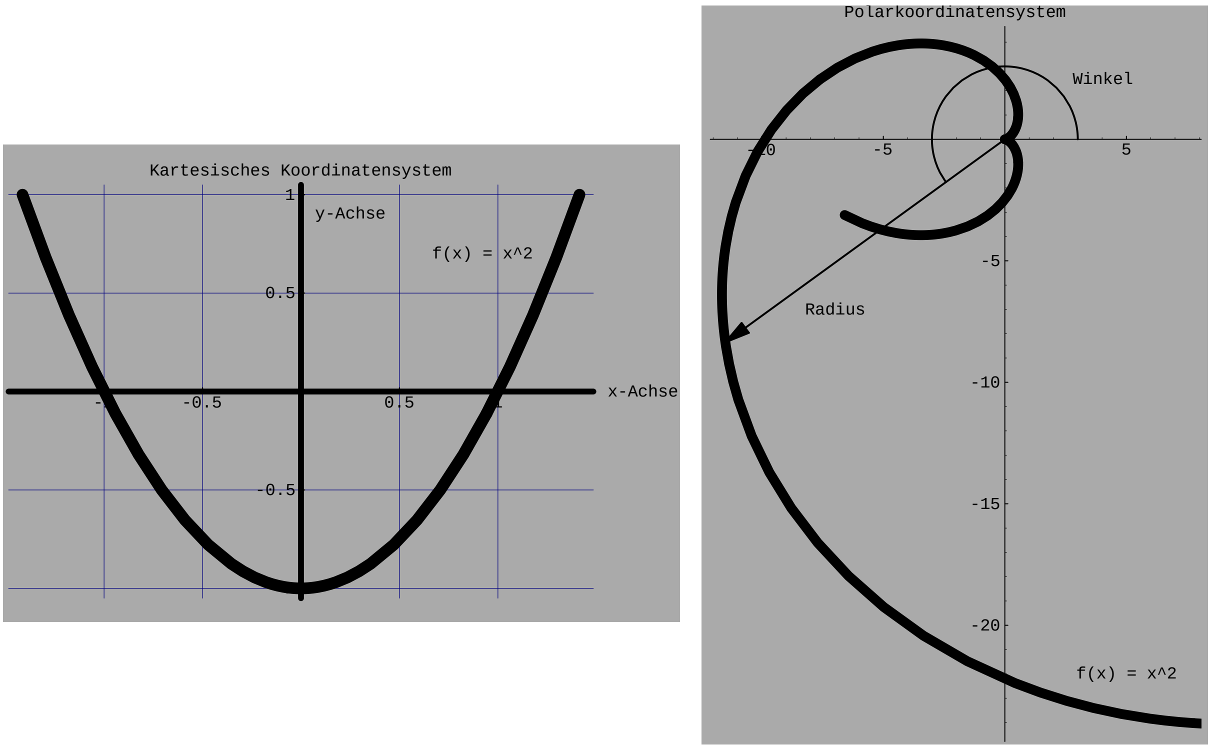
Abbildung 10.1: Zahlengerade



10.1.3 Elemente der Darstellung von Funktionen

Koordinatensysteme

Abbildung 10.2: Gängige Koordinatensysteme, $f(x) = x^2$, $r(\varphi) = \varphi^2$



Um reelle Funktionen bildlich wiederzugeben, verwendet man wohl am häufigsten die Darstellung des Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem[2]. Ein solches besteht bekanntlich aus zwei aufeinander

[2] nach Kartesius oder Descartes, franz. Philosoph und Mathematiker (1596 – 1650), der Begründer der analytischen Geometrie

rechtwinklig stehenden Achsen mit der gleichen äquidistanten Skalierung auf beiden Achsen. Manchmal sind auch andere Koordinatensysteme sinnvoll, z.B. Polarkoordinaten: Die unabhängige Variable wird dabei als Winkel φ abgetragen, die abhängige als Radius $r = f(\varphi)$. Der Graph besteht jeweils aus den Punkten $\{(x, y)|\, y = f(x)\}$ resp. $\{(\varphi, r)|\, r = f(\varphi)\}$.

Definitionsbereich, Wertebereich

Bei reellen Funktionen können wir die Definitionen des Definitions– oder des Wertebereichs wie folgt anpassen[3]:

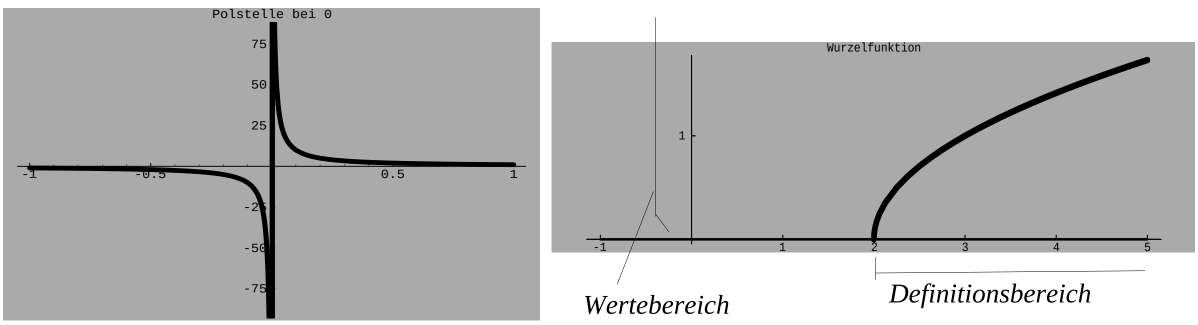
Definition 10.1 (Definitionsbereich, Wertebereich, Wertevorrat) *:*

Definitionsbereich[4] D_f *von f:*	D_f	$=$	$\{x \in \mathbf{R}\mid f(x) \text{ ist definiert}\}$
Wertebereich[5] W_f *von f:*	W_f	$=$	$\{y \in \mathbf{R}\mid \exists_{x\in\mathbf{R}} : y = f(x)\}$
Wertevorrat B *:*	B	$=$	$\{y \in \mathbf{R}\mid y \text{ steht als Bild zur Verfügung}\}$

Somit ist f eine Funktion mit $D_f \overset{surjektiv}{\longmapsto} W_f$ und $D_f \times W_f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Beispiele:

Abbildung 10.3: Definitionsbereich und Wertebereich



In Abb. 10.3 sind folgende Funktionen dargestellt:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D_f = \dot{\mathbf{R}} = \{x \in \mathbf{R}|\, x \neq 0\}$ und $W_f = \dot{\mathbf{R}}$.
2. $f(x) = \sqrt{x-2}$ mit $D_f = \{x \in \mathbf{R}|\, x \geq 2\}$ und $W_f = \mathbf{R}_0^+ = \{x \in \mathbf{R}|\, x \geq 0\}$ (eine *Wurzelfunktion*).

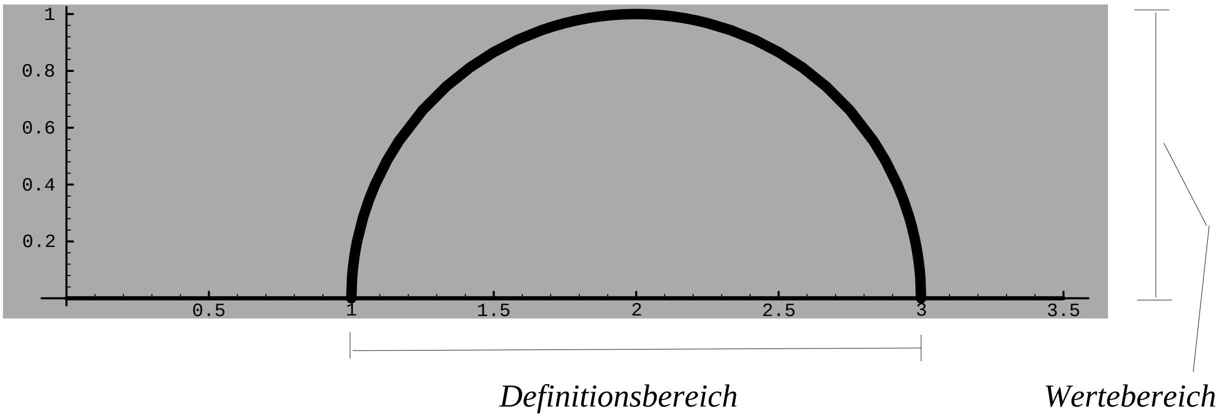
Wer einen graphikfähigen Taschenrechner besitzt, kann sich rasch solche Bilder ausgeben lassen. Wichtig ist dabei die vernünftige Wahl der Plotbereiche. Ohne Rechner macht man sich wie eh und je eine vernünftige *Wertetabelle*: Man rechnet zu einigen sinnvoll ausgewählten x-Werten die zugehörigen Funktionswerte aus.

Intervalle

Bei der Einführung in die (resp. der Repetition der) Mengenlehre sind die *Intervalle* ausführlich besprochen worden (Teil III, 1.1.11, *Einige Anwendungen in der Analysis: Intervalle*). Wir greiffen hier darauf zurück. In Abb. 10.3 besteht bei der Funktion im Bild links D_f aus zwei halboffenen unendlichen Intervallen. Im Bild rechts ist D_f ebenfalls ein halboffenes unendliches Intervall. Bei der Funktion $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{-x+3}$ (vgl. Abb. 10.4) ist D_f das abgeschlossene Intervall $[1, 3] = \{x \in \mathbf{R}|1 \leq x \leq 3\}$. Ein Beispiel für ein offenes Intervall ist $(1, 3) = \{x \in \mathbf{R}|1 < x < 3\}$

[3] Definitions– und Wertebereich sind in Teil 3 allgemein definiert worden.

Abbildung 10.4: Abgeschlossene Intervalle als Definitionsbereich und Wertebereich



Zur Gleichheit zweier Funktionen

Wir legen fest:

Definition 10.2 (Gleichheit von Funktionen) *: Zwei Funktionen f und g heissen* **gleich im Intervall** I *, wenn sie in I dieselben Funktionswerte annehmen. Mit logischen Symbolen geschrieben:*

$$f \equiv g \quad in \quad I :\Longleftrightarrow \forall_{x \in I} : f(x) = g(x).$$

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & : \quad x < 3 \\ x^2 & : \quad x \geq 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \leq 5 \\ x^3 & : \quad x > 5 \end{cases}$$

Hier ist $f \equiv g$ in $I = [3, 5]$.

Bemerkung: Später wird in der Analysis manchmal auch eine *abgewandelte Definition* nötig sein: Man akzeptiert vielfach zwei Funktionen als gleich, wenn sie sich nur auf einer *Menge vom Mass* 0 unterscheiden. Davon später.

10.2 Einige wichtige Funktionenklassen

10.2.1 Gauss–Klammer–Funktion

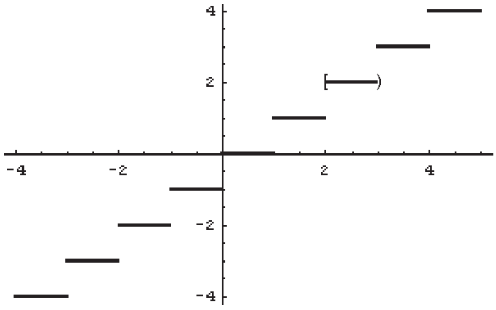
Diese Funktion ist heute vielen von den Programmiersprachen her bekannt: INT im Modula II oder $Floor$ im *Mathematica*. Sei $n \in \mathbf{Z}$. Wir definieren:

Definition 10.3 (Gauss–Klammer–Funktionen) *:*

$$f(x) = [x] := n \quad für \quad x \in [n, n+1)$$

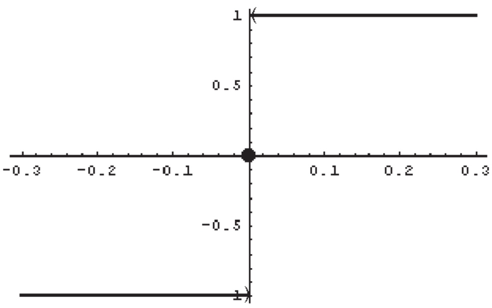
Diese Funktion gehört zum Typ der **Treppenfunktionen**, ein Begriff, der hier selbsterklärend ist.

Abbildung 10.5: Gauss–Klammer–Funktion



10.2.2 Signum–Funktion

Abbildung 10.6: Signum-Funktion



Signum bedeutet bei uns „Vorzeichen“. Wir definieren:

Definition 10.4 (Signum–Funktionen) *:*

$$f(x) = sgn(x) := \begin{cases} +1 & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -1 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

Satz 10.2 (Eigenschaft der Signum–Funktion) *:*

$$sgn(x \cdot y) = sgn(x) \cdot sgn(y)$$

Diese Behauptung verifiziert man z.B. durch nachrechnen bei allen Kombinationen von $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ und $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$. (Übungsaufgabe!)

10.2.3 Betrags–Funktion

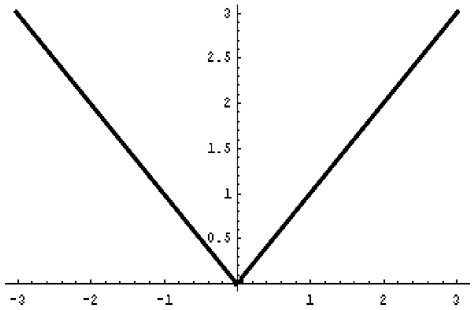
Die Funktion

Wir definieren:

Definition 10.5 (Betrags–Funktionen) *:*

$$f(x) = |x| := x \cdot sgn(x)$$

Abbildung 10.7: Betrags-Funktion



Rechnen mit Beträgen

Mit Hilfe der Definition sowie der binomischen Formeln kann man zeigen (Übungsaufgabe!):

Satz 10.3 (Eigenschaften der Beträge) *:*

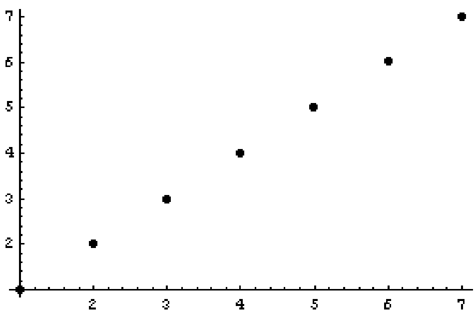
1. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
2. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
3. $|x \pm y| \leq |x| \pm |y|$
4. $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

Die beiden letzten Ungleichungen lassen sich in einer Kette schreiben:

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| \pm |y|.$$

10.2.4 Zahlenfolgen

Abbildung 10.8: Beispiel einer Folge



Definition 10.6 (Zahlenfolge) *:*
Eine Funktion $f : \mathbf{N} \longmapsto \mathbf{R}$ *mit* $f : n \longmapsto f(n) = a_n$ *heisst* **Zahlenfolge**.

Eine Zahlenfolge ist also eine Funktion mit $D_f = \mathbf{N}$. Für die Relationsmenge benützen wir auch folgende Symbolik:

Symbole 1 (Zahlenfolge) *:*

$$\{(n, f(n))|\, f(n) = a_n\} := [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots] = \langle a_n \rangle$$

Die Funktionswerte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ heissen *Glieder der Folge*. a_n in $\langle a_n \rangle$ nennen wir das *allgemeine Glied*. In manchen Fällen, z.B. bei einigen *rekursiv definierten Folgen*, kann dieses Glied gar nicht explizit berechnet werden. (Beispiel: *Fibonacci–Folge*.) Statt $(n, f(n)) = (n, a_n)$ können wir kürzer nur a_n angeben, denn mit dem Index n ist ja das Urbild und mit a_n das Bild bekannt.

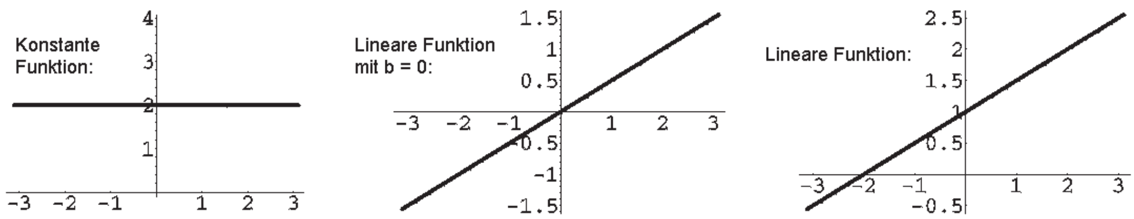
Beispiele:

1. $f(n) = a_n = n$. Dann ist $\langle a_n \rangle = [1, 2, 3, 4, 5, \ldots]$ und $W_f = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.
2. $f(n) = a_n = 7$. Dann ist $\langle a_n \rangle = [7, 7, 7, 7, \ldots]$ und $W_f = \{7\}$.
3. $f(n) = a_n = \frac{1}{n}$. Dann ist $\langle a_n \rangle = [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots]$ und $W_f = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.
4. $f(n) = a_n = (-1^n)$. Dann ist $\langle a_n \rangle = [-1, 1, -1, 1, \ldots]$ und $W_f = \{-1, 1\}$. *Alternierende Folge.*
5. $a1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Dann ist $\langle a_n \rangle = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots]$. *Fibonacci–Folge.*

10.2.5 Lineare und konstante Funktion

Definitionen

Abbildung 10.9: Konstante und lineare Funktion



Definition 10.7 (Lineare Funktion) *:*
Eine Funktion $f:\ \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$ *mit* $f(x) = y := ax + b$ $(a, b \in \mathbf{R})$ *heisst* **lineare Funktion**.

