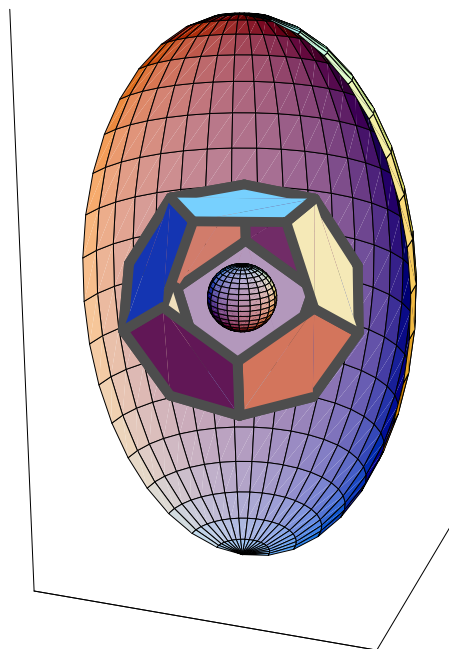


Script \diamond Math \diamond Ing
 \diamond Fortsetzung Mathematik (II) \diamond
 \diamond \diamond
kurz & bündig \diamond



Scripta bilingua

von

Rolf Wirz

Berner Fachhochschule BFH \diamond TI _(HTI) und AHB _(HSB)

Version: V.2.12.46 (V.2.10.81) / 1. April 2012
--

Deutschsprachiget Text

Produziert mit LaTeX/PCTEX auf NeXT/ WIN98.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

Je mathematischer und wirkungsvoller eine Theorie ist, desto unanschaulicher ist sie. Die moderne Wissenschaft erkaufte sich ihre Möglichkeit die Welt zu verändern — oft durch Verzicht auf die Anschaulichkeit der Beschreibung. ...

Fleckenstein

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH-3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html> unter „Koordinaten von R.W.“
Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

©1999/2000/01/02/03/04/05/06/07/08/09/10/11/12

!Draft! Deutsche Version

Gebrauch auf eigene Verantwortung! Dieses Script ist mit L^AT_EX für den doppelsprachigen Unterricht programmiert worden. Dabei wurden alle französischsprachigen Textteile jeweils mit dem Aufruf einer Subroutine verbunden, um den Font Style *Italics* aufzurufen. Diese Subroutine ist hier modifiziert worden um den französischsprachigen Text zu unterdrücken. Titel, Inhaltsverzeichnis und deutschsprachiger Text können so nicht sofort behandelt werden. Es wäre hier auch bei jedem Textstück ein Unterprogramm-Aufruf notwendig, was nur durch eine grössere Arbeit zu erreichen ist. Dafür fehlt im Moment die Zeit.

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

1 Organisatorisches — Quant à l'organisation	1
2 Differentialgleichungen — Equations différentielles	3
2.1 Einführung — Introduction	3
2.2 Lösung bei D'Gl 1. Ordn. — Solutions d'éq'diff d'ordre 1	6
2.2.1 Lösung, Integralkurve — Solution, courbe d'intégrale	6
2.2.2 Linienelement, Richtungsfeld — Élément de ligne, champs de direction	6
2.2.3 Isoklinen — Isoclines	8
2.2.4 Zentrale Fragen — Questions centrales	10
2.3 Anfangswertproblem — Problème de valeur initiale	12
2.3.1 Idee — Idée	12
2.3.2 Verallgemeinerung des Problems — Généralisation du problème	12
2.3.3 Randwertprobleme — Problèmes aux limites	13
2.3.4 Veränderte Problemstellung — Changer le problème	14
2.4 Existenz und Eindeutigkeit — Existence et univocité	15
2.4.1 Existenzsatz von Peano — Théorème d'existence de Peano	15
2.4.2 Eindeutigkeit — Univocité	15
2.4.3 Existenzsatz und Eindeutigkeit — Existence et univocité	17
2.4.4 Beispiel mit einer singulären Lösung — Exemple avec une solution singulière	19
2.5 Gleich'typen, Lös'methoden — Types d'éq., méthodes de solution	19
2.5.1 Iterationsverfahren von Picard — Méthode d'iteration de Picard	19
2.5.2 Separationsverfahren — Méthode de séparation des variables	20
2.5.3 „Beinahe“ separable D'Gl — Eq. diff. "presque séparable"	21
2.5.4 Substitutionsmethode — Méthode de substitution	22
2.5.5 Exakte D'Gl — Eq.diff. exacte	23
2.5.6 Eulersche Multiplikatoren — Multiplicateurs d'Euler	24
2.5.7 Eine Anwendung: Einhüllende — Une application: Enveloppe	26
2.6 Theorie der linearen D'Gl — Théorie des eq.diff. linéaires	28
2.6.1 Einführung, Definitionen — Introduction, définitions	28
2.6.2 Homogenes System — Système homogène	29
2.6.3 Inhomogenes System — Système inhomogène	33
2.7 Lineare D'Gl mit konst. Koeff. — Eq.diff. linéaires avec coeff. const.	36
2.7.1 Homogenes Problem — Problème homogène	36
2.7.2 Inhomogenes Problem — Problème non homogène	39
2.7.3 Potenzreihenansatz — Partir d'une série de puissance	40
2.8 Numerische Verfahren — Méthodes numériques	41
2.8.1 Das Verfahren von Euler — La méthode d'Euler	41
2.8.2 Die Methode von Runge-Kutta — La méthode de Runge-Kutta	42