Ein Spezialfall ergibt sich für $a = 0$:

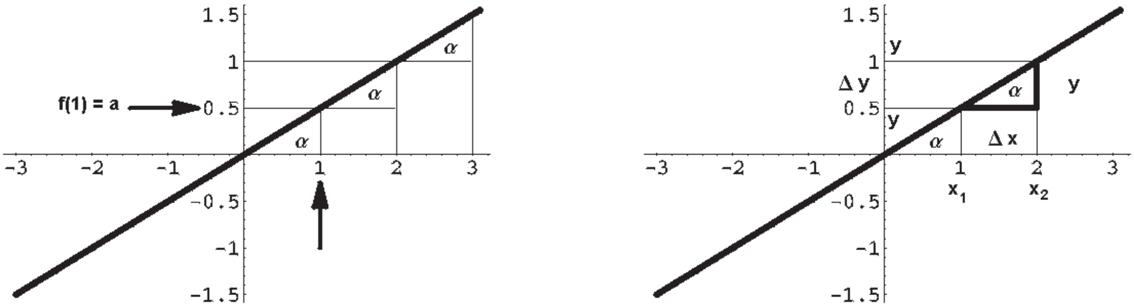
Definition 10.8 (Konstante Funktion) *:*
Eine Funktion mit $f(x) = y := b$ *heisst* **konstante Funktion**.

Für $a \neq 0$ ist $D_f = W_f = \mathbf{R}$. Denn jeder Wert $y \in \mathbf{R}$ wird ja angenommen, da die Gleichung $y = ax + b$ immer lösbar ist, d. h. zu jedem y ein x berechnet werden kann und daher also existiert.

Die Funktionenschar $f(x) = ax$

Sei $a \neq 0$. Aus $f(x) = y = ax$ folgt dann $a = \frac{y}{x}$, falls $x \neq 0$ ist. Ebenso folgt aus $f(x_1) = y_1 = ax_1$ und $f(x_2) = y_2 = ax_2$ direkt $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, also $\Delta y = a\Delta x$ oder $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$. (Vgl. Abb. 10.10.) Da $f(0) = 0$ gilt, geht der Graph durch den Ursprung. Da $\frac{\Delta y}{\Delta x} = const.$ ist, ist der Graph eine Gerade, denn alle durch irgend welche Strecken Δy und Δx gebildeten Dreiecke sind ähnlich. Wir benutzen noch folgenden Begriff:

Abbildung 10.10: Lineare Funktion, Gerade, Steigung



Definition 10.9 (Steigung) *:*
$a = \tan\alpha$ *(Abb. 10.10) heisst* **Steigung** *der Funktion* $f:\ x \longmapsto f(x) = ax$.

Resultat:
Der Graph von $f(x) = ax$ ist eine Gerade durch $(0, 0)$ und $(1, a)$ mit der Steigung a.

Abbildung 10.11: Lineare Funktionen, Beispiele

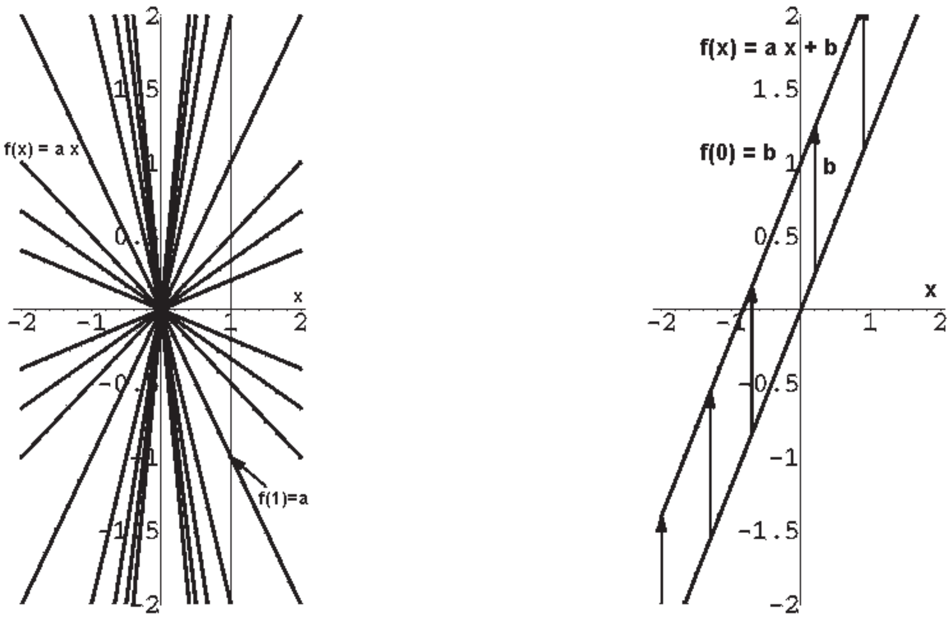


Abb. 10.11 zeigt im ersten Bild die Graphen bei verschiedenen Werten von a.

y–Achsenabschnitt und Nullstelle

Den Graphen von $f(x) = ax+b$ erhält man aus dem Graphen von $f(x) = ax$, indem man bei jedem Punkt die y–Koordinate um den Wert b erhöht, d.h. indem man zu allen y–Werten b addiert. Das bedeutet aber geometrisch eine *Parallelverschiebung* um b in y–Richtung. Wir stellen daher fest:

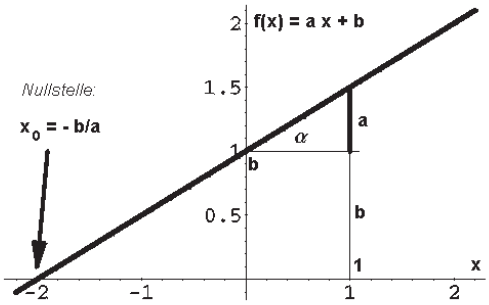
Resultat:

1. Der Graph einer linearen Funktion $f(x) = ax + b$ ist wieder eine Gerade.

2. Die Gerade geht durch $(0, b)$ ($f(0) = b$) und $(1, a + b)$. Es ist $f(1) = a + b$.

Definition 10.10 (Verschiebung, Nullstelle) *:*
*b nennen wir den y–***Achsenabschnitt** *(vgl. Abb. 10.12) der Funktion $f : x \longmapsto f(x) = ax + b$. Der Schnittpunkt des Graphen mit der x–Achse heisst* **Nullstelle**.

Abbildung 10.12: Lineare Funktion, Nullstelle



Resultat (Nullstelle): Wegen $f(x_0) = ax_0 + b = 0$ ist $x_0 = -\frac{b}{a}$

10.2.6 Quadratische Funktionen

Parabeln durch den Ursprung

Beispiele:

Abbildung 10.13: Quadratische Funktionen $f(x) = ax^2$

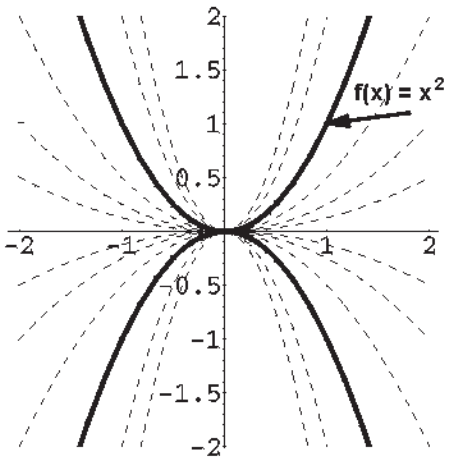
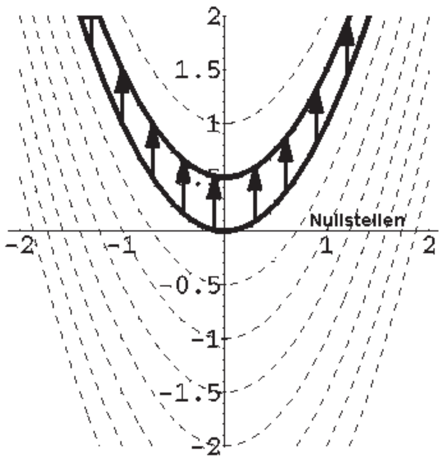


Abb. 10.13 zeigt Beispiele von Graphen aus der Funktionenschar $f(x) = ax^2$ bei verschiedenen Werten für a. Geometrisch sind diese Graphen **Parabeln**. a bestimmt die Form der Kurve, d.h. ob sie weit oder weniger weit geöffnet ist. Wir benutzen zur Präzisierung die folgende Sprechweise:

Definition 10.11 (Parabel 2. Ordnung) *:*
Den Graphen einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2$ nennen wir **Parabel 2. Ordnung**. *a heisst dabei* **Öffnung** *der Parabel, der Punkt $(0, 0)$ heisst hier* **Scheitelpunkt** *(Vgl. Abb. 10.13).*

In y–Richtung verschobene Parabeln

Abbildung 10.14: Quadratische Funktionenschar $f(x) = ax^2 + d$



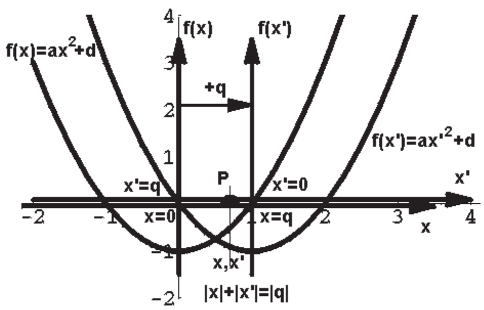
Wir betrachten $f(x) = ax^2 + d$ ($a, d \in \mathbf{R}$, Abb. 10.14). Wie schon bei der Geraden $f(x) = ax + b$ erhält man den Graphen von $f(x) = ax^2 + d$ aus demjenigen von $f(x) = ax^2$, indem man wieder bei jedem Punkt die y–Koordinate um den Wert d erhöht, d.h. indem man zu allen y–Werten d addiert. Das bedeutet aber geometrisch wieder eine *Parallelverschiebung* um d in y–Richtung. Wir stellen daher fest:
Resultat:

1. Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + d$ ist wieder eine Parabel.
2. Der Scheitel liegt auf der y–Achse in $(0, d)$. c ist daher auch der y*–Achsenabschnitt.*

Aus Abb. 10.14 ersieht man, dass eine Funktion $f(x) = ax^2 + d$ je nach der Grösse von d zwei Nullstellen, eine oder keine haben kann. Die Nullstelle berechnet sich aus $0 = ax_0^2 + d$ zu $x_0 = \pm\sqrt{-\frac{d}{a}}$. Daher bestimmt $\frac{d}{a}$, wieviele Nullstellen die Funktion in $\mathbf{R}$ hat.

Die quadratische Gleichung

Abbildung 10.15: In x-Richtung verschobene Parabel



Idee: Abb. 10.15 zeigt den Graphen von $f(x) = ax^2 + d$ und ebenso einem um den Wert q in x–Richtung verschobenen Graphen, der im gleichzeitig mitverschobenen Koordinatensystem zur Funktion

$f(x') = ax'^2 + d$ gehört. Wir haben somit ein neues (x', y)–Koordinatensystem eingeführt. Dabei ist immer $q = x - x'$ (vgl. auch Abb. 10.15, x' ist im gezeichneten Beispiel negativ, vgl. Punkt P). Daher ist $x' = x - q$. Damit kann man f wie folgt umrechnen:

$$\begin{aligned} f(x') &= ax'^2 + d \\ &= a(x-q)^2 + d \\ &= ax^2 - 2aqx + aq^2 + d \\ &= ax^2 + bx + c \\ &= f_1(x) \end{aligned} \tag{10.1}$$

Dabei ist $b = -2aq$ resp. $q = -\frac{b}{2a}$ und $c = aq^2 + d$ resp. $d = c - aq^2 = c - \frac{b^2}{4a}$.

Resultat:
Für eine beliebige gegebene Funktion $f_1(x) = ax^2 + bx + c$ lässt sich daher zu a, b und c immer q und d berechnen:

$$q = -\frac{b}{2a}, \qquad d = c - \frac{b^2}{4a}$$

Der Scheitelpunkt der verschobenen Parabel hat daher im alten (x, y)–Koordiantensystem die Koordinaten (q, d).

Die Nullstellen der verschobenen Parabel sind im verschobenen System bekannt: Aus $ax'^2 + d = 0$ folgt $x'_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{d}{a}}$. Daher ist $(x - q)_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{d}{a}}$ und somit $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{d}{a}} + q = \pm\sqrt{-\frac{c-\frac{b^2}{4a}}{a}} + (-\frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{-\frac{-4ac+b^2}{4a^2}} - \frac{b}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Wir definieren:

Definition 10.12 (Diskriminante) *:*
Der Ausdruck $D = b^2 - 4ac$ heisst **Diskriminante** *der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.*

Satz 10.4 (Nullstellen einer quadratischen Funktion) *: Die Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$ sind gegeben durch $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Für $D > 0$ gibt es zwei reelle Nullstellen, für $D = 0$ eine und für $D < 0$ gibt es keine reelle Nullstelle in* $\mathbf{R}$.

Beispiel: Löse die Ungleichung $4x^2 - 2x + 1 < x + 2$.

Lösung: Zu lösen ist somit die Ungleichung $4x^2 - 3x - 1 < 0$. Da die Parabel hier nach oben geöffnet ist, muss man daher die Lösung zwischen den Nullstellen suchen. Die Nullstellen berechnet man zu $x_1 = -\frac{1}{4}$ und $x_2 = 1$. Somit ist die Lösungsmenge $\mathbf{L} = \{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{1}{4} < x < 1\} = (-\frac{1}{4}, 1)$. Man kann die Aufgabe aber auch graphisch lösen, indem man die Parabel $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$ und die Gerade $g(x) = x + 2$ zeichnet und schaut, in welchem Bereich die Gerade bezüglich der y–Richtung unterhalb der Parabel verläuft.

10.2.7 Verschiebung und Streckung des Koordinatensystems

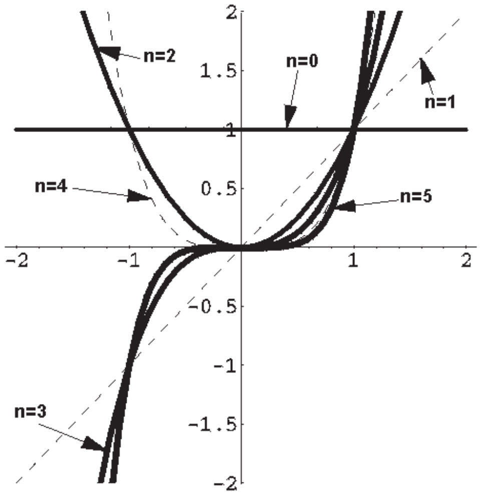
Bei der linearen Funktion $f(x) = ax + b$ haben wir gesehen, dass b eine Verschiebung des Graphen in y–Richtung um $+b$ bedeutet. Man kann sich dabei ebenso denken, dass man das Koordinatensystem um $-b$ in y–Richtung verschiebt, den Graphen aber festhält. Bei der quadratischen Funktion $f(x) = a(x - q)^2 + d$ dagegen hatte q eine Verschiebung des Graphen in x–Richtung um $+q$ zur Folge — oder eine Verschiebung des Koordinatensystemy in x–Richtung um $-q$ bei festgehaltenem Graphen. Andererseits entsteht der Graph von $f(x) = ax^2$ aus dem von $f(x) = x^2$ durch durch Streckung um den Faktor d in y–Richtung usw..
Diese Sachverhalte lassen sich, wie man sofort sieht, auf einfache Weise erweitern und verallgemeinern.

So erhält man das folgende Resultat:

Satz 10.5 (Verschiebungen und Streckungen des Graphen) *: Gegeben sei der Graph der Funktion $f(x)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Dann gilt:*

1. *Der Graph von $f(x+a)$ entsteht aus dem gegebenen Graphen duch Verschiebung um $-a$ in x–Richtung.*
2. *Der Graph von $f(x)+b$ entsteht aus dem gegebenen Graphen duch Verschiebung um $+b$ in y–Richtung.*
3. *Der Graph von $f(c\,x)$ entsteht aus dem gegebenen Graphen durch Streckung um den Faktor c in x–Richtung. ($c=-1$ bedeutet Spiegelung an der y–Achse).*
4. *Der Graph von $d\cdot f(x)$ entsteht aus dem gegebenen Graphen durch Streckung um den Faktor d in y–Richtung. ($d=-1$ bedeutet Spiegelung an der x–Achse).*

Abbildung 10.16: Potenzfunktionen



10.2.8 Potenzfunktionen, Hyperbeln

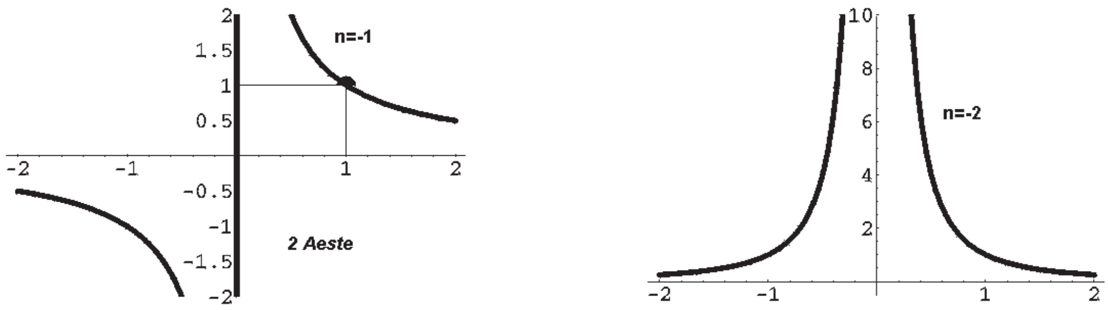
Definition 10.13 (Potenzfunktion) *:*
Sei $n\in\mathbf{Z}$. Eine Funktion $f:\ x\longmapsto f(x)=x^n$ heisst **Potenzfunktion***. (Vgl. Abb. 10.16.)*

Abb. 10.16 zeigt auch *Parabeln höherer Ordnung* ($n>2$).
In Abb. 10.17 sehen wir die Graphen von $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$ sowie von $f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$. Geometrisch ist die Kurve (Punktmenge) $\{(x,f(x))\mid f(x)=\frac{1}{x})\}$ eine *Hyperbel*. Eine Hyperbel besteht aus zwei *Ästen*. Bei $f(x)=\frac{1}{x^n}$) wäre auch die Bezeichnung „Hyperbel höherer Ordnung“ passend.

10.2.9 Asymptoten, Pole

Abb. 10.18 stellt eine geometrische Abbildung des gezeigten Kreises auf die x–Achse dar. Dabei wird ein Punkt des Kreises (z.B. P) bijektiv einem Punkt auf der x–Achse (z.B. der Wert x) zugeordnet. Durch diese Abbildung wird so jedem Punkt des Kreises (ausser dem Nordpol N) genau ein Punkt der x–Achse zugeordnet. Was aber passiert mit dem Nordpol? Wenn x in Richtung $+\infty$ oder $-\infty$ auf der x–Achse

Abbildung 10.17: Potenzfunktionen, Hyperbeln



wandert, so wandert P in Richtung N auf dem Kreis — und das von beiden Seiten her. Daher entspricht dem vorerst nur symbolisch darstellbaren $+\infty$ oder $-\infty$ auf dem Kreis der Punkt N. Wir sagen: *Für x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ gelangt man mit P zum Pol N.* Aus diesem Grunde legen wir fest:

Begriffserklärung 1 (Pol, Polstelle) *:*
Falls in der Nähe eines isolierten Punktes x_0 die Beträge der Funktionswerte $f(x)$ über alle Grenzen wachsen, $f(x_0)$ in **R** *also nicht definiert ist, so sagen wir, f habe in x_0 einen* **Pol***. x_0 heisst dann* **Polstelle** *.*

Bei einer Polstelle nähert sich somit der Graph der Funktion beliebig genau einer senkrechten Geraden durch die Polstelle. Polstellen sind also „Unendlichkeitsstellen“.
Wenn nun x betragsmässig immer grösser wird, kann sich der Graph auch einer nicht–vertikalen Asymptote beliebig genau annähern. (Vgl. Abb. 10.19)Wir sagen:

Begriffserklärung 2 (Asymtote) *:*
Eine **Asymtote** *(asymtotische Gerade) ist eine Gerade, der sich der Graph der gegebenen Funktion beliebig genau annähert, falls $|x|$ genügend gross wird Schmiegegerade.*

Bei einer Polstelle haben wir demnach eine senkrechte Asymptote. Alle andern Asymptoten sind lineare Funktionen der Form $g(x) = ax + b$. Die Differenz $(f(x) - g(x))$ wird daher beliebig klein, wenn $|x|$ genügend gross wird.
Abb. 10.19 zeigt die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ und $f(x) = \frac{1}{x} + x$. Die erste Funktion hat einen Pol bei $x = 3$ und eine horizontale Asymptote bei $y = 2$. Die zweite Funktion hat einen Pol bei $x = 0$ und die Asymptote $g(x) = x$.
Wie man sieht, treten daher Pole dort auf, wo ein Nenner 0 werden würde. Wird x betragsmässig grösser,

Abbildung 10.18: Pol

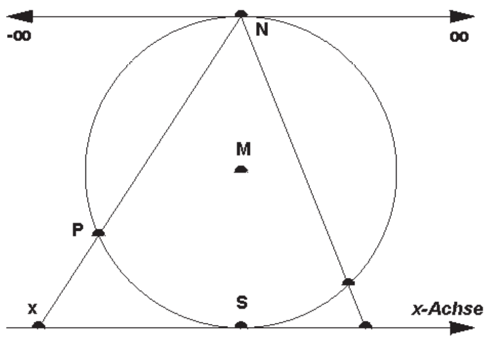
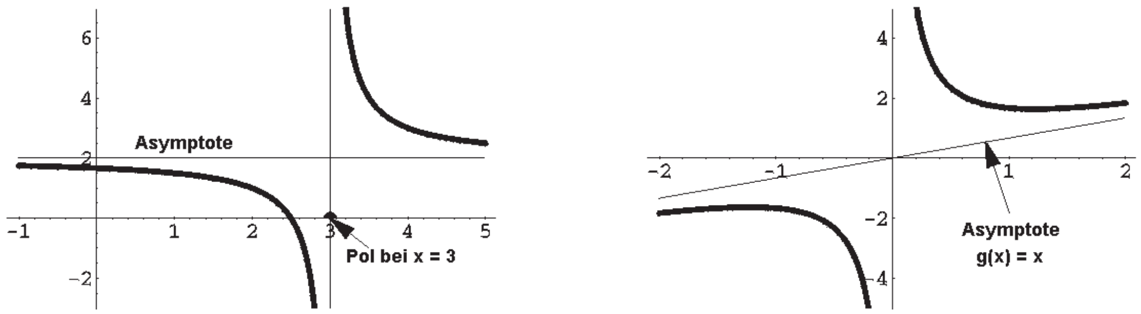
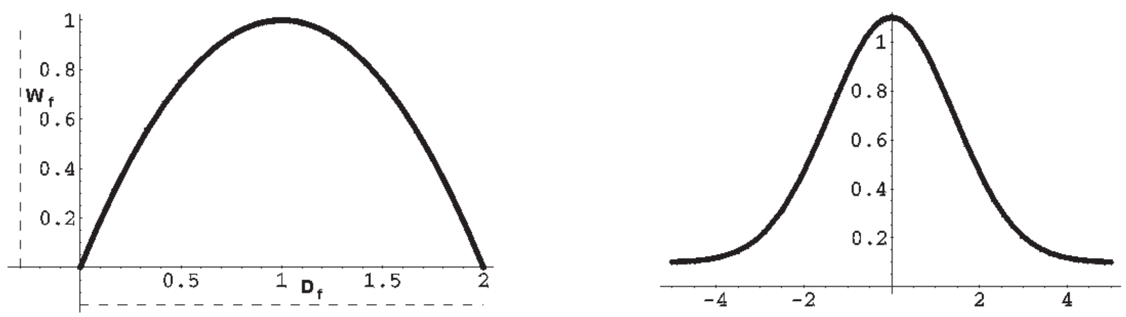


Abbildung 10.19: Beispiele mit Polen und Asymtoten



so wird etwa ein Ausdruck der Form $\frac{a}{bx+c}$ klein, spielt also für den Graphen keine grosse Rolle mehr. (Allgemeiner: wenn im Zähler ein kleinerer Grad ist als im Nenner.) Asymptoten findet man daher, wenn man die über alle Massen kleiner werdenden Bruch–Anteile streicht.
Hinweis: Es lohnt sich, einige Funktionen bezüglich Pole und Asymptoten zu analysieren (Übungsblätter). Ein Rechner mit einem geeigneten Graphik-Programm leistet dabei wertvolle Dienste!

Abbildung 10.20: Beispiele von beschränkten Funktionen



10.2.10 Beschränkte Funktionen

Abb. 10.20 zeigt die Funktionen $f(x) = -x^2 + 2x$ mit $D_f = [0, 2]$ und $W_f = [0, 1]$ sowie $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ mit $D_f = \mathbf{R}$ und $W_f = (0, 1]$. Der Wertebereich dieser Funktionen ist ein endliches Intervall, also eingeschränkt. Man nennt solche Funktionen daher *beschränkt*. Andere bekannte Beispiele sind $\sin(x)$, $\cos(x)$ etc. .

Definition 10.14 (Beschränktheit einer Funktion) *:*
Eine Funktion $f: \; x \longmapsto f(x) = x^n$ *heisst* **beschränkt** *auf* D_f*, falls gilt:*

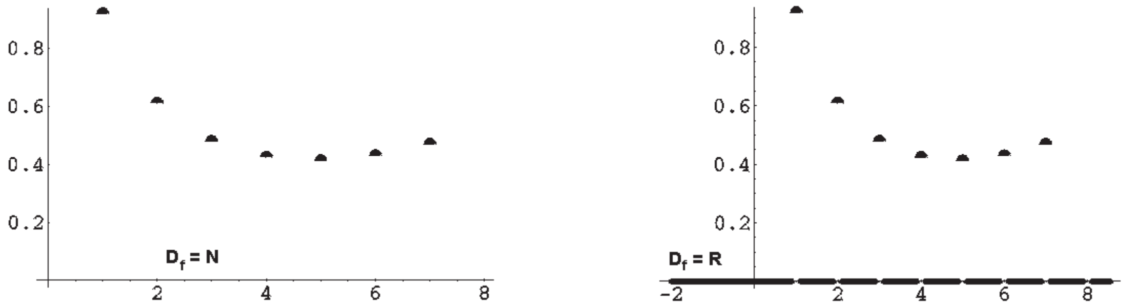
$$\exists_{M\in\mathbf{R}^+} \; \forall_{x\in D_f} : \; |f(x)| \leq M.$$

Das bedeutet also: $\forall_{x\in D_f} : \; -M \leq f(x) \leq M$ oder — $W_f \subseteq [-M, M]$.

10.2.11 Stückweise und punktweise definierte Funktionen

Wir betrachten die folgenden Beispiele:
Das erste Bild in Abb. 10.21 zeigt die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D_f = \mathbf{N}$ (eine Zahlenfolge also). Im zweiten Bild hingegen wird versucht, die Funktion zu zeigen:

Abbildung 10.21: Beispiele von punktweise definierten Funktionen

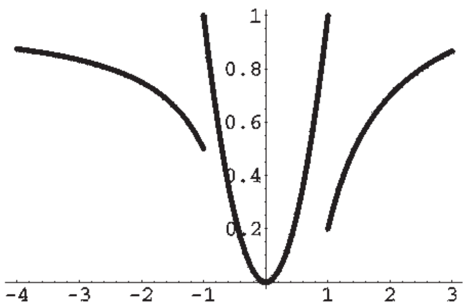


$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbf{N} \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{R} \;\wedge\; x \notin \mathbf{N} \end{cases}$
In beiden Fällen werden Funktionswerte *punktweise definiert.* Im ersten Bild (Abb. 10.21) sind die Punkte des Graphen *isoliert*[6] resp. nicht mit andern Punkten des Graphen verbunden. Funktionen mit solchen Graphen nennt man *diskret*:

Definition 10.15 (Diskrete Funktion) *:*
Eine Funktion heisst **diskret***, wenn alle Punkte des Graphen isolierte Punkte sind.*

Die Punkte der Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbf{Q} \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{R} \;\wedge\; x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ sind nicht isoliert, denn sowohl $\mathbf{Q}$ als auch $\mathbf{R}$ sind dichte Mengen, d.h. nicht diskret. Die Funktion ist punktweise definiert. Man kann diese Funktion nicht sinnvoll in einer Skizze darstellen, da es unmöglich ist, einen „unendlich dichten Kamm“ zu zeichnen.

Abbildung 10.22: Beispiele einer stückweise definierten Funktion



Dagege ist die in Abb. 10.22 gezeigte Funktion *stückweise zusammengesetzt* in dem Sinne, dass der Definitionsbereich aus Intervallen besteht, auf denen die Funktion durch rationale Anteile definiert ist. Es handelt sich um

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} + 1 & : \quad x \in [-4, -1] \\ x^2 & : \quad x \in (-1, 1) \\ \text{nicht definiert} & : \quad x = 1 \\ \dfrac{-1}{x} + 1.2 & : \quad x \in (1, 3) \end{cases}$$

Eine andere schon bekannte Art des Zusammensetzens ergibt sich durch das hintereinander Ausführen von Funktionen. *Verkettung*

[6] *Isoliert* bedeutet hier, dass man um jeden Punkt des Graphen einen Kreis legen kann, in dem sich kein weiterer Punkt des Graphen mehr befindet

Beispiel:

$$x \overset{f}{\longmapsto} y = f(x) \overset{g}{\longmapsto} z = g(y) = g(f(x)) \overset{h}{\longmapsto} w = h(z) = h(g(y)) = h(g(f(z)))$$

Seien z.B. $f(x) = -5 + 2\,x$ und $g(x) = 4 - 2\,x + x^2$, dann sind $f(g(x)) = 3 - 4\,x + 2\,x^2$ und $g(f(x)) = 39 - 24\,x + 4\,x^2$.

10.2.12 Monotonie, strenge Monotonie

Abbildung 10.23: Beispiele des Wachstums von Funktionen

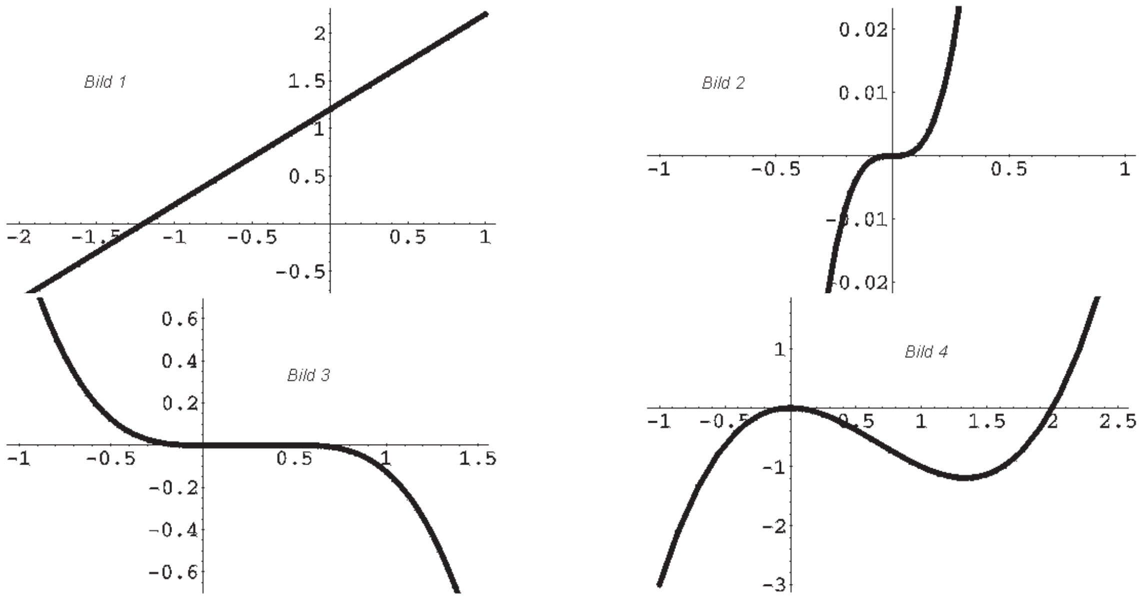
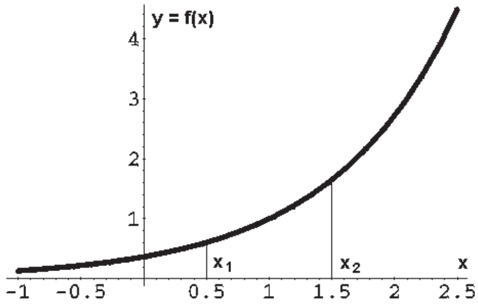


Abb. 10.23 zeigt in Bild 1 eine lineare Funktion, in Bild 2 eine kubische Parabel, in Bild 3 eine aus kubischen Parabeln und einer konstanten Funktion intervallweise zusammengesetzte Funktion und in Bild Û4Û die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2$.
Bei den ersten beiden Bildern fällt auf, dass die Kurve mit grösser werdendem x {it nie fällt. Beim dritten Bild stellen wir fest, dass die Kurbe *nie wächst.* Beim vierten Bild hingegen *wächst und fällt und wächst* die Kurve *intervallweise.*
Im Gegensatz dazu kann bei der Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbf{Q} \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{R} \,\wedge\, x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ weder von Wachstum noch von einem Fallen gesprochen werden (unendlich dichter Kamm). Eine andere interessante Funktion ist die früher besprochene Gausklammerfunktion (10.2.1). Diese Funktion bleibt auf den „Treppenstufen" konstant und springt dann jeweils am Intervallende hoch auf die nächste Stufe. Das hat zur Folge, dass die Funktion *nie fällt.* Offenbar zeigen viele Funktionen ein charakteristisches Verhalten bezüglich Wachstum. Dieses Verhalten spielt oft eine wesentliche Rolle, z.B. wenn es darum geht, Funktionen umzukehren (Umkehrabbildung). Daher definiert man:

Definition 10.16 (Monotonie) *:*

1. *Eine Funktion f heisst* **monoton wachsend**, *wenn gilt:* $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
2. *Eine Funktion f heisst* **streng monoton wachsend**, *wenn gilt:* $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
3. *Eine Funktion f heisst* **monoton fallend**, *wenn gilt:* $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.