2.8.3	D'Gl und Differenzenmethode — Eq. diff. et méthode d'éq. aux différences	44
2.9	Allgemeine Maschinenlösungen — Solutions générales par l'ordinateur	47
2.9.1	<i>Mathematica</i> -Lösung — Solutions par <i>Mathematica</i>	47
2.9.2	Selbst gerechnete Lösung — Solution calculée personnellement	48
2.10	Artillerie-Methode — Méthode selon l'artillerie	50
2.11	Anwendungen — Applications	53
2.11.1	Biegelinie — Ligne élastique ou axe neutre	53
2.11.2	Knickung — Problème de flambage	53
3	Laplace-Transformationen — Transformations de Laplace	55
3.1	Einführung — Introduction	55
3.1.1	Übersicht — Vue générale	55
3.1.2	Der Trick — Le truc	55
3.2	Exist. u. Eindeut'probleme — Probl. d'exist. e. d'univoc.	57
3.2.1	Definitionen — Définitions	57
3.2.2	Existenzprobleme — Problèmes d'existence	57
3.2.3	Eindeutigkeitsprobleme — Problèmes d'univocité	59
3.3	Aufbau des Kalküls — Constr. de la théorie formalisée	60
3.3.1	Elementare Regeln — Règles élémentaires	60
3.3.2	Linearitätsregeln — Linéarité	61
3.3.3	Streckung im Urbildbereich — Extension dans le domaine de déf.	61
3.3.4	Differentiationsregel — Règle de la dérivation	62
3.3.5	Anwendung auf eine D'Gl — Application pour une éq.diff.	62
3.3.6	Integrationsregel — Règle d'intégration	62
3.3.7	Verschiebungssätze — Théorème de retard	63
3.3.8	Multiplikationsregel — Règle de la multiplication	64
3.3.9	Divisionsregel — Règle de la division	65
3.3.10	Faltung — Plissement	65
3.3.11	Periodische Funktionen — Fonctions périodiques	68
3.3.12	Anfangs- und Endwerte — Valeurs initiales et finales	69
3.3.13	Transformation rationaler Funktionen — Transformation de fonctions rationnelles	70
3.4	Musterbeispiele — Exemples modèles	72
3.4.1	Rücktransformationen — Transformations inverses	72
3.4.2	Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff.	72
3.4.3	D'Gl 2. Ordnung — Eq.diff. d'ordre 2ème	73
3.4.4	Systeme von D'Gl — Systèmes d'éq.diff.	74
3.4.5	Anwendung der Faltung — Application du plissement	74
3.5	Distributionen — Distributions	75
3.5.1	Idee, Dirac-Stoss — Idée, impulsion unité de Dirac	75
3.5.2	Die Transformierte der Dirac-Funktion — La transformée de la fonction de Dirac .	77
3.5.3	Anwendung auf ein AWP — Application pour un PVI	78
3.5.4	Stoss zur Zeit 0 — Coup au temps 0	78
3.5.5	Stoss zur Zeit t_0 — Coup au temps t_0	79
3.6	Probleme aus der Praxis — Problèmes de la pratique	80
3.6.1	Schwingungen und Oszillatoren — Oscillations et oscillateurs	80
3.6.2	Stabilitätsverhalten von Lösungen — Comportement de stabilité de solutions . .	82
3.6.3	Stabilitätskriterium — Critère de stabilité	84
3.6.4	Randwertprobleme — Problèmes de valeurs aux limites	84
3.7	LTI-Systeme — Systèmes LTI	85
3.7.1	Grundlagen — Fondements	85
3.7.2	Beispiele, Systemverknüpfungen — Exemples, liaisons de systèmes	86