Abbildung 10.24: Beispiel zur Monotonie von Funktionen (streng monoton wachsend)

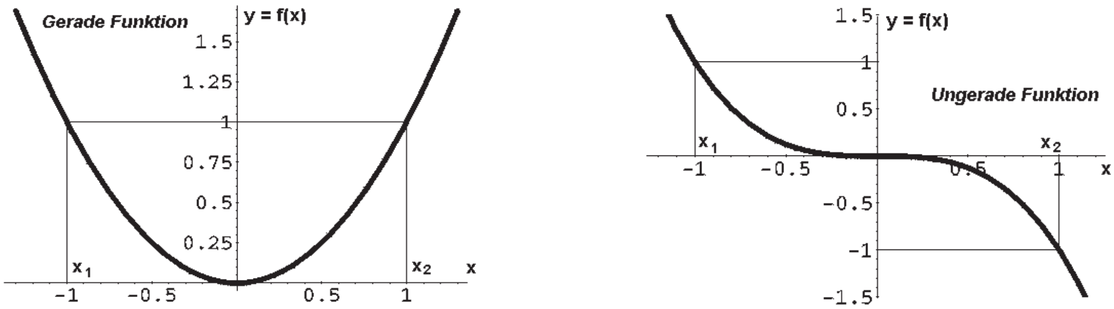


4. *Eine Funktion f heisst* **streng monoton fallend**, *wenn gilt:* $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Da bei einer streng monoton wachsenden Funktion wegen des Wachstums zu verschiedenen Urbilder verschiedene Bilder existieren müssen, ist eine solche Funktion immer *injektiv*. Dasselbe gilt für eine streng monoton fallende Funktion. Wir halten fest:

Satz 10.6 (Injektivität streng monotoner Funktionen) *:*
Eine streng monoton wachsende oder fallende Funktion ist injektiv.

Abbildung 10.25: Gerade und ungerade Funktion



10.2.13 Gerade und ungerade Funktionen

Vielfach sind bei Funktionen die Symmetrieeigenschaften bezüglich der Achsen wichtig. Daher definieren wir (vgl. Abb. 10.25):

Definition 10.17 (Gerade, ungerade Funktionen) *:*

1. *Eine Funktion f heisst genau dann* **gerade**, *wenn gilt:* $\forall_{x \in D_f}\,:\; f(-x) = f(x)$.

2. *Eine Funktion f heisst genau dann* **ungerade**, *wenn gilt:* $\forall_{x \in D_f}\,:\; f(-x) = -f(x)$.

Beispiele gerader Funktionen sind: $f(x) = c,\ x^2,\ x^4,\ x^6\ \ldots x^{2n}$, $\cos(x)$, $\cosh(x)$ etc. und arithmetische Zusammensetzungen von solchen Funktionen. Beispiele ungerader Funktionen sind: $f(x) = x,\ x^3,\ x^5,\ x^7\ \ldots x^{2n+1}$, $\sin(x)$, $\sinh(x)$ etc. und arithmetische Zusammensetzungen von solchen Funktionen.

10.2.14 Polynome, Polynomfunktionen, ganzrationale Funktionen

Definition 10.18 (Polynom) *:*
Ein **Polynom** *ist eine endliche Summe von endlichen Produkten von Termen, die nur aus Variablen oder Konstanten bestehen.*

Ist z.B. nur die Variable x vorhanden, so ist durch das Polynom eine Funktion von x gegeben:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei müssen wir $a_n \neq 0$ verlangen, damit diese Schreibweise Sinn macht.

Definition 10.19 (Koeffizienten, Grad, ganzrationale Funktion) *:*
Die Konstanten (obige Darstellung) a_k nennen wir **Koeffizienten** *und die Zahl n heisst* **Grad** *des Polynoms. Die damit gegebenen Funktionen $p(x)$ heissen* **ganzrationale Funktionen** *oder* **Polynomfunktionen** *mit einer Variablen.*

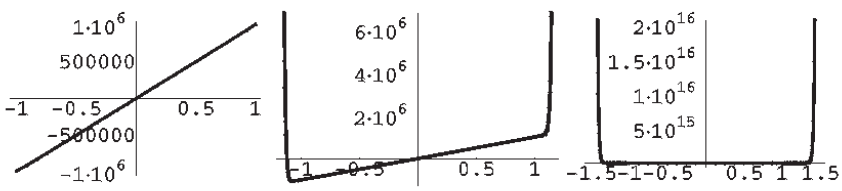
Ist z.B. $p(x) = 4x^5 + 2x^3 - 16x$, so haben wir damit insbesondere eine ungerade Funktion. Bei $p(x) = 8x^5$ hingegen ist $a_4 = a_3 = \ldots = a_0 = 0$.
Speziell ist zu bemerken, dass ein Polynom überall definiert ist. Es gibt keine einschränkende Bedingung für den Definitionsbereich. Bei einem Polynom mit nur einer Variablen gilt also $D_p = \mathbf{R}$.

Ein Polynom lässt sich nach dem *Hornerschema* schreiben:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= (((\ldots(((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \ldots)x + a_2)x + a_1)x + a_0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Bei der Schreibweise mit den Klammern ergeben sich n Multiplikationen und n Additionen. Bei der gewöhnlichen Schreibweise hingegen $n + (n-1) + \ldots\ 2 + 1 = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ Multiplikationen und n Additionen, also ein wesentlich höherer Rechenaufwand.

Abbildung 10.26: Diverse Plotbereiche derselben Funktion

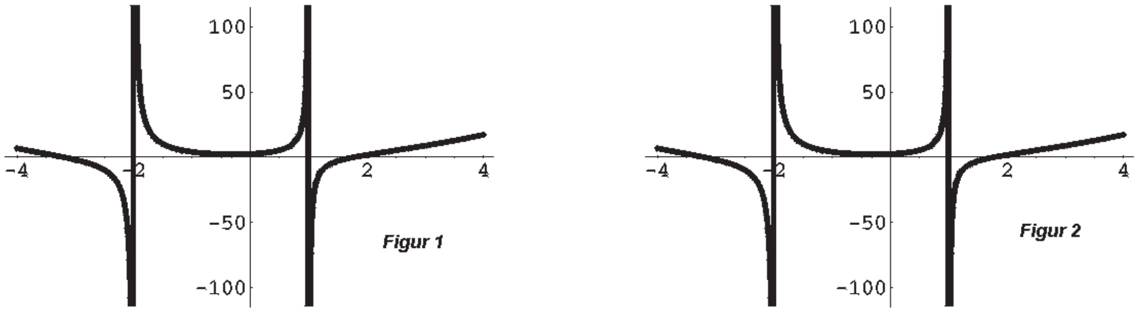


Als Beispiel ist in Abb. 10.26 der Graph von $p(x) = 10^2 x^{100} + 10^4 x^{10} + 10^6 x + 10^3$ über verschiedenen Intervallen gezeichnet. Bei solchen Beispielen ist es wichtig, einen Ausschnitt zu finden, in dem charakteristischen Kurververlauf darstellbar ist. (Hier zeigt das 2. Bild am meisten.)

10.2.15 Gebrochen rationale Funktionen

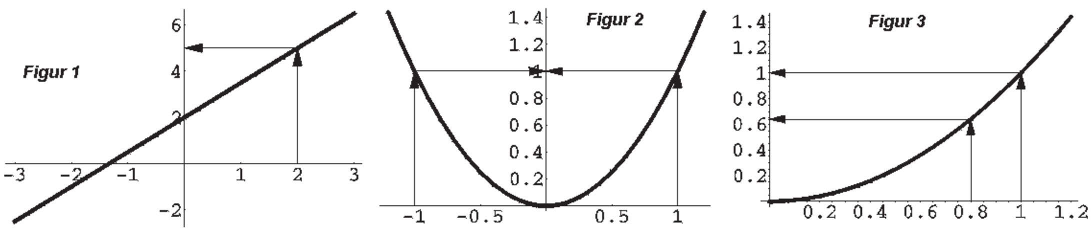
Definition 10.20 (Gebrochen rationale Funktion) *:*
Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome. Dann heisst die Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ **gebrochen rationale Funktion** *mit einer Variablen.*

Abbildung 10.27: Beispiel einer gebrochen rationalen Funktion



Beispiel (vgl. Abb. 10.27, Figur 1: $f(x) = \frac{x^4+2x^3-4x^2-2x-5}{x^2+x-2}$. Damit wir den Verlauf des Graphen besser beurteilen können, dividieren wir soweit als möglich aus und erhalten: $f(x) = x^2 + x - 3 + \frac{3x-11}{x^2+x-2}$. Die Funktion verhält sich demnach asymptotisch wie die Parabel $p(x) = x^2 + x - 3$. Der Nenner ist $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Die Funktion hat daher Pole bei $x = 1$ und bei $x = -2$. (Vgl. Abb. 10.27.)
Allgemein ist es ratsam, gebrochen rationale Funktionen für die Untersuchung durch „ausdividieren" in der Form $f(x) = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)}$ mit $Grad(p_2) < Grad(q)$ zu bringen.
Manchmal ist eine gebrochen rationale Funktion nur vermeintlich eine solche. Z.B. im Ausdruck $f(x) = \frac{x^5-3x^3+x^2+2x-1}{x^2-1}$ lässt sich der Quotione $x^2 - 1$ für $x \neq -1$ und $x \neq 1$ wegkürzen. Man erhält daher in $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ schliesslich $f(x) = x^3 - 2x + 1$, also eine ganzrationale Funktion.
Ein anderes Beispiel ist $f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$ (vgl. Abb. 10.27, 2. Figur). Man erkennt die Pole bei $x = 1$ und $x = -2$ sowie die Asymptote $y = 0$.

Abbildung 10.28: Funktion und Umkehrfunktion



10.2.16 Umkehrfunktionen

Definition der Umkehrfunktionen

In Abb. 10.28, Figur 1, wird eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$ gezeigt. Jedem $x \in D_f = \mathbf{R}$ wird durch die Funktion genau ein verschiedenes $y \in W_f = \mathbf{R}$ zugeordnet. Keine zwei Urbilder x_i haben dasselbe Bild. Die Funktion ist ersichtlich *bijektiv*. Zu jedem $y \in W_f$ lässt sich umgekehr das zugehörige x eindeutig berechnen: $y = \frac{x-b}{a}$. Die *Umkehrabbildung* (vgl. Teil 3) ist wieder bijektiv und somit wieder eine Funktion.
Ganz anders bei Figur 2: Hier wird die Funktion $f(x) = x^2$ gezeigt. Jedem $x \in D_f = \mathbf{R}$ wird durch die Funktion genau ein $y \in W_f = \mathbf{R}_0^+$ zugeordnet. Jedoch haben ausser für $x = 0$ immer zwei verschiedenen x–Werte dasselbe Bild, nämlich jeweils x_i und $-x_i$. Es ist $y = x_i^2 = (-x)_i^2$. Die hier vorliegende Funktion ist nicht injektiv oder bijektiv, die Umkehrabbildung f^{-1} daher nicht rechtseindeutig. f^{-1} ist daher keine Funktion. Im injektiven Fall jedoch ist die Umkehrabbildung f^{-1} auf $D_{f^{-1}} = W_f$ rechtseindeutig und f^{-1} daher wieder eine Funktion.

Definition 10.21 (Umkehrunktion) *:*
Ist die Umkehrabbildung f^{-1} einer Funktion f wieder eine Funktion, so nennt man f^{-1} **Umkehrfunktion** *von f.*

Wir halten fest:

Satz 10.7 (Existenz der Umkehrfunktion) *:*
Bei einer injektiven Funktion f ist die Umkehrabbildung f^{-1} wieder eine Funktion.

Wegen dem Satz in 10.2.12 gilt daher:

Korollar 10.1 (Umkehrfunktion bei streng monotonen Funktionen) *:*
Bei einer streng monoton wachsenden oder falllenden Funktion f ist die Umkehrabbildung f^{-1} wieder eine Funktion.

Falls f nicht bijektiv ist, jedoch stückweise streng monoton (d.h. auf Teilintervallen immer streng monoton) so lässt sich die Sache retten, indem man den Definitionsbereich auf so ein Teilintervall einschränkt, auf dem die Funktion monoton ist. Z.B. $f(x) = \sin(x)$ auf $D_f = \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ oder $f(x) = x^2$ auf $D_f = \mathbf{R}_0^+$. Im letzten Fall ist dann natürlich $f^{-1}(y) = +\sqrt{y}$ auf $W_f = D_{f^{-1}} = \mathbf{R}_0^+$.
Da wir daran sind Funktionen zu behandeln, wollen wir im Folgenden unter f^{-1} immer die *Umkehrfunktion* verstehen. Die durch f und f^{-1} gegebenen Zuordnungen können wir nun schematisch so darstellen:

$$\begin{array}{rcll} D_f \ni x & \xmapsto{f} & y = f(x) \in W_f & (*) \\ W_{f^{-1}} \ni x = f^{-1} & \xleftarrow[]{f^{-1}}\!\!| & y \in D_{f^{-1}} & \end{array}$$

Daraus kann man ablesen: $y = f(x) = f(f^{-1}(f(x))) = \ldots$ etc. Das führt auf folgende Folgerungen:

Korollar 10.2 (Verknüpfungen von Umkehrfunktion und Funktionen) *:*

$$f = f \circ f^{-1} \circ f, \qquad f^{-1} = f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \qquad etc.\ .$$

Variablenwechsel

In der eben dargestellten Situation ist x die unabhängige Variable von f, y hingegen die unabhängige Variable von f^{-1}, vgl. z.B. Abb. 10.28, Figur 3. Der Graph von f stimmt bei dieser Darstellung mit demjenigen von f^{-1} überein: Es gibt nur einen Graphen. Jedoch sind die unabhängige und die abhängige Variable auf verschiedenen Achsen aufgetragen. Das ist manchmal sehr unbequem, vor allem, wenn man das Verhalten von f und f^{-1} vergleichen will, wenn die jeweils unabhängige Variable den Definitionsbereich durchläuft. Ebenso ist es, wenn man eine andere Funktion h mit f^{-1} vergleichen möchte. Was tun?

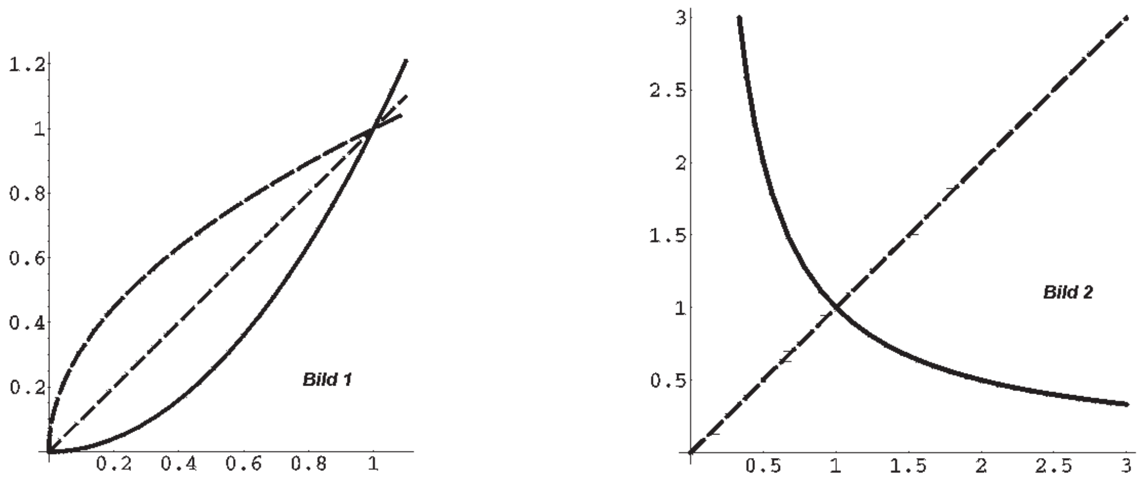
Folgende Idee löst dieses Problem: *Benenne die unabhängige Variable von f^{-1} so um, dass sie gleich lautet wie die unabhängige Variable von f.*

Im obigen Schema (*) ist x die unabhängige Variable von f und y diejenige von f^{-1}. Die Variable y bei f^{-1} wird daher *umbenannt* in x. Das bedeutet, dass die y–Achse (Urbildmenge bei f^{-1}) neu zur x–Achse wird, die beiden Achsen also vertauscht werden. Da der Graph diese Vertauschung auch mitmachen muss, wird er geometrisch an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten gespielgelt. Wir erhalten also (vgl. dazu Abb. 10.29, Bild 1):

Methode 10.1 (Variablenwechsel) *:*
Um bei Funktionen mit einer Variablen überall die gleiche Variable zu haben, wird die ursprünglich unabhängige Variable y von f^{-1} mit x vertauscht. x–Achse und y–Achse werden so mitvertauscht. Den Graphen von f^{-1} gewinnt man aus demjenigen von f geometrisch durch eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

Abb. 10.29, Bild 2 zeigt die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Wie man leicht sieht, gilt für diese Funktion $f = f^{-1}$. Dieselbe Eigenschaft haben z.B, $g(x) = x$ und $h(x) = -x$.