4	Fourierreihen — Séries de Fourier	89
4.1	Einführung — Introduction	89
4.1.1	Verwendung — Utilisation	89
4.1.2	Periodische Funktionen — Fonctions périodiques	89
4.1.3	Trigonometrische Reihen — Séries trigonométriques	90
4.2	Fourierreihen und Fourieranalyse — Séries et analyse de Fourier	90
4.2.1	Das Darstellungsproblem — Le problème de la représentation	90
4.2.2	Das Konvergenzproblem — Le problème de la convergence	93
4.2.3	Folgerungen und Konsequenzen — Conclusions et conséquences	97
4.2.4	Sinus- und Cosinusreihen — Séries de sinus et cosinus	98
4.2.5	Eulersche Formeln, Periode T — Formules d'Euler, période T	100
4.3	Harmonische Analyse — Analyse harmonique	100
4.3.1	Beispiele — Exemples	100
4.3.2	Lineare Kombinationen — Combinaisons linéaires	102
4.3.3	Parsevalsche Gleichung — Equation de Parseval	103
4.3.4	Die Formel — La formule	103
4.3.5	Anwendung — Application	104
4.4	Komplexe Darstellung — Représentation complexe	105
4.4.1	Komplexe Fourierkoeffizienten — Coefficients de Fourier complexes	105
4.4.2	Berechnung der Koeffizienten — Calculer les coefficients	105
4.4.3	Beispiel — Exemple	106
4.4.4	Amplitudenspektrum, Phasenspektrum — Spectre d'amplitude, spectre de phase	108
4.4.5	Reelle Interpretation der Spektren — Interprétation réelle des spectres	110
4.4.6	Das Phänomen von Gibbs — Le phénomène de Gibbs	111
4.4.7	Beispiele — Exemples	112
4.5	Diskrete Fouriertransformation — Transf. de Fourier discrète	113
4.5.1	DFT und Fouriersynthese — DFT et synthèse de Fourier	113
4.5.2	FFT — FFT	117
4.6	Fouriertransformation — Transformation de Fourier	119
4.6.1	Fourierintegral — Intégrale de Fourier	119
4.6.2	b-Band-Beschränktheit, Shannon — Borné à la bande b, Shannon	125
4.6.3	Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff.	126
5	z-Transformationen — Transformations en z	129
5.1	Einführung — Introduction	129
5.1.1	Verwendung — Utilisation	129
5.1.2	Gegenstand der Betrachtung — Objet de la considération	129
5.1.3	z-Transformierte — Transformée en z	130
5.2	Regeln, Calculus — Règles, calcul	130
5.2.1	Geometrische Folgen — Suites géométriques	130
5.2.2	Differentiation von Transformierten — Différentiation de transformées	131
5.2.3	Linearität, Einheitsimpuls — Linéarité, impulsion d'unité	131
5.2.4	Exponential und trig. Folgen — Suites exp. et trig.	132
5.2.5	Verschiebungen — Décalages	133
5.2.6	Gliedweise Mult. mit einer Folge — Mult. avec une suite terme p. terme	134
5.2.7	Anfangs- und Endwertsatz — Théorème des valeurs aux limites	135
5.2.8	Inverse z-Transformation — Transformation en z inverse	137
5.2.9	Auffinden der Inversen — Trouver l'inverse	137
5.3	Praktische Anwendungen — Applications pratiques	138
5.3.1	Differenzengleichungen — Equations aux différences	138
5.3.2	Diskrete lineare Systeme — Systèmes linéaires discrets	140
5.3.3	Impuls- und Schrittantwort — Réponse d'impulsion et indicielle	144
5.3.4	Schrittantwort — Réponse indicielle	145