Abbildung 10.29: Umkehrfunktion, Variablenwechsel



10.2.17 Wurzelfunktionen

Bekanntlich ist das *Wurzelziehen* oder *Radizieren* die Umkehroperation des Potenzierens. Daher legen wir fest:

Definition 10.22 (Wurzelfunktionen) *:*
Die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ nennen wir **Wurzelfunktionen***:* $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Da Potenzfunktionen nur für ungerade n sowie für gearde n nur in $\mathbf{R}_0^+$ streng monoton wachsend sind, lassen sie sich nicht überall umkehren. Generell sind daher Wurzelfunktionen immer definiert für $x \in \mathbf{R}_0^+$. Später werden wir sehen, dass in den komplexen Zahlen $\mathbf{C}$ diese Einschränkung nicht mehr besteht, dafür aber das Problem der Eindeutigkeit eine neue Dimension gewinnt. Abb. 10.29, Bild 1, zeigt über $\mathbf{R}_0^+$ die Funktion $f(x) = x^2$ und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

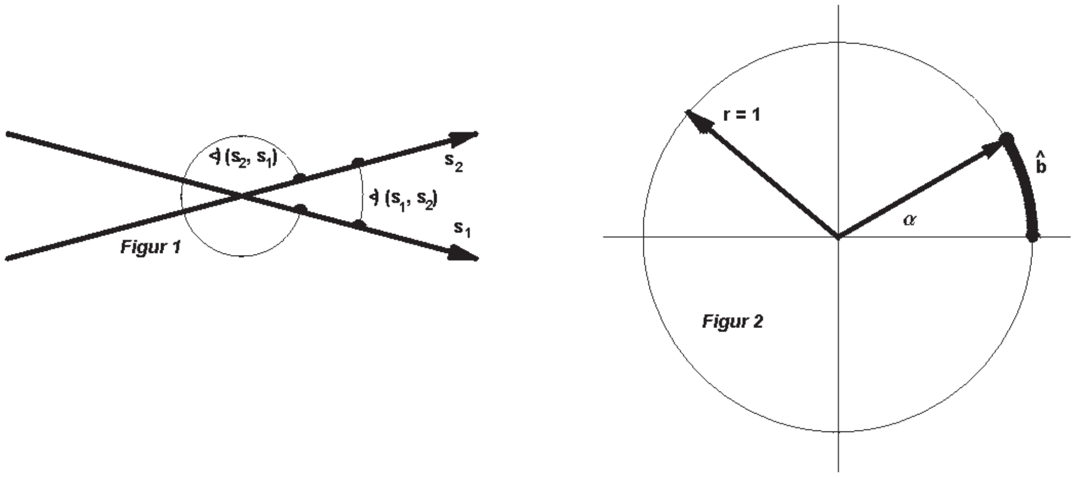
10.2.18 Winkelfunktionen

Elementare Grundlagen: Winkel und Winkelmessung

In der elementaren Geometrie lernt man, dass zwei sich schneidende Geraden eine Ebene in vier Teile oder *Winkel* zerschneiden, die als Punktmengen wiederum mit den Geraden zusammen die Ebene bilden. *Ein* **Winkel** *ist also ein so ausgeschnittenet Teil der Ebene* (vgl. Abb. 10.30, Figur 1). So ein Teil oder Winkel kann man sich bekanntlich auch durch Drehung eines von einem Punkt O (Ursprung, Origo[7] ausgehenden Strahls um diesen Ursprungspunkt entstanden denken. Um Missverständnissen vorzubeugen, wollen wir die Drehung immer im Gegenuhrzeigersinn als *positiv* definieren[8] und hier vorerst nur solche *positiv orientierten Winkel* betrachten.
Durch zwei solche von O ausgehende, nicht parallele Strahlen entstehen so zwei verschiedene, nicht–kongruente Winkel: $\measuredangle(s_1, s_2)$ und $\measuredangle(s_2, s_1)$. Zusammen mit den Geraden bilden sie wiederum die ganze Ebene.
Ein Quadrat, ein Dreieck und ein Kreis mit dem gleichem Flächeninhalt $1m^2$ sind trotz der Gleichheit ihres Flächenmasses verschiedene Flächen mit verschiedenen Formen. Der Begriff „Fläche“ ist somit zu unterscheiden vom Begriff „Flächenmass“ oder „Flächeninhalt“. Ebenso verhält es sich hier bei

[7] Ursprung: lat. *Origo*, franz. *origine*
[8] Bei Rechtshändern der „Ohrfeige nach“.

Abbildung 10.30: Winkel und Winkelmessung



den Winkeln. Der *Winkel* als Teil der Ebene ist zu unterscheiden vom *Winkelmass*. Jedoch stellt die Winkelmessung physikalisch einen Ausnahmefall dar. Denn um z.B. eine Länge zu messen, braucht man einen Maßstab aus Materie — oder ein Messprinzip, das sich an der physikalischen Materie orientiert. Ohne Verweis auf die Physik lässt sich eine Längeneinheit nicht verbindlich festlegen. Ganz anders ist es mit der Winkelmessung. Hier genügt es, den *Vollwinkel* zu erklären und dann anzugeben, in wieviele kongruente resp. deckungsgleiche Teile dieser einzuteilen ist. Dann ist die Winkelmessung rein theoretisch und ohne das notwendige Vorhandensein eines in physikalischer Materie definierten „Urwinkels". Daher ist die Natur der Winkelmessung eine ganz andere als z.B. die der Längenmessung.

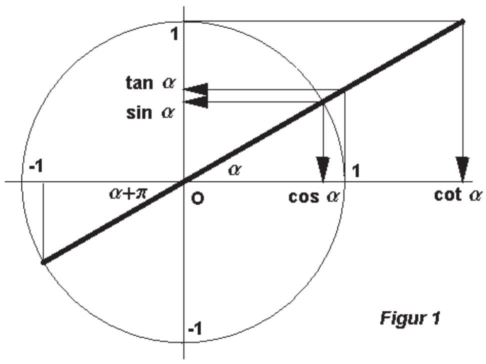
Von der Schule bekannt sind sicher jedem das *Gradmass (Altgrad)*, wo man den vollen Winkel in 360^o einteilt und diese wiederum in je $60'$ und jede solche Minute in $60''$. Das Gradmass ist uralt. Man kann vermuten, dass es in der Vorzeit im Zusammenhang mit einer ungenauen Festlegung der Anzahl Tage eines Jahres, im Rahmen frühzeitlicher astronomischer Beobachtungen etwa, entstanden ist. Denn um den Jahreslauf festzulegen bedurfte es der Beobachtung der Gestirne. 360 ist nicht weit entfernt von 365 und zudem eine Zahl, mit der sich einfach rechnen lässt, denn sie hat sehr viele Teiler. ($360 = 2^3 3^2 5$.) Das Altgrad ist infolge der Tradition tief in den Gewohnheiten der Menschen verhaftet und daher in der handwerklichen Praxis das Winkelmass schlechthin. In der Zeit der französischen Revolution dagegen entsprach es dem Zeitgeist, all den alten Wirrwarr und all die alten Sonderlingsregelungen abzuschaffen oder zu vereinheitlichen — Gleichheit, Freiheit, Brüderlichkeit – auch für das Winkelmass. Der rechte Winkel hatte fortan 100 Grad, der volle 400 Grad — oder eben *Neugrad*. Offensichtlich hat sich das Neugrad fast so schlecht durchgesetzt wie die Einteilung der Woche in 10 Tage. Jedenfalls wagte niemand mehr etwas mehr als hundert Jahre später, während der zweiten grossen Revolution, der russischen, Ähnliches nochmals einzuführen. Wohl waren die Gewerkschaften zu stark beteiligt. . . Für die Mathematik jedenfalls taugen beide Masse nicht viel. Standart ist hier das *Bogenmass*. Der spätere Gebrauch und die später noch zu machende Erfahrung werden es erweisen.
Beim **Bogenmass** *misst man bekanntlich die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis*[9], dessen Umfang 2π beträgt (vgl. Abb. 10.30, Figur 2). Bei einem gegebenen kartesischen Koordinatensystem ist die Einheitslänge willkührlich festgelegt. Alle in diesem System durchgeführten Längenmessungen beziehen sich dann auf diese Einheitslänge. Also auch die Bogenlänge[10]. So ist eine physikalische Einheit im Sinne der mit einem physikalischen Maßstab vergleichenden Messung nicht vorhanden. Die Winkelmessung ist ja auch nicht physikalisch eichbar, wie wir oben gesehen haben. Trotzdem, wohl aus Gewohnheit,

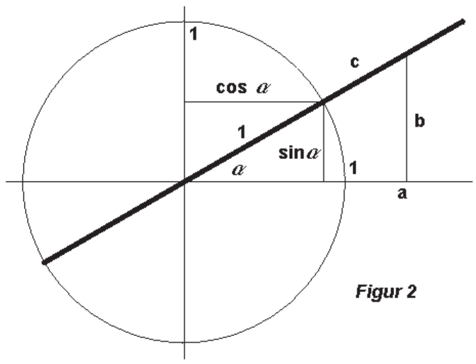
[9] Kreis mit dem Radius 1.
[10] Wie die Länge eines allgemeinen Bogens exakt zu bestimmen ist, erfährt man in der Integralrechnung.

können einige Menschen nicht ohne physikalische Einheiten arbeiten und rechnen. So hat man dann für die Winkelmessung im Bogenmass trotzdem wieder eine *künstliche Einheit*, den **Radianten (rad)** eingeführt. Da der Radiant künstlich, überflüssig und theoretisch bedeutungslos ist, wollen wir uns nicht damit belasten und ihn hier weiter nicht beachten.
Im Bogenmass misst demnach der volle Winkel 2π, also die Länge des Umfangs des Einheitskreises. Der rechte Winkel hat somit das Mass $\frac{\pi}{2}$ und der gestreckte das Mass π. Findet die Drehung zur Gewinnung des Winkels nicht im positiven Sinne statt, d.h. dreht man einen Strahl im Uhrzeigersinn, so messen wir den Winkel betragsmässig gleich, jedoch mit negativem Vorzeichen.

Die Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis

Abbildung 10.31: Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis





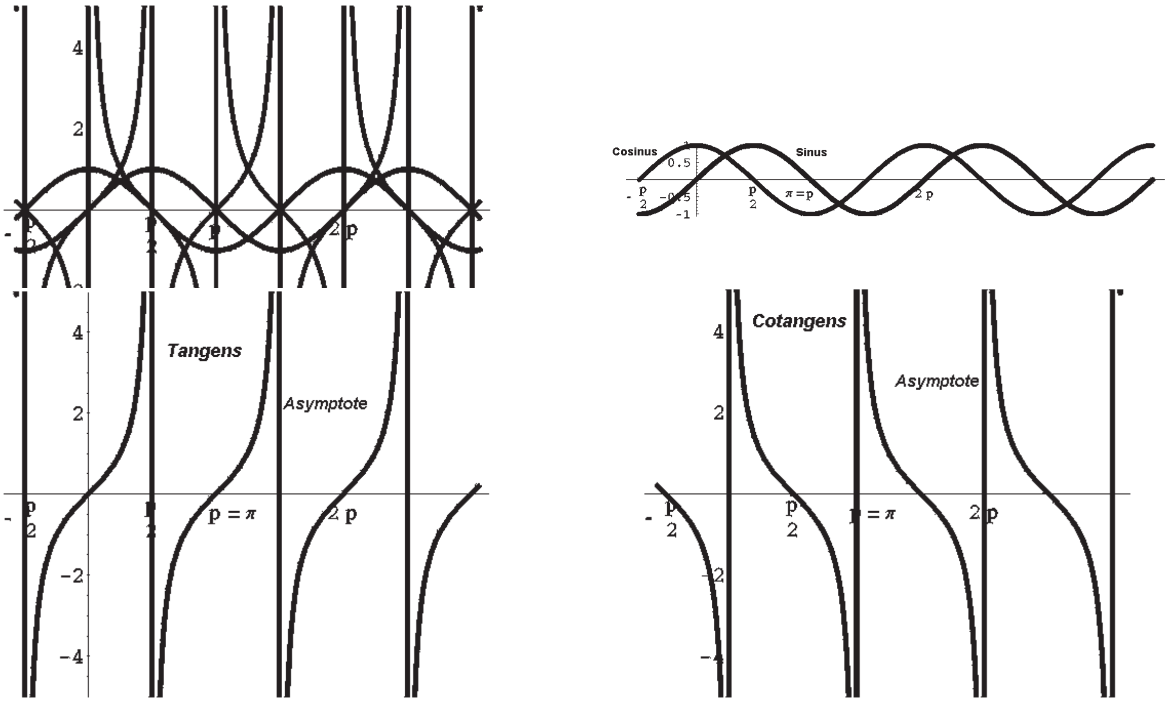
Geometrische Definition: Die Längen der in Abb. 10.31 (Figur 1) gezeigten Strecken benutzen wir zur Definition der Winkelfunktionen *Sinus* **(sin)**, *Cosinus* **(cos)**, *Tangens* **(tan)**, *Cotangens* **(ctg, cot)**. Diese Definitionen sind natürlich vorerst nur rein geometrisch, denn sei lassen keine exakten oder näherungsweise beliebig genauen Berechnungen bei irgendwelchen Winkeln zu[11]. Ebenso können wir bekanntlich im 1. Quadranten definieren: $\sin(\alpha) = \frac{b}{c}$, $\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$, $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$, $\cot(\alpha) = \frac{a}{b}$. Neu sind wahrscheinlich der **Secans** und der **Cosecans** (in der Astronimie sehr gebräuchlich):

Definition 10.23 (Secans, Cosecans) *:*

$$sec(\alpha) := \frac{1}{\cos(\alpha)}, \quad cosec(\alpha) := \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

[11] Eine mathematisch exakte Definition, die auch Berechnungen ermöglicht, wird später im Zusammenhang mit der Eulerschen Exponentialfunktion in **C** oder den Potenzreihen gegeben.

Abbildung 10.32: Graphen der bekannten Winkelfunktionen



Periodizität

Aus der geometrischen Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis sieht man sofort:

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 4\pi) = \ldots = \sin(\alpha + 2n\pi), \quad n \in \mathbf{Z}$$

und auch

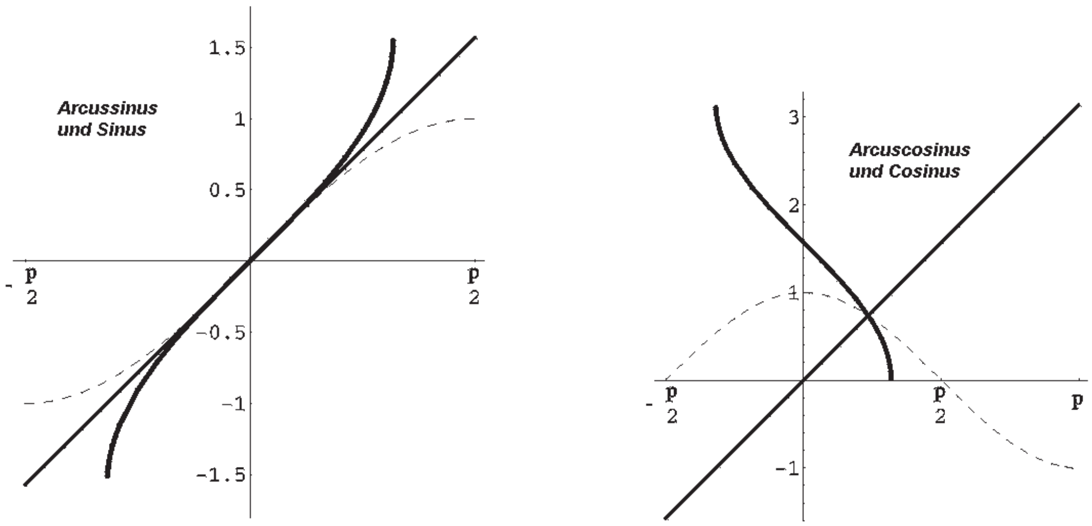
$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha) = -\sin(\pi - \alpha) \quad etc..$$

Zusammengefasst können wir festhalten:

Satz 10.8 (Periodizität, Pythagoras etc.) *: Sei $n \in \mathbf{Z}$.*

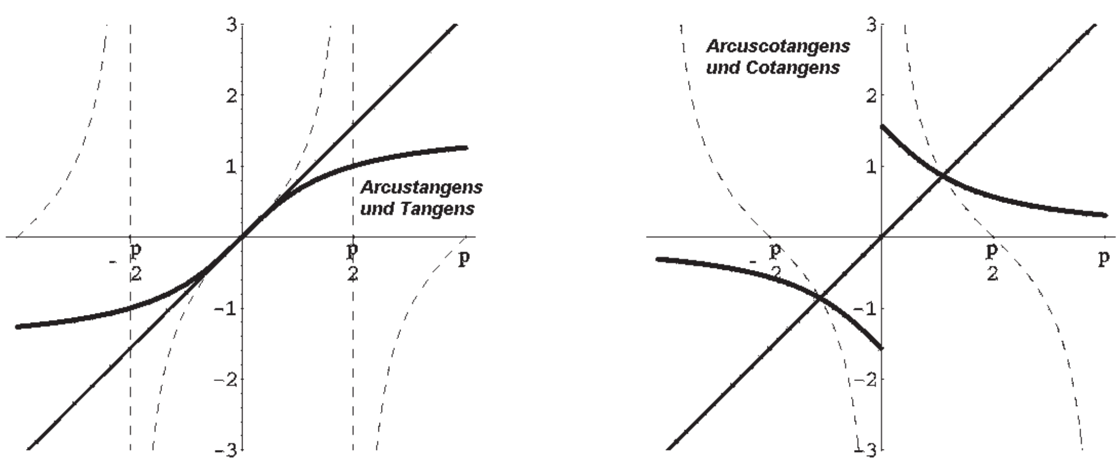
$$\begin{array}{rcl}
\sin(\alpha) & = & \sin(\alpha + 2n\pi) \\
\cos(\alpha) & = & \cos(\alpha + 2n\pi) \\
\tan(\alpha) & = & \tan(\alpha + n\pi) \\
\cot(\alpha) & = & \cot(\alpha + n\pi) \\
\sin(\alpha + \pi) & = & -\sin(\alpha) \\
\cos(\alpha + \pi) & = & -\cos(\alpha) \\
\sin(\pi - \alpha) & = & \sin(\alpha) \\
\sin(\pi - \alpha) & = & \sin(\alpha) \\
cos(-\alpha) & = & \cos(\alpha) \\
\cos(-\alpha) & = & \cos(\alpha) \\
\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) & = & 1
\end{array} \tag{10.3}$$

Abbildung 10.33: Umkehrfunktionen der bekannten Winkelfunktionen über den Standardbereichen



10.2.19 Arcusfunktionen

In gewissen Bereichen sind die Winkelfunktionen bekanntlich streng monoton wachsend oder fallend. Z.B. wächst $\sin(x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Daher kann man auf solchen Bereichen Umkehrfuntionen definieren, die allerdings nur über dem jeweiligen Bereich ihren Zweck erfüllen. Welches die Standardbereiche sind, die man in der Praxis tabelliert oder programmiert hat, ersehen wir aus Abb. 10.33. Für die jeweilige Umkehrfunktion ist der Definitionsbereich immer eindeutig, hingegen hängt der Wertebereich davon ab, wo die Winkelfunktion definiert war, von der wir ausgegangen sind.