5.4	Stabilität — Stabilité	146
5.4.1	Der Begriff — La notion	146
5.4.2	Stabilitätskriterium — Critère Pour la stabilité	147
5.4.3	Stabilitätskriterium — Critère pour la stabilité	148
5.5	Faltung, Konvolution — Plissement	149
5.5.1	Die Idee — L'idée	149
5.6	Laplace- und z-Transformation — Transf. de Laplace et en z	151
5.7	Ingenieuranwendungen — Applications d'ingénieur	152
6	Vektoranalysis — Analyse vectorielle	153
6.1	Grundlagen — Les bases	153
6.1.1	Einführung — Introduction	153
6.1.2	Operatoren — Opérateurs	153
6.2	Felder — Champs	155
6.2.1	Der Feldbegriff — La notion du champ	155
6.2.2	Feldtypen — Types de champs	156
6.3	Gradient, Divergenz, Rotation — Gradient, divergence, rotationnel	158
6.3.1	Laplace- und Nabla-Operator — Opérateurs de Laplace et nabla	158
6.3.2	Definition von grad, div und rot — Définition de grad, div et rot	158
6.3.3	Formeln mit grad, div und rot — Formules avec grad, div et rot	159
6.3.4	Bedeutung von grad, div und rot — Signification de grad, div et rot	160
6.4	Konservative Felder — Champs conservateurs	163
6.4.1	Linienintegrale — Intégrales curvilignes	163
6.4.2	Gradientenfelder und Pot'felder — Champs de vect. lam. et champs de potent.	165
6.4.3	Konservative Felder — Champs conservateurs	166
6.4.4	Eigenschaften, Beispiele — Qualités, exemples	168
6.4.5	Konservative Felder und Rotation — Champs conservateurs et rotationnel	169
6.4.6	Bsp.: Stromdurchflossener Leiter — Expl.: Conduct. alimenté de courant électr.	171
6.5	Die Integralsätze — Les théorèmes de l'intégrale	172
6.5.1	Der Begriff Fluss — La notion de flux	172
6.5.2	Definition des Flusses — La définition du flux	173
6.5.3	Fluss durch geschlossene Flächen — Flux à travers des surfaces fermées	174
6.5.4	Anwend.: Wieso r-quadrat-Gesetze? — Applic.: Pourq. d. lois de r au carré?	175
6.5.5	Übersicht über die Integralsätze — Aperçu des théorèmes de l'intégrale	176
6.5.6	Die Sektorformel — La formule de secteur	178
6.5.7	Konsequenzen aus den Integralsätzen — Conséquences des théorèmes de l'intégrale	179
6.5.8	Quellenfreie Potentialfelder — Champs de potentiel libres de sources	180
6.5.9	Beispiele zu Stokes — Exemples concernant Stokes	181
6.5.10	Abgeleitete Formeln — Formules dérivées	181
6.5.11	Koord'unabhängige Def.n der Rotation — Déf. du rotationnel indép. de coord.	182
6.5.12	Zur Divergenz des elektr. Feldes — Quant à la divergence d'un champ électr.	183
6.6	Beweisideen z.d. Int'sätzen — Idées d. preuves p.l. théor.d. l'intégr.	184
6.6.1	Zum Satz von Gauss — Quant au théorème de Gauss	184
6.6.2	Zum Satz von Stokes — Quant au théorème de Stokes	185
6.7	Zirkulation, Vektorpotential — Circulation, potentiel vectoriel	188
6.7.1	Zirkulation und Rotation — Circulation et rotationnel	188
6.7.2	Das Vektorpotential — Le potentiel vectoriel	191

7	Rayleigh–Quotient (Anhang — Annexe 1)	195
7.1	Grundlagen zur Methode mit dem Rayleigh–Quotienten	196
7.1.1	Übersicht: Problem und Ziel	196
7.1.2	Theorie bezüglich Rayleigh–Quotient	196
7.1.3	Berechnung des Rayleigh–Quotienten	201
7.1.4	Eine genauere numerische Näherung für den 1. Eigenwert	206
7.1.5	Bemerkung zum Ritz–Galerkin–Verfahren	208
7.1.6	Übersicht	208
7.1.7	Die Methode	208
8	Partielle Differentialgleichungen (Anhang — Annexe 2)	215
8.1	Partielle Differentialgleichungen	216
8.1.1	Quasilineare part. D’gl 1. Ordnung mit zwei Variablen	216
8.1.2	Klassifikation bei part. D’gl. 2. Ordnung	218
8.1.3	Verfeinerung der Klassifikation	218
8.1.4	Das Beispiel der Wärmeleitgleichung	220
8.1.5	Koordinatentransformationen bei Operatoren	224
8.1.6	Lineare Operatoren	229
8.1.7	Zur schwingenden Membran	230
8.1.8	Die Poisson–Gleichung	232
8.1.9	Exkurs: Wichtige Formeln	235
8.1.10	Plattengleichung und biharmonischer Operator	236
8.1.11	Das Modellierungsbeispiel der an vier Punkten aufgehängten Platte	237
8.1.12	Das Modellierungsbeispiel Kreisplatte	237
8.1.13	Numerische Methoden	239
8.1.14	Numerische Beispiele: Differenzenverfahren	240
8.1.15	Numerische Beispiele: Iterationsverfahren	244
8.2	Schritte in die Variationsrechnung	250
8.2.1	Der Begriff der ersten Variation	250
8.2.2	Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung	251
8.2.3	Die Herleitung der Potentialgleichung	252
8.2.4	Die Kettenlinie	252
8.2.5	Ein isoperimetrisches Problem und die Lagrange–Funktion	254
8.2.6	Das Prinzip der kleinsten Wirkungen und erste Variation	255
8.2.7	Bernoullis Brachystochronen–Problem	257
8.2.8	Variation und finite Elemente: Triangulationsmethode	259
8.2.9	Weitere Probleme	263
8.3	Schwingungen und partielle Differentialgleichungen	264
8.3.1	Die homogene Wellengleichung, Voraussetzungen	264
8.3.2	Separationsansatz und stehende Welle	264
8.3.3	Schwingung eines dünnen Balkens	266
8.3.4	Die schwingende dünne Platte	268
8.3.5	Ausblick über Eigenwerte und Eigenfunktionen	274
8.4	Fouriertransformationen und partielle Diff’gleichungen	274
8.4.1	Entwicklung der Methode an einem Beispiel	274
8.4.2	Beispiel einer konkreten Anwendung	276
8.5	Zur Idee der Greenschen Funktion	276
8.5.1	Einführung und Begriff	276
8.5.2	Ein Schulbeispiel	277
8.6	Bemerkung zur Delta–Funktion	279
8.7	Ausblick	281