10.2.20 Exponentialfunktionen

Zur Definition

Abbildung 10.34: Exponentialfunktionen

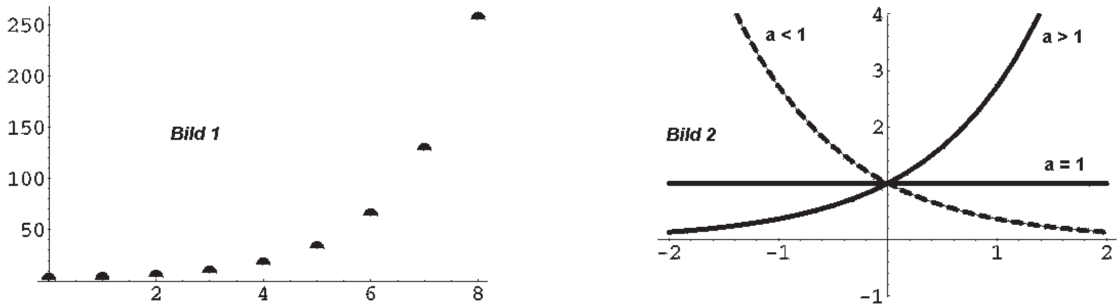


Bild 1 in Abb. 10.34 zeigt die Folge oder Funktion $f(n) = 2^n$ mit $n \in \mathbf{N}$. Eine Verallgemeinerung führt zu Funktionen $f(x) = a^x$ mit $x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ resp. $p \in \mathbf{Z} \wedge q \in \mathbf{N}$, $a > 0$. a ist bekanntlich die *Basis* und x der *Exponent*. Solche Funktionen lassen sich als $f(x) = a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ schreiben, sind also im bekannten Sinne definiert. Für $a < 0$ bietet hingegen schon z.B. $\sqrt{-1} = (-1)^{0.5}$ Probleme. $a < 0$ sei hier also ausgeschlossen. Für $a = 0$ hat man $f(x) = \sqrt[q]{0^p}$. 0^p ist 0 für $p \in \mathbf{N}$, 1 für $p = 0$ und nicht definiert für $p < 0$. (Dann wäre ja $0^p = \frac{1}{0^k}$ mit $k = -p > 0$).
Wie aber lässt sich $f(x) = a^x$ definieren für $a > 0$ und $x \notin \mathbf{Q}$? — Dazu muss man sogenannte *Grenzprozesse* verwenden (vgl. späterer Teil). Die Idee ist folgende: $\mathbf{Q}$ liegt dicht in $\mathbf{R}$. D.h. wie auch $x \in \mathbf{R}$ gewählt wird, so findet man beliebig nahe von x (resp. in jeder Umgebung von x) immer unendlich viele Zahlen x_i resp. $x_j \in \mathbf{Q}$. Andererseits unterscheidet sich a^{x_i} sehr wenig von a^{x_j}, falls x_i und x_j sich auch wenig unterscheiden. Man braucht nur x_j genügend nahe bei x_i zu wählen. Überträgt man dieses Prinzip auf alle $x \in \mathbf{R}$, so kann man für a^x mit $x \notin \mathbf{Q}$ auch verlangen, dass sich dieser Wert beliebig wenig von a^{x_i} unterscheidet, sobald x_i genügend nahe bei x liegt. a^x wird so durch a^{x_i} quasi „angenähert“. So lässt sich a^x beliebig genau festlegen oder eingrenzen, in einer etwas vorerst groben Sprechweise gesagt „unendlich“ genau. a^x lässt sich dann zwar nicht exakt etwa in der Form $\sqrt[q]{a^p}$ angeben, jedoch so genau man immer nur will.
$f(x) = a^x$ ist somit für alle $a > 0$ und $x \in \mathbf{R}$ mit beliebiger Genauigkeit festgelegt. Jetzt hat man ein Mittel um den Graphen zu zeichnen. Bild 2 in Abb. 10.34 zeigt Beispiele solcher Graphen für $a > 1$, $a = 1$ und $a < 1$ $(a > 0)$. Damit ist die **Exponentialfunktion heuristisch in R definiert**[12].
Wichtig ist die *Eulersche Exponentialfunktion* $f(x) = e^x$. e ist die *Eulersche Zahl*. e ist *transzendent*. Es gilt:

$$e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995\ldots$$

Rechenregeln

Für das Rechnen mit Potenzen mit positiven Basen und rationalen Exponenten gelten bekanntlich die folgenden Rechenregeln, die man durch Grenzprozesse resp. durch Annäherung mit rationalen Exponenten auch für nichtrationale, aber reelle Exponenten beweisen kann:

Satz 10.9 (Arithmetik–Eigenschaften von Potenzen) : *Es sei $n \in \mathbf{Z}$. Dann gilt:*

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \tag{10.4}$$

[12]Die Exponentialfunktiion ist so mit Hilfe der gewonnenen Erfahrung definiert, jedoch nicht mathematisch exakt, da der exakte Grenzwertbegriff hier noch fehlt. Eine einfache exakte Definition kann später mit Hilfe von Potenzreihen oder mit Hilde der Theorie der Differentialgleichungen gegeben werden.

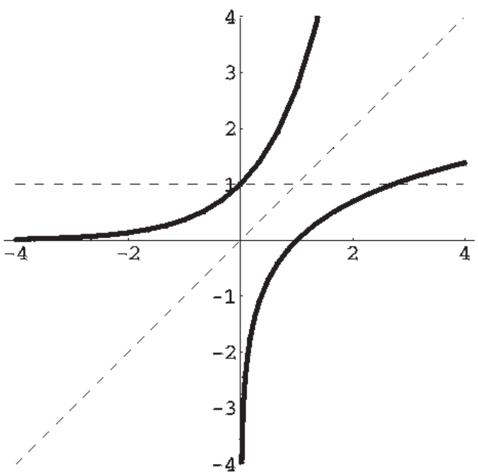
$$
\begin{aligned}
(a^{x_1})^{x_2} &= a^{(x_1 x_2)} && (10.5)\\
a^0 &= 1 && (10.6)\\
a^1 &= a && (10.7)\\
a^{-x} &= \frac{1}{a^x} && (10.8)\\
a^x \cdot b^x &= (a \cdot b)^x && (10.9)\\
& && (10.10)
\end{aligned}
$$

10.2.21 Logarithmusfunktionen

Zur Definition

Sei $a > 1$ und $f(x) = a^x$. Für $x_1 < x_2$, also für $x_2 = x_1 + d$ mit $d > 0$ gilt $f(x_2) = a^{x_2} = a^{x_1+d} = a^{x_1} \cdot a^d$. a^d kann immer durch Ausdrücke der Form $(a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ angenähert werden mit $p > 0$ und $q > 0$. Für $a > 1$ ist $a^p > 1$ und daher auch die Wurzel daraus grösser 1, d.h. $\sqrt[q]{a^p} > 1$. Somit ist $f(x_2) = a^{x_2} = a^{x_1+d} = a^{x_1} \cdot a^d > a^{x_1} = f(x_1)$, also $f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$. Der Graph wächst also ständig, wenn x immer grösser gemacht wird. Somit hat eine Gleichung der Form $a^x = y$ immer höchstens nur eine Lösung x. Zu einem y existieren also nie zwei oder mehrere x mit $f(x) = a^x = y$. Daher ist die Exponentialfunktion *injektiv*, wenn die Basis $a > 1$ ist.
Falls $a < 1$ ist, hat man $b = \frac{1}{a} > 1$ und damit für $x_2 > x_1$ wie eben erwiesen $b^{x_2} > b^{x_1} > 0$, also $\frac{1}{b^{x\pm 2}} < \frac{1}{b^{x\pm 1}}$. Das bedeutet $a^{x_2} < a^{x_1}$. Die Funktion fällt daher immer mit wachsendem x, ist also auch *injektiv* wie bei $a > 1$.
Injektive Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich und Wertebereich bijektiv, denn sie sind trivialerweise dort surjektiv. Somit existiert die Umkehrfunktion! Für $f(x) = a^x$ mit $a \neq 1$ und $a > 0$ sieht man sofort, dass der Definitionsbereich ganz $\mathbf{R}$ umfasst und als Werte alle positiven reellen Zahlen in Frage kommen, denn zu einem gegebenen $x > 0$ lässt sich immer ein x finden, das die Gleichung $a^x = y$ erfüllt. Das wird sofort plausibel, wenn man den Graphen betrachtet. Daher ist $D_f = \mathbf{R}$ und $W_f = \mathbf{R}^+$. Auf $\mathbf{R}^+$ existiert daher die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion. Diese heisst bekanntlich *Logarithmusfunktion zur Basis a*. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist in Abb. 10.35 dargestellt.

Abbildung 10.35: Beispiel einer Logarithmusfunktion



Definition 10.24 (Logarithmus zur Basis $a > 0$) :
Die Umkehrfunktion von $f(x) = a^x$ heisst **Logarithmusfunktion zu Basis a***:*

$$f^{-1}(x) = \log_a(x).$$

In der Literatur werden die Symbole für den Logarithmus je nach Autor verschieden verwendet. Wir wollen uns an die folgenden Abmachungen halten:

Symbole 2 (Logarithmus) *:*

- $\ln(x)$*: Logarithmus naturalis von x, Logarithmus zur Basis e (Eulersche Zahl).*
- *Log*(x)*: Logarithmus von zur Basis* 10 *(10–er Logarithmus).*
- $\log(x)$*: In der Literatur manchmal zur Basis e, manchmal zur Basis* 10*. Soll hier der Klarheit wegen nicht verwendet werden.*

Rechenregeln

Wichtig für den Umgang mit Logarithmen sind die Kenntnisse gewisser Eigenschaften. Einige davon sollen nachher bewiesen werden:

Satz 10.10 (Eigenschaften des Logarithmus) *:*

1. *Existenz:* $log_a(x)$ *existiert im Reellen für* $a > 0$ *und* $x > 0$ *immer.*
2. *Identität:* $x = \log_a(a^x) = a^{log_a(x)}$ *(*log *hat die Bedeutung des Exponenten.)*
3. *Null, eins:* $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.
4. *Addition:* $\log_a(x_1) + \log_a(x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2)$.
5. *Multiplikation:* $n \cdot \log_a(x) = \log_a(x^n)$.
6. *Basiswechsel:* $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

Zu den **Herleitungen dieser Eigenschaften**:

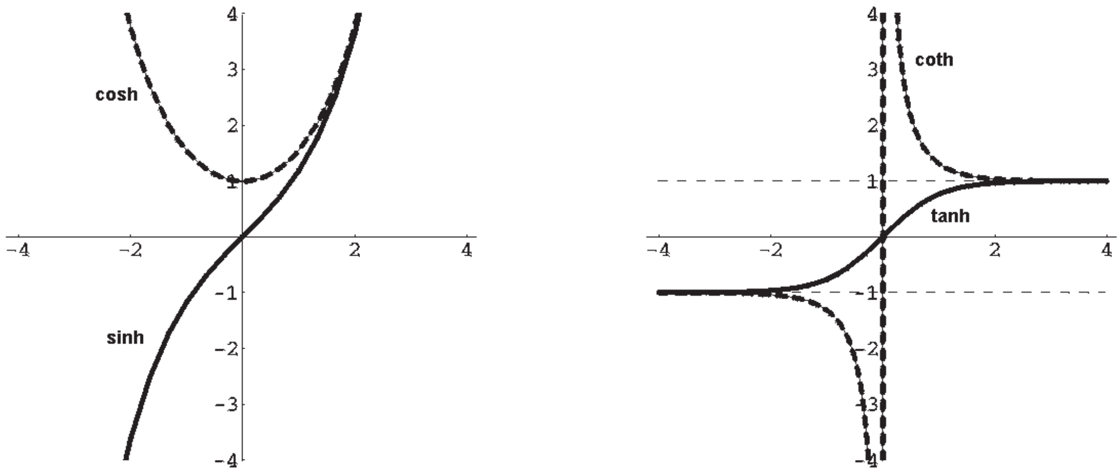
1. *Existenz*: Folgt daraus, dass $\log_a(x)$ die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion a^x ist.
2. *Identität*: Man hat $x \xmapsto{f(x)=a^x} a^x = y$, $y \xmapsto{f^{-1}(y)=\log_a(x)} \log_a(y) = x$ oder zusammengeschrieben
$$\begin{array}{rcl} x & \xmapsto{f(x)=a^x} & a^x = y \\ x = \log_a(y) & \longleftarrow\!\! | & y \end{array}$$
Daraus kann man die behaupteten Beziehungen ablesen.
3. *Null, eins*: Es ist $1 \xmapsto{f(x)=a^x} a^1 = a$ und $0 \xmapsto{f(x)=a^x} a^0 = 1$. Durch Umkehrung der Abbildungen folgen die Behauptungen.
4. *Addition*:
$$\begin{array}{rcl} \log_a(y_1) = x_1 & \longmapsto & a^{x_1} = y_1 \\ \log_a(y_2) = x_2 & \longmapsto & a^{x_2} = y_2 \\ x_1 + x_2 & \longmapsto & a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot y_1 \cdot a^{x_2} = y_2 \\ x_1 + x_2 = \log_a y_1 \cdot y_2 & \longleftarrow\!\! | & y_1 \cdot y_2 \end{array}$$
Daher ist $\log_a(y_1) + \log_a(y_2) = x_1 + x_2 = \log_a y_1 \cdot y_2$. Die Behauptung erfolgt durch Variablenwechsel.
5. *Multiplikation*: Die Behauptung ist sofort klar, wenn man beachtet, dass eine Multiplikation mit einer natürlichen Zahl nur eine mehrfache Addition von gleichen Summanden ist.

6. *Basiswechsel*: Aus $x = a^{\log_a(x)} = b^{\log_b(x)}$ und speziell $b = a^{\log_a(b)}$ folgt $x = a^{\log_a(x)} = (a^{\log_a(b)})^{(\log_b(x))} = a^{\log_a(b)\cdot\log_b(x)}$. Da die Funktion $f(x) = a^x$ $(a > 0, \neq 1)$ injektiv ist, stimmen in der letzten Gleichung die Exponenten links und rechts überein. Daher ist $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$. Daraus folgt die Behauptung.

Wegen der Möglichkeit des Basiswechsels genügt es, numerisch eine einzige Logarithmusfunktion (z.B. ln) zu kennen.

10.2.22 Hyperbolische Funktionen

Abbildung 10.36: Hyperbolische Funktionen



Die hyperbolische Funktionen (vgl. Abb. 10.36) definiert man folgendermassen:

Definition 10.25 (Hyperbolische Funktionen) *:*

$$\begin{array}{rclll}
\sinh(x) & = & sh(x) & := \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \textit{(Sinus hyperbolicus)} \\
\cosh(x) & = & ch(x) & := \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \textit{(Cosinus hyperbolicus)} \\
\tanh(x) & = & th(x) & := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} & \textit{(Tangens hyperbolicus)} \\
\coth(x) & = & cth(x) & := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} & \textit{(Cotangens hyperbolicus)}
\end{array}$$

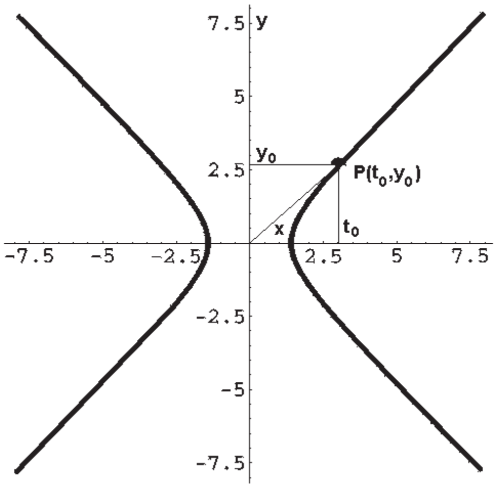
Bemerkung: Diese Funktionen sind demnach sauber mit Hilfe der Exponentialfunktion definiert. Ersetzt man in der Definition des $\cosh(x)$ die Variable x durch den komplexen Ausdruck ix, so erhält man eine saubere Definition des *trigonometrischen Cosinus*. Den Sinus kann man auf ähnliche Weise gewinnen, wobei man dazu im Nenner statt 2 neu $2i$ setzen muss. (tan und cot sind als Quotienten von sin und cos dann auch auf die Exponentialfunktion zurückgeführt.) Alles hängt dann an der komplexen Exponentialfunktion.