9	Mathematische Modellierung (Anhang — Annexe 3)	283
9.1	Einige Kurven	284
9.1.1	Die Klothoide	284
9.1.2	Kettenline contra Seilkurve	286
9.1.3	Eine Schleppkurve	288
9.2	Balken und Biegelinie	289
9.2.1	Schnittkräfte und Momente am Balken	289
9.2.2	Die Biegelinie des Balkens	293
9.2.3	Zur Knickung	295
9.3	Gekoppelte Pendel	296
9.3.1	Problemmodellierung	296
9.3.2	Beispiellösung	297
9.4	Weitere Beispiele zur Modellierung	297
9.4.1	Ausblick auf weitere Beispiele und Themenbereiche	297
9.4.2	Bemerkung zu autonomen und dynamischen Systemen	299
10	Anhang 4 — Annexe 4	301
10.1	Hinweise – Indications	301
10.1.1	Abkürzungen – Abréviations	301
10.1.2	Literatur — Littérature	301

Kapitel • Chapitre 1

Organisatorisches

Kurze Übersicht

1. Organisation, Rahmen
2. Stoff
3. Ziel, Weg, Methoden, Feedback, Team
4. Übungen, Selbststudium
5. Lerntechnik, Arbeitstechnik, Selfmanagement
6. Rechte und Pflichten des Studenten und der Schule
7. Prinzipien, Grundsätze
8. Rechner, Computer, Mathematiksoftware
9. Semesterorganisation Mathematik (Anzahl Noten, Prüfungsreglement, Prüfungsplan, Prüfungsrahmen, erlaubte Unterlagen, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Übungen und Projekte, Arbeitsnachweismappe, Klassensprecher, Klassenbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden)
10. Hilfsmittel (Bibliothek, Taschenrechner, Mathematiksoftware, Literatur)
11. Zeitplanung
12. Einführung

Kapitel • Chapitre 2

Differentialgleichungen

2.1 Einführung

Literatur

Hier eine kleine Auswahl, die jeweils den grössten Teil des gesamten Stoffes abdeckt:

Leupold u.a., Mathematik 1, 2

Swobowsky, Analyse

Swobowsky, Calculus

Glyn James, Modern Engineering Mathematics,

Advanced Modern Engineering Mathematics

Der Begriff

Bisher haben wir in der Mathematik vor allem gewöhnliche **Zahlengleichungen** getroffen:

Bsp.: $x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0, \quad x = ?$

Gesucht waren unbekannte Zahlen oder Zahlenmengen:

\mathbb{L} = Zahlenmenge .

Eine **Differentialgleichung** dagegen ist eine Gleichung, in der eine **unbekannte Funktion** und – oder Ableitungen dieser Funktion vorkommen. Gesucht ist hier die unbekannte Funktion.

Bsp.: $y''(t) + y'(t) = \cos(2t)$

$y(t)$ ist eine unbekannte Funktion .

Beispiel einer Lösung: $y(t) = 2 \sin(t) - \frac{1}{3} \cos(2t)$
(Kontrolle!)

\leadsto Die Lösungsmenge ist eine Funktionenmenge.

Wichtig: Differentialgleichung \leadsto Gleichung mit Differentialquotienten.

Schreibweise:Differentialgleichung \leadsto D'Gl**Beispiele, Praxis**

Die mathematische Formulierung praktischer Probleme in Naturwissenschaft, Technik, Wirtschaft, ... führt häufig auf Differentialgleichungen. Z.B. wenn es um den Zusammenhang zwischen einer Grösse und ihrer zeitlichen Veränderung geht.