Satz 10.11 (Hyperbelgleichung) *:* sinh *und* cosh *erfüllen die Gleichung:*

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Die Gleichung der *Normalhyperbel* (vgl.Abb. 10.37) lautet bekanntlich $x^2 - y^2 = 1$. Schreibt man statt x dann $\cosh(x)$ und statt y neu $\sinh(x)$ und darin $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ resp $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, dann fallen nach dem Ausquadrieren bei der Subtraktion alle Glieder bis auf die gemischten weg. Es bleibt dann nur nach $\frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} = e^0 = 1$

Abbildung 10.37: Normalhyperbel



10.2.23 Areafunktionen

Aus Abb. 10.36 ersieht man, dass sich der cosh auf der nicht–negativen reellen Achse umkehren läst. sinh, tanh und coth lassen sich dagegen überall umkehren. Auf diesen Bereichen definiert man die Umkehrfunktionen wie folgt:

Definition 10.26 (Areafunktionen) *:*

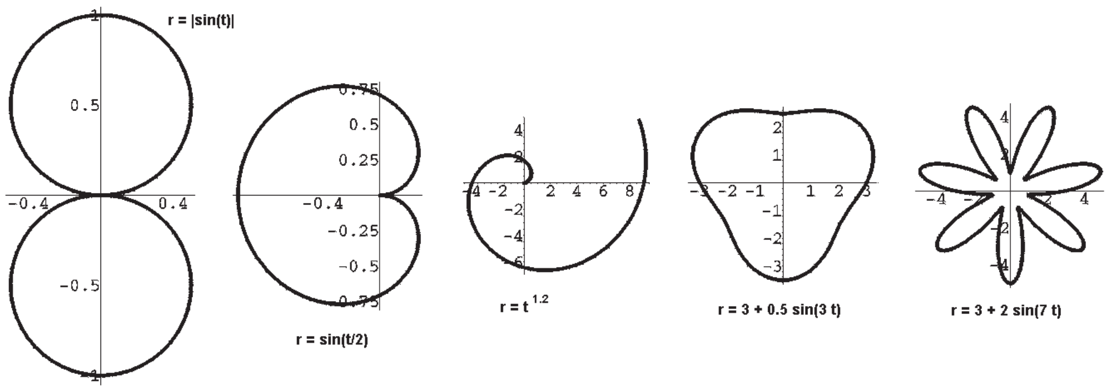
- ⊘ *Die Umkehrfunktion von* $\sinh(x)$ *heisst* **arsinh (Areasinus hyperbolicus)***.*
- ⊘ *Die Umkehrfunktion von* $\cosh(x)$ *heisst entsprechend* **arcosh***.*
- ⊘ *Die des* $\tanh(x)$ *entsprechend* **artanh***.*
- ⊘ *Die des* $\coth(x)$ *entsprechend* **arcoth***.*

Bedeutung des Parameters x**:** In Abb. 10.37 ist die Normalhyperbel dargestellt. Dann ist $t_0 = \cosh(x)$, $y_0 = \sinh(x)$, wobei x den dunkel gezeichneten Flächeninhalt bedeutet. Um das zu zeigen, bedarf es einer Methode um den Flächeninhalt rechnerisch zu erfassen. Diese Methode wird erst die *Integralrechnung* bieten. Jetzt kann der Zusammenhang noch nicht gezeigt werden.

10.2.24 Funktionen in Polarkoordinaten

Wie wir früher schon gesehen haben, lassen sich Funktionen oft bequemer in andern als in kartesischen Koordinatensystemen darstellen. Oft gebräuchlich sind bekanntlich die Polarkoorsinaten (Radius $r = r(\varphi)$, φ ist der Winkel). In Abb. 10.38 sind einige Beispiele von Darstellungen von Funktionen in Polarkoordinaten wiedergegeben.

Abbildung 10.38: Beispiele von Darstellungen von Funktionen in Polarkoordinaten



10.2.25 Einteilung der reellen Funktionen

$$\begin{array}{ccc}
\textit{Reelle Funktionen} & \rightarrow & \textit{Transzendente Funktionen} \\
\downarrow & & \\
\textit{Algebraische Funktionen} & \rightarrow & \textit{Algebraisch–irrationale Funktionen} \\
\downarrow & & \\
\textit{Rationale Funktionen} & \rightarrow & \textit{Gebrochen rationale Funktionen} \\
\downarrow & & \\
\textit{Ganz rationale Funktionen} & &
\end{array}$$

Transzendent sind z.B. die trigonometrischen Funktionen, algebraisch–irrational die Wurzelfunktionen, ganz rational die Polynomfunktionen und gebrochen rational Quotienten von zwei Polynomfunktionen.

10.2.26 Verkettete Funktionen

In Teil 3 ist gezeigt worden, dass man aus zwei Funktionen f und g die *zusammengesetzte Funktion* $\varphi = g \circ f$ konstruieren kann, wenn $W_f \subset D_g$ gilt. Die zusammengesetzte Funktion φ bildet die Menge $A = D_f$ direkt in die Menge $C = W_g$ ab:

$$\varphi : A \longmapsto C \quad \text{oder} \quad c = \varphi(a) = g(f(a)) \; \textit{oder}$$

$$\underbrace{a \xmapsto{f} b \xmapsto{g} c}_{\xmapsto{\varphi}}$$

Allgemein ist bekanntlich $g(f(x)) \neq f(g(x))$.

Beispiel: Seien $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 4x - 3$. Dann ist $f(g(x)) = (4x - 3)^2 + 2(4x - 3) + 1 = 16x^2 - 16x + 4$ und $g(f(x)) = 4(x^2 + 2x + 1) - 3 = 4x^2 + 8x + 1$. Die Ausdrücke sind demnach verschieden.

10.2.27 Implizit definierte Funktionen

Sei z.B. $f(x) = +\sqrt{x} = y$. Dann ist $y^2 = x$ und daher $y^2 - x \equiv 0$ für alle x und y, die die Gleichung $+\sqrt{x} = y$ erfüllen. Umgekehrt folgt aus $y^2 = x$ jedoch $\pm\sqrt{x} = y$, man hat also noch die negative Lösunge dabei, die anfangs nicht da war. Durch die Gleichung $F(x, y) = y^2 - x \equiv 0$ sind nun zwei verschiedene Funktionen definiert, nämlich $f(x) = +\sqrt{x} = f_1(x)$ und auch $f_2(x) = -\sqrt{x}$. Wir benutzen hier die folgende Sprechweise:

Vereinbarung 1 *: Eine Funktion, die durch eine Vorschrift wie z.B.* $f(x) = +\sqrt{x} = y$ *definiert ist, nennen wir* **explizit definiert***, eine solche, die durch eine Vorschrift wie z.B.* $F(x, y) = y^2 - x \equiv 0$ *definiert ist* **implizit definiert***.*

Implizit definierte Funktionen sind schwieriger zu handhaben als explizit definierte. Schon die Aufzeichnung des Graphen kann rasch etliche Mühen bereiten. Betrachten wir z.B. die implizit definierte Funktion $F(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + x^2y - 2x^2 + 3y^2 - 4xy + x - y + 3 \equiv 0$, so können wir versuchen eine Wertetabelle zu erstellen, indem wir zu einigen festgehaltenen x–Werten die jeweils zugehörigen y–Werte berechen. Doch das führt auf Gleichungen 3–ten Grades. Ist z.B. $x = 1$, so hat man die Gleichung $y^2 - y^3 + y - 2 + 3y^2 - 4y + 1 - y + 3 = 0$ zu lösen. Um serienweise solche Gleichungen numerisch zu behandeln, ist eine Maschine notwendig, sonst richtet man nicht viel aus. Allgemein hat eine solche Gleichung mehrere Lösungen, sodass man mehrere Kurven erhält resp. mehrere Funktionen $y = f(x)$ im Sinne der *Rechtseindeutigkeit*. (Funktionen sind bekanntlich linkstotale und rechtseindeutige Relationen.) Das Resultat des Graphen ist aus Abb. 10.39, Bild 1 ersichtlich.

Abbildung 10.39: Implizit definierte Funktionen

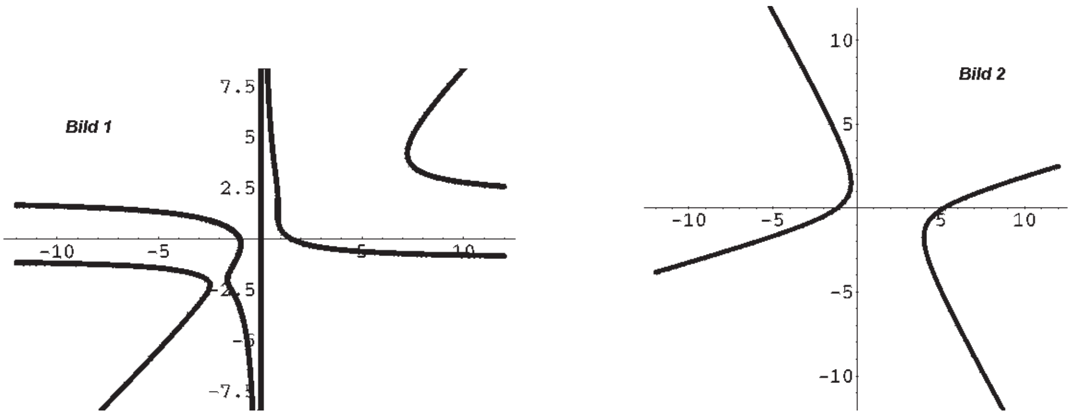


Abb. 10.39, Bild 2, zeigt die implizit definierte Funktion $F(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^2 - 4x + 5y - 6 = 0$, also eine verschobene und gedrehte Hyperbel. (Bei *Kurven 2. Ordnung*, bei deren Gleichung höchstens Potenzen 2. Grades vorkommen, handelt es sich immer um *Kegelschnitte*, d.h. um *Parabel*, *Ellipsen* (*Kreise* eingeschlossen) oder *Hyperbeln*.)

10.2.28 Konstruktion einer Funktionen durch n gegebene Messpunkte

In der Praxis kann das Problem auftauchen, dass man durch eine Anzahl gegebener Messpunkte eine Polynomkurve legen muss, auf der die gegebenen Punkte exakt liegen. Es werde z.B. am Punkte $x = 1$ der Wert $y = y_1$ gemessen, am Punkte $x = 2$ der Wert $y = y_2$ ... und am Punkte $x = n$ der Wert $y = y_n$. Durch n derart gegebene Punkte kann man ein Polynom $n - 1$–ten Grades $p(x) = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1x + a_0$ legen, denn durch die n Messpunkte sind n lineare Gleichungen gegeben, aus denen man die n unbekannten Koeffizienten $a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_0$ von $p(x)$ berechnen kann.

Beispiel:
Sei $n = 15$. Die Messpunkte seinen:

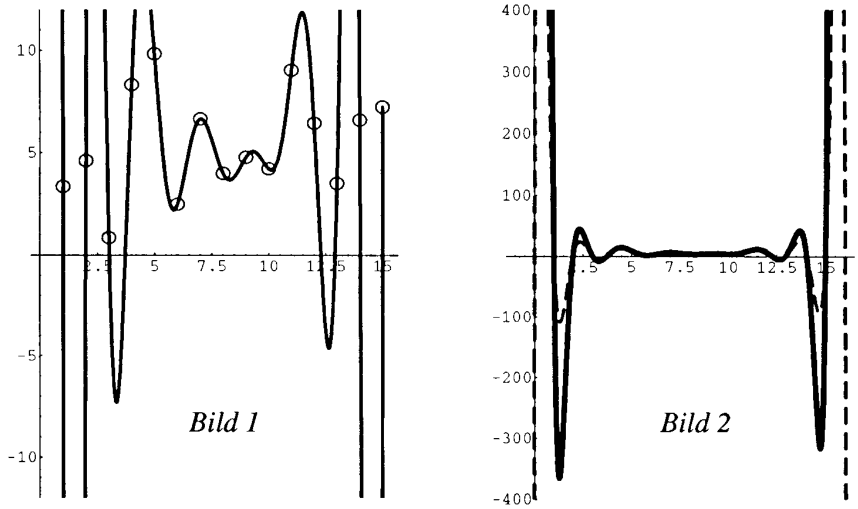
$$\{ \begin{array}{ccccc} (1.0, 3.361) & (2.0, 4.611) & (3.0, 0.856) & (4.0, 8.316) & (5.0, 9.833 \\ (6.0, 2.499) & (7.0, 6.662) & (8.0, 4.002) & (9.0, 4.782) & (10.0, 4.229) \\ (11.0, 9.033) & (12.0, 6.457) & (13.0, 3.518) & (14.0, 6.611) & (15.0, 7.239) \end{array} \}$$

Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 1^{15} + a_{14}1^{14} + a_{13}1^{13} + a_{12}1^{12} + \ldots + a_1 1 + a_0 & = & 3.361 \\ 2^{15} + a_{14}2^{14} + a_{13}2^{13} + a_{12}2^{12} + \ldots + a_1 2 + a_0 & = & 4.611 \\ & \vdots & \\ 15^{15} + a_{14}15^{14} + a_{13}15^{13} + a_{12}15^{12} + \ldots + a_1 15 + a_0 & = & 7.239 \end{array}$$

Man hat daher 15 Gleichungen für die 15 Koeffizienten a_{14} bis a_0. Die Kurve durch die gegebenen Punkte sind in Abb 10.40, Bild 1, gezeichnet. Das berechnete Polynom lautet: $p(x) = 43652.3 - 138734.\,x + 186357.\,x^2 - 142597.\,x^3 + 70259.\,x^4 - 23788.4\,x^5 + 5747.32\,x^6 - 1012.19\,x^7 + 131.181\,x^8 - 12.4978\,x^9 + 0.864413\,x^{10} - 0.0422055\,x^{11} + 0.00137843\,x^{12} - 0.0000270108\,x^{13} + 2.40021\,10^{-7}\,x^{14}$

Abbildung 10.40: Polynomkurve durch gegebene Punkte



Es fällt sofort auf, dass die Kurve man den Intervallenden sicht mehr so schön „angepasst“ ist wie in der Mitte. Dem kann man abhelfen, indem man links und rechts noch weitere „künstliche“ Messpunkte dazunimmt, so dass sich die Ausschläge der Kurve weiter nach aussen verschieben. Z.B. kann man im Beispiel die Punkte $(0, 5.467)$ und $(16, 5.467)$ dazunehmen. 5.467 ist der Mittelwert der y–Werte der Messpunkte. Das so „vervesserte“ Resultat ersieht man aus Abb 10.40, Bild 2 (gestrichelte Kurve).

10.2.29 Anzahlfunktionen

Oft hat man in der Praxis Probleme folgender Art: Auf wieviele verschiedene Arten kann man im Lotto einen 1–er, 2–er, 3–er etc. haben? Oder — auf wieviele Arten kann man 10 Studenten auf 10 Stühle setzen, 11 Studenten auf 11 Stühle, 12 Studenten auf 12 Stühle etc. Im letzten Fall sucht man also eine Anzahl $Anz(12) = f(12)$[13], im vorletzten Fall eine Anzahl $Anz(11) = f(11)$ etc.. Allgemein sucht man offenbar immer eine Anzahl $Anz(x) = f(x)$, die zu einer natürlichen Zahl x gehört. Daher hat man eine Funktion auf dem Definitionsbereich $D_f = \mathbf{N}$ mit dem Wertebereich $W_f \subseteq \mathbf{N}$. Solche Funktionen nennen wir *Anzahlfunktionen*. Eine eingehendere Behandlung gewisser Typen solcher Funktionen erfolgt im Teil 6, *Kombinatorik*.

10.2.30 Logische Funktionen

Solche Funktionen haben wir in Teil 2, d.h. in der Aussagenlogik, angetroffen. Z.B. sei die Aussageform resp. Aussagefunktion $f(X_1, X_2, X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2) \Longrightarrow (X_2 \vee X_3)$ gegeben. Offensichtlich ist der Defini-

[13] *Anz* ist der Funktionsname.

tionsbereich die Produktmente $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} = \{0,1\}^3 = \{\{0,0,0\},\{0,0,1\},\ldots,\{1,1,1\}\}$ der Wahrheitsmenge $\{0,1\}$. Der Wertebereich ist natürlich die Wahrheitsmenge $\{0,1\}$. Man verifiziert leicht, dass der Funktionswert bei beliebiger Wahl eines Elementes aus dem Definitionsbereich immer 1 ist. Es handelt sich somit um eine Tautologie. Weitere Beispiele finden sich in Teil 2.