1. Wir kennen das Fallgesetz aus der Physik:

$$-g = \ddot{s} = s''(t) \Rightarrow s = \int s'(t) dt + C_1 = \int (\int s'(t) dt + C_1) dt + C_2 = \int (\int -g dt + C_1) dt + C_2 \\ = \int (-g t + C_1) dt + C_2 = -\frac{1}{2} t^2 + C_2 t + C_1$$

\mathbb{L} = unendliche, 2-parametrische Funktionenschar. Für eine eindeutige Lösung braucht es zwei Bedingungen (C_1 und C_2 festlegen).

- 2.
- $y'(t) = y(t)$
- ,
- $y'(t) - y(t) = 0$

 \leadsto Welche Funktion geht beim Ableiten in sich selbst über?

Bekannt:

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = -3e^t, \quad y_3(t) = e^{t+5} = e^t \cdot e^5, \quad y_4(t) = 7e^t - e^{t+\ln(3)} = 4e^t$$

$$\text{Allgemein: } y(t) = C \cdot e^t$$

Problem: Gibt es noch weitere Lösungen $\notin \{C \cdot e^t \mid C \in \mathbb{R}\}$?

- 3.
- $y''(t) = -y(t)$
- resp.
- $y''(t) + y(t) = 0$

 \leadsto Schwingungsgleichung

$$\text{Lösung: } y(t) = C_1 \cdot \sin(t) + C_2 \cdot \cos(t)$$

Typen von Differentialgleichungen

Definition: **Ordnung** einer D'Gl := Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung.

Symbol: Ordnung einer D'Gl := $\text{Ord}(D'Gl)$ Ordre d'une éq'diff := $\text{Ord}(\text{éq'diff})$

Beispiele:

$$1. \quad y' - t^2 - y^3 = 0, \quad y = y(t) \Rightarrow \text{Ord} = 1, \quad \text{pgrad}(y^3) = 3$$

$$2. \quad (y'')^3 - 4(y')^4 + t = 0 \Rightarrow \text{Ord} = 2$$

$$3. \quad y''' \cdot y' - y \cdot t^6 = 0 \Rightarrow \text{Ord} = 3$$

$$4. \quad \ln(y''') \cdot \cos(y') - e^y + y = 0 \Rightarrow \text{Ord} = 3$$

Definition: **Gewöhnliche D'Gl** := D'Gl, in der nur Ableitungen nach einer Variablen vorkommen.

.B. D'Gl n -ter Ordnung:

$$\text{Explizite D'Gl: } y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

$$\text{Implizite D'Gl: } f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) = 0$$

Im Unterschied zur gewöhnlichen D'Gl kommen bei einer **partiellen D'Gl** Ableitungen nach verschiedenen Variablen vor.

Beispiele:

1. $\forall_{x,t} t \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightsquigarrow$ z.B. $u(x, t) = e^{(\frac{t}{x})^2}$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightsquigarrow$ Wellengleichung.
3. $\sin(t \cdot x^{\frac{1}{2}}) \cdot u''_{tt} = u''_{xx} + u$

Verwandlung in Differentialgleichungssysteme

Bsp.:

Nebstehend ein Differentialgleichungssystem mit zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_1(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) &= 0 \\ f_2(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) &= 0 \end{aligned}$$

Wichtig: Mit Hilfe einer Umbenennung der Variablen lässt sich jede D'Gl n -ter Ordnung als System 1-ter Ordnung mit $n + 1$ Gleichungen schreiben:

$$\text{Sei} \quad F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Definiere:

\rightsquigarrow System:

$$\begin{array}{ll} y(t) : &= z_0(t) & F(t, z_0, z_1, \dots, z_n) &= 0 \\ y'(t) &= z'_0(t) := z_1(t) & z'_0(t) &= z_1(t) \\ \vdots & & \vdots & \\ y^{(n)}(t) &= z'_{n-1}(t) := z_n(t) & z'_{n-1}(t) &= z_n(t) \end{array}$$

Vektorschreibweise:

$$\text{Sei} \quad \vec{z} := \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t, z_0, \dots, z_{n-1}, z_n) := \vec{f}(t, \vec{z}, z_n) := \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \text{D'Gl:} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{z}' = \vec{f}(t, \vec{z}, z_n) \\ 0 = F(t, \vec{z}, z_n) \end{array} \right|$$

Bemerkung:

1. \vec{f} kann allgemeiner eine beliebige Funktion von t, \vec{z} und z_n sein.
2. Statt theoretisch eine einzige D'Gl 1-ter Ordnung zu untersuchen, kann man auch gleich ein System 1-ter Ordnung untersuchen. Statt mit Funktionen hat man es dann mit Vektorfunktionen (mehrere Funktionen aufs Mal) zu tun. Zur Vereinfachung wollen wir nachfolgend die Überlegungen so weit als möglich für den Fall einer einzigen Gleichung machen. Die Übertragung auf Vektorgleichungen ist dann nur noch ein 'technisches Problem'.

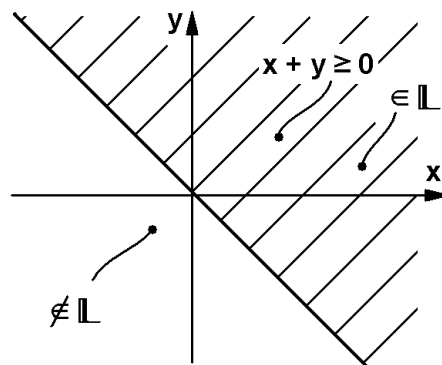
2.2 Lösung bei D'Gl 1. Ordn.

2.2.1 Lösung, Integralkurve

Bsp.:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) = \sqrt{x+y} \\ D_f &\subseteq \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{\cdot}$ ist die Gleichung nur für $y \geq -x$ definiert.



Definition:

$y : I \mapsto \mathbb{R}$ heisst **Lösung** oder **Integral** der D'Gl $y' = f(x, y) \Leftrightarrow$

- 1) $y \in \mathcal{D}(I)$ (diff'bar(I))
- 2) Graph $\{(x, y(x))\} \subseteq D_f$
- 3) $y(x)$ erfüllt die D'Gl $y' = f(x, y)$

Ist $y(x)$ Lösung, so heisst die Kurve $\{(x, y(x))\} \subseteq D_f$ **Integralkurve**.

Hinweis: In obiger Skizze geht die Integralkurve durch den Punkt (x_0, y_0) .

2.2.2 Linienelement, Richtungsfeld

Sei $y_0 := y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$.

In einem Punkte (x_0, y_0) kann die Integralkurve durch ihre Tangente mit der Steigung y'_0 approximiert werden.

Definition:

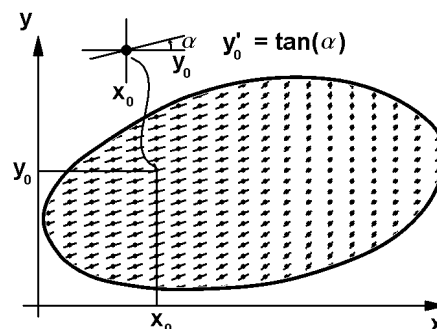
Ein Tripel der Art (x_0, y_0, y'_0) heisst **Linienelement**.

Ein Linienelement gibt in einem beliebigen Punkt einen guten Eindruck vom Verhalten der Kurve in diesem Punkt.

Ein Linienelement lässt sich gut durch ein kurzes Tangentenstücklein in einem Punkt (x_0, y_0) mit der Steigung y'_0 darstellen. Ohne Schaden können wir die Exaktheit etwas vernachlässigen und vom **Graphen eines Linienelementes** reden.

Wichtig: Wenn eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ gegeben ist, so lässt sich in einem beliebigen Punkt (x_0, y_0) die Steigung $y'_0 = f(x_0, y_0)$ sofort berechnen und damit das Linienelement skizzieren!

Ersetzt man das Bild einer Integralkurve in genügend vielen Punkten durch die Graphen der Linienelemente, so gewinnt man rasch einen Eindruck vom Verlauf der Kurve!



Definition:

Die Menge der Linienelemente $\{(x_0, y_0, y'_0)\}$ heisst **Richtungsfeld** (auch Tangentenfeld).

Wichtig: Mit Hilfe einer Skizze eines Graphen des Richtungsfeldes lassen sich die Integralkurven sofort abschätzen.

Bsp.:

D'Gl $y' = -\frac{x}{y}$, $y = y(x)$, $y \neq 0$, $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $f(x, y) = -\frac{x}{y}$

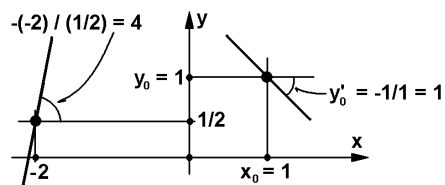
Sei $x_0 = y_0 = 1$

$$\Rightarrow y'_0 = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{1}{1} = -1$$

\leadsto Linienelement

(Vgl. Skizze)