10.3 Übungen

Übungen finden sich in *DIYMU , vom Autor (Bibl.: wirz1) sowie in der klassischen Schulbuchliteratur für Berufsschulen und die Gymnasialstufe.*

Kapitel • Chapitre 11

Gleichungen

11.1 Allgemeines, Grundlagen

11.1.1 Definitionen

Bei einem grossen Teil der praktischen Probleme, die mit Mathematik zu tun haben, handelt es sich um Gleichungen über dem Grundbereich (Menge) der reellen oder komplexen Zahlen. Wir wollen hier in einem Überblick zusammenfassen, was auf dieser Stufe allgemein bekannt sein muss:

Begriffserklärung 3 *Eine* **Variable** *ist ein Zeichen für einen Platzhalter oder eine Leerstelle, die verschiedene Werte aus dem Grundbereich aufnehmen kann.*
Eine **Konstante** *ist ein Zeichen für ein festes Element aus dem Grundbereich.*
Ein **algebraischer Term** *ist ein algebraischer Ausdruck mit Variablen und Konstanten. Er besteht aus einer sinnvollen Zeichenfolge mit Buchstaben, Zahlen und Rechenzeichen (hier* $+, \cdot, :, \sqrt{}$ *etc.).*

Ein algebraischer Term hat einen *Definitionsbereich. Z.B.* $T(x) = \sqrt{3-x}$, $D_T = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 3\}$.

Definition 11.1 (Gleichungen) *:*

- ⊘ *Eine* **algebraische Gleichung** *ist eine Verbindung von zwei algebraischen Termen durch das Gleichheitszeichen, z.B.* $T_1 = T_2$.
- ⊘ *Der* **Definitionsbereich** *der Gleichung* $T_1 = T_2$ *ist die Schnittmenge* $D_{T_1} \cap D_{T_2}$.
- ⊘ *Eine* **transzendente Gleichung** *enthält im Gegensatz zur algebraischen Gleichung noch transzendente Ausdrücke wie z.B.* $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$, *die sich nicht einfach durch Substitution eliminieren lassen.*
- ⊘ *Bei einer* **identischen Gleichung** *ist der Term links einfach eine Umformung des Terms rechts, z.B.* $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
- ⊘ *Eine* **Funktionsgleichung** *ist eine Gleichung, die die Bildugsvorschrift des Funktionswerts erklärt, z.B.* $f(x) = \sin(x) + x^2 - 1$.
- ⊘ *Eine* **Bestimmungsgleichung** *ist eine Gleichung, die nur für ganz bestimmte Werte der Variablen erfüllt ist, z.B.* $x^2 - 3 = -2x^2 + 9$. *Da die in die Variablen einzusetzenden Werte, für die die Gleichung richtig ist, vorerst unbekannt sind, nennt man die Variablen im Sinne der genannten Werte auch* **Unbekannte**. *Diejenigen Werte, die die Gleichung bei Einsetzung in die Variablen in eine wahre Aussage verwandeln, heissen* **Lösungen** *der Gleichung.*

⊘ *Zwei Gleichungen heissen bezüglich eines gegebenen Grundbereichs* **äquivalent**, *wenn sie dieselbe* **Lösungsmenge** *haben. Umformungen, die die Lösungsmenge einer Gleichung unverändert lassen, heissen* **Äquivalenzumformungen**.

Achtung! *Nicht jede algebraische Umformung ist eine Äquivalenzumformung. Z.B. folgt aus $x = -x$ durch Quadrieren $x^2 = x^2$. Bei der ersten Gleichung ist $\{0\}$ die Lösungsmenge, bei der zweiten Gleichung ist jede Zahl Lösung...*

11.1.2 Ganz rationale Gleichungen

In einer algebraischen Gleichung werden auf die Unbekannten nur die sechs rationalen Rechenoperationen angewandt (Addieren bis Radizieren). Gelingt es noch, auf einfache Art durch Potenzieren die Wurzeln wegzuschaffen, so erhält man eine **ganz rationale Gleichung**. *Wir betrachten nun eine solche Gleichung mit nur einer Variablen x. Ordnet man die Terme einer solchen Gleichung der Grösse der Potenzen von x nach, so erhält man nach einer eventuellen Äquivalenzumformung einen Ausdruck der Form:*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + +a_1x^1 + a_0 = 0$$

Definition 11.2 (Grad einer Gleichung) *Die höchste Potenz von x gibt den* **Grad** *der Gleichung an. Die eben gezeigte Darstellung heisst* **Normalform der Gleichung n–ten Grades**.

Wenn man die komplezen Zahlen **C** *eingeführt hat so kann man zeigen, dass die obige Gleichung in* **C** *genau n Lösungen besitzt. Diese Lösungen können dabei mehrfach auftreten und die Koeffizienten a_i dürfen auch komplex sein. (Hauptsatz der Algebra)*[1].

Seien x_1 und x_2 Lösungen einer Gleichung 2–ten Grades $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$.
Die Gleichung $a_2(x - x_1)(x - x_2) = a_2x^2 + a_2(-x_1 - x_2)x + a_2x_1x_2 = 0$ hat ebenfalls die Lösungen x_1 und x_2. Diese Gleichung muss also aus der ersten durch eine Äquivalenzumformung hervorgegangen sein. Da zwei äquivalente, variablenweise gleich geordneten Gleichungen bis auf einen Erweiterungsfaktor elementweise übereinstimmen müssen und hier bei beiden Gleichungen der erste **Koeffizient** *a_2 ist, müssen die restlichen Koeffizienten auch gleich sein: $a_1 = a_2(-x_1 - x_2)$ und $a_0 = a_2x_1x_2$. Die hier angewandte Methode nennt man die Methode des* **Koeffizientenvergleichs**. *Das führt auf einen bekannten Satz:*

Satz 11.1 (von Vieta) [2]*:*
Vor: *Gegeben sei die Gleichung $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ mit den Lösungen x_1 und x_2.*
Beh.: $a_2(x_1 + x_2) = -a_1$ *und* $a_2x_1x_2 = a_0$.

Dieser Satz lässt sich mit Hilfe des Hauptsatzes der Algebra für einen beliebig grossen Grad ausdehnen (vgl. Teil über komplexe Zahlen).
Bezüglich der Lösungstricks einer Anzahl von Gleichungstypen (kubische Gleichung, Gleichung 4–ten Grades, gebrochen rationale Gleichung, irrationale und transzendente Gleichungen) sei auf die Literatur verwiesen. (Z.B. Leupold, (Bibl.: leupold).)

11.1.3 Bemerkungen zu Ungleichungen

Definition 11.3 (Ungleichungen) *Ersetzt man bei einer Gleichung das Gleichheitszeichen $=$ durch eines der Zeichen $\leq, <, \geq, >, \neq$, so heist das entstehende Gebilde* **Ungleichung**.

Die benutzten Zeichen können auf dieser Stufe als bekannt vorausgesetzt werden. Bei Ungleichungen mit einer Unbekannten sind die Lösungsmengen meistens Intervalle oder Vereinigungen von solchen. Im Unterschied zu Gleichungen muss man das Ungleichheitszeichen $(\leq, <, \geq, >)$ beim Vertauschen der beiden

[1] Vgl. komplexe Zahlen
[2] 1540 – 1603

Seiten umkehren, z.B. $a > b \iff b < a$*. Auch bei den Ähnlichkeitsumformungen gelten Einschränkungen: Beim Multiplizieren einer Ungleichung mit negativen Werten muss man das Zeichen ebenfalls kehren.*

Beispiel:
$-|x+2| > -3$ *führt zuerst auf* $|x+2| < 3$*. Löst man den Betrag auf, so erhält man* $-3 < x+2 < 3$*, also zwei Ungleichungen mit den beiden Lösungen* $-5 < x$ *und* $x < 1$*, zusammen im Schnitt also das offene Intervall* $(-5, 1)$*.*

11.2 Übungen

Übungen finden sich in DIYMU, vom Autor (Bibl.: wirz1) sowie in der klassischen Schulbuchliteratur für Berufsschulen und die Gymnasialstufe.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] *Fachlexikon abc der Mathematik. Verlag Harri Deutsch (Bibl.: abc)*

[2] *Ansorge, Oberle. Mathematik für Ingenieure Bd. 1 u. 2. Akademie Verlag Berlin (Bibl.: ansorge)*

[3] *Bachmann. Vektorgeometrie, Ausgabe A. SABE-Verlag (Bibl.: bachmann)*

[4] *Bartsch. Taschenbuch mathematischer Formeln. Verlag Harri Deutsch (Bibl.: bartsch)*

[5] *Berendt, Weimar. Mathematik für Physiker, Bd. 1, 2. VCH-Verlag (Bibl.: berendt)*

[6] *Blachman. Mathematica: A Practical Approach. Prentice Hill Series in Innovative Technology (Bibl.: blachman1)*

[7] *Blachman. Mathematica griffbereit, deutsche Fassung von „Mathematica Quick Reference“. Vieweg-Verlag (Bibl.: blachman2)*

[8] *Brauch, Dreyer, Haacke. Mathematik für Ingenieure. Teubner-Verlag (Bibl.: brauch)*

[9] *Brenner, Lesky. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Bd. I-IV. Studien-Texte AULA-Verlag (Bibl.: brenner)*

[10] *Bronstein. Semendjajew. Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch (neue Auflage mit Mathematica) (Bibl.: bronstein)*

[11] *Burg, Haf, Wille. Höhere Mathematik für Ingenieure Bd. I-V. Teubner-Verlag (Bibl.: burg)*

[12] *Buzan. Kopftraining. Goldmann 10926 (Bibl.: buzan1)*

[13] *Buzan. Nicht vergessen. Goldmann 10385 (Bibl.: buzan2)*

[14] *Dahmer. Effektives Lernen Schattauer Verlag Stuttgart (Bibl.: dahmer1)*

[15] *DMK/ PPK. Formeln und Tafeln. Orell Füssli-Verlag (Bibl.: dmk)*

[16] *Dörfler, Peschek. Mathematik für Informatiker (Bibl.: dorfler) Hanser-Verlag*

[17] *dtv-Atlas zur Mathematik. Bd.1, 2. dtv-Verlag (Bibl.: dtv)*

[18] *Fetzer, Fränkel. Mathematik, ein Lehrbuch für Fachhochschulen, Bd. 1 u. 2. DVI–Verlag Düsseldorf (Bibl.: fetzer)*

[19] *Finkenstein. Grundkurs Mathematik für Ingenieure. Teubner-Verlag (Bibl.: finkenstein)*

[20] *Fischer Taschenlexikon der Mathematik. Fischer-Verlag (Bibl.: fischer)*

[21] *Frick, Mosimann. Lernen ist lernbar. Sauerländer (Bibl.: frick1)*

[22] *Gellrich. Mathematik für Fachhochschulen, Bd. 1, 2, 3. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: gellrich1)*

[23] *Gellrich. Einführung in die mathematischen Methoden für Wirtschaftsinformatiker. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: gellrich2)*

[24] *Grosses Handbuch der Mathematik. Buch und Zeit-Verlag Köln (Bibl.: handbuch)*

[25] *Heinrich, Janetzko. Mathematica-Arbeitsbuch. Vieweg-Verlag (Bibl.: heinrich)*

[26] *Hülshoff, Kaldeway. Training rationeller lernen und arbeiten, Klett-Verlag (Bibl.: hulshoff)*

[27] *Kaufmann. Mathematica als Werkzeug. Birkhäuser-Verlag (Bibl.: kaufmann)*

[28] *Kirckhoff. Mind Mapping. GABAL Verlag Bremen (Bibl.: kirckhoff1)*

[29] *Kugemann. Kopfarbeit mit Köpfchen. Pfeiffer-Verlag (Bibl.: kugemann)*

[30] *Kuipers, Timman. Handbuch der Mathematik. Verlag Walter de Gruyter (Bibl.: kuipers)*

[31] *Leitner. So lernt man lernen. Herder-Verlag (Bibl.: leitner)*

[32] *Leupold u.a.. Mathematik, ein Studienbuch für Ingenieure. Fachbuchverlag Leipzig – Köln (Bibl.: leupold)*

[33] *H. Malle. Mathematik für Techniker, Bd. 1, 2. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: malle)*

[34] *Meschkowski. Mathematisches Begriffswöterbuch. BI Mannheim (Bibl.: meschkowski)*

[35] *Meyberg, Vachenauer. Höhere Mathematik Bd. 1, 2. Springer-Verlag (Bibl.: meyberg)*

[36] *Meyers Handbuch über die Mathematik. BI Mannheim (Bibl.: meyers)*

[37] *Papula. Mathematik für Ingenieure Bd. 1, 2, 3,ldots Vieweg-Verlag (Bibl.: papula)*

[38] *Papula. Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschafter. Vieweg-Verlag (Bibl.: papula)*

[39] *Rottmann. Mathematische Formelsammlung. BI Mannheim (Bibl.: rottmann)*

[40] *Schärf. Mathematik Bd. 1, 2, 3, 4 mit separaten Lösungsheften. Oldenburg Verlag Wien (Bibl.: scharf1)*

[41] *Schärf. Darstellende Geometrie Bd. 1, 2, 3. Oldenburg Verlag Wien (Bibl.: scharf2)*

[42] *Reihe SCHAUM, diverse Autoren. Diverse Bände zur Mathematik. Mac Graw Hill-Verlag (Bibl.: schaum)*

[43] *Schräder-Naef. Rationeller Lernen lernen. Beltz–Verlag Weinheim u. Basel (Bibl.: schrader)*

[44] *Schräder-Naef. Keine Zeit? Beltz–Verlag Weinheim u. Basel (Bibl.: schrader1)*

[45] *Metzger. Wie lerne ich? Sauerländer (Bibl.: metzger1)*

[46] *Spiegel. Handbuch der Mathematik. Reihe SCHAUM, Mac Graw Hill-Verlag (Bibl.: spiegel)*

[47] *Stöcker. Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Verlag Harri Deutsch (Bibl.: stocker)*

[48] *Stoyan. Stochastik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Akademie Verlag Berlin (Bibl.: stoyan)*

[49] *Swobowski. Calculus (englisch und französisch). pws–Publ (Bibl.: swobowski)*

[50] *Treppenwein. Die Kunst mühelosen Lernens. Ariston-Verlag (Bibl.: treppenwein)*

[51] *Truniger. Prüfungstips. Beratungsstelle für Studierende der Universität Bern (Bibl.: truniger1)*

[52] Vester. Denken, lernen, vergessen. dtv 1327 (Bibl.:)

[53] J. Wendeler. Vorkurs der Ingenieurmathematik. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: vester)

[54] Vom Autor. DIYMU (Do it yourself Mathematik Übungsbuch). Ingenieurschule Biel 1991 (Bibl.: wirz)

[55] Vom Autor. Kleine Einführung in Mathematica. Ingenieurschule Biel 1994 (Bibl.: wirz1)

[56] Wolfram. Mathematica. Addison-Wesley Publishing Company (Bibl.: wolfram)

[57] Ansorge, Oberle. Mathematik für Ingenieure Bd. 1 u. 2. Akademie Verlag Berlin (Bibl.: ansorge)

[58] Bartsch. Taschenbuch mathematischer Formeln. Verlag Harri Deutsch (Bibl.: bartsch)

[59] Berendt, Weimar. Mathematik für Physiker, Bd. 1, 2. VCH-Verlag (Bibl.: berendt)

[60] Blachman. Mathematica: A Practical Approach. Prentice Hill Series in Innovative Technology (Bibl.: blachman1)

[61] Brauch, Dreyer, Haacke. Mathematik für Ingenieure. Teubner-Verlag (Bibl.: brauch)

[62] Bronstein. Semendjajew. Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch (neue Auflage mit Mathematica) (Bibl.: bronstein)

[63] DMK/ PPK. Formeln und Tafeln. Orell Füssli-Verlag (Bibl.: dmk)

[64] Dörfler, Peschek. Mathematik für Informatiker. Hanser-Verlag (Bibl.: dorfler)

[65] Fetzer, Fränkel. Mathematik, ein Lehrbuch für Fachhochschulen, Bd. 1 u. 2. DVI–Verlag Düsseldorf (Bibl.: fetzer)

[66] Gellrich. Mathematik für Fachhochschulen, Bd. 1, 2, 3. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: gellrich1)

[67] Gellrich. Einführung in die mathematischen Methoden für Wirtschaftsinformatiker. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: gellrich2)

[68] Leupold u.a.. Mathematik, ein Studienbuch für Ingenieure. Fachbuchverlag Leipzig – Köln (Bibl.: leupold)

[69] H. Malle. Mathematik für Techniker, Bd. 1, 2. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: malle)

[70] Papula. Mathematik für Ingenieure Bd. 1, 2, 3. Vieweg-Verlag (Bibl.: papula)

[71] Papula. Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschafter. Vieweg-Verlag (Bibl.: papula)

[72] Rottmann. Mathematische Formelsammlung. BI Mannheim (Bibl.: rottmann)

[73] Schärf. Mathematik Bd. 1, 2, 3, 4 mit separaten Lösungsheften. Oldenburg Verlag Wien (Bibl.: scharf1)

[74] Reihe SCHAUM, diverse Autoren. Diverse Bände zur Mathematik. Mac Graw Hill-Verlag (Bibl.: schaum)

[75] Stöcker. Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Verlag Harri Deutsch (Bibl.: stocker)

[76] Swobowski. Calculus (englisch und französisch). pws–Publ. (Bibl.: swobowski)

[77] J. Wendeler. Vorkurs der Ingenieurmathematik. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: wendeler)

[78] Vom Autor. DIYMU (Do it yourself Mathematik Übungsbuch). Ingenieurschule Biel 1991 (Bibl.: wirz)

[79] Vom Autor. Kleine Einführung in Mathematica. Ingenieurschule Biel 1994 (Bibl.: wirz1)

Nostalgie aus dem DIYMU