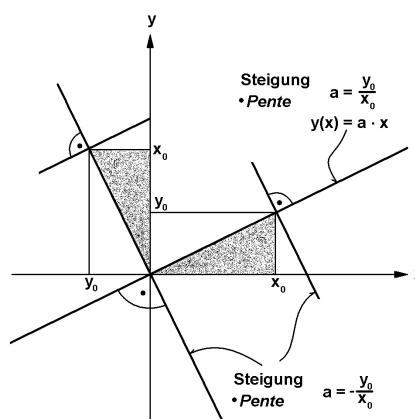
\leadsto **Idee:**



Sei

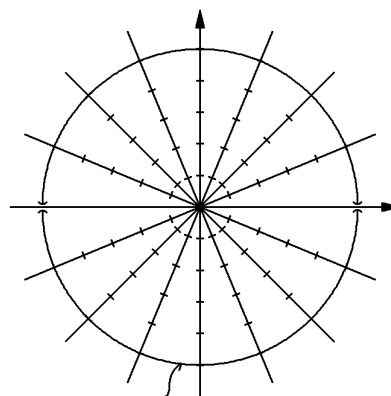
$$y = a \cdot x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{a \cdot x} = -\frac{1}{a}$$

Eine Gerade mit der Steigung $-\frac{1}{a}$ ist senkrecht zu einer Geraden mit der Steigung a .



In jedem Punkt $P_0 = (x_0, y_0 = a \cdot x_0)$ lässt sich daher sofort das Linienelement $(x_0, a \cdot x_0, -\frac{1}{a})$ zeichnen. Es steht \perp zur Geraden $y(x) = a \cdot x$ (welche durch den Ursprung geht).

↪ Die Lösungskurven müssen konzentrische Kreise um den Ursprung sein, wobei für $y = 0$ die Lösung nicht definiert ist. ↪ **Integalkurven**.



Integalkurve • Courbe intégrale

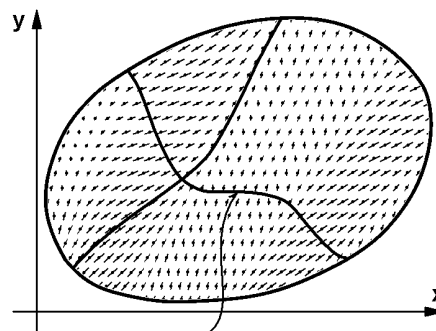
Kontrolle: Sei $y \neq 0$
 Kreis: $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ($|x| \leq r$) $\Leftrightarrow x^2 + y(x)^2 = r^2 := C$
 (diff, int'gr \leadsto) $\Leftrightarrow 2x + 2y' \cdot y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$

Beispiele von Richtungsfeldern lassen sich z.B. mit einem *Mathematica*-Programm auf 'Knopfdruck' schnell generieren, vgl. Anhang.

2.2.3 Isoklinen

Wir betrachten diejenigen Linienelemente (x_0, y_0, y'_0) für die gilt: $y'_0 = k$ (const.).

Diese Linienelemente zu k definieren oft wieder eine Kurve.



Isokline • Isocline

Definition: Kurven der Art $\{(x_0, y_0, y'_0) \mid y'_0 = k\}$ nennen wir **Isoklinen**.

Bemerkung: Auf den Isoklinen haben somit alle Linienelemente die gleiche Steigung k .

Wichtig: In expliziten D'Gl kann man die Isoklinen oft sofort einfach bestimmen und damit auch die Integralkurven abschätzen.

Bsp.:

$$1. \ y' = \frac{\sin(x)}{2 + \sin(y)} \Rightarrow \text{Isokline: } (y' = k = \text{const}) \sin(x) = 2k + k \cdot \sin(y)$$

$$\Rightarrow \quad |_{k \neq 0} \sin(y) = \frac{\sin(x) - 2 \cdot k}{k} \Rightarrow y(x) = \arcsin\left(\frac{\sin(x) - 2 \cdot k}{k}\right), \quad k \neq 0$$

Zum Ausnahmefall $k = 0$: $k = 0$: $0 = \frac{\sin(x)}{2 + \sin(y)} \Rightarrow x = 0, \quad y \in \mathbb{R} \leadsto y\text{-Achse}.$

2. Achtung:

Isoklinen können auch ganze 'Ebenen' sein:

D'Gl $y' = a = \text{const.} \Rightarrow y = ax + C = y(x, C), \quad C \in \mathbb{R}$

$$3. \quad 2y' - (64y^2)^{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow 2y' - 4(y^2)^{\frac{1}{3}} = 0$$

Isokline: $y' = 2y^{\frac{2}{3}} = k \Rightarrow y^{\frac{2}{3}} = \frac{k}{2} = k_1 \Rightarrow y = (k_1)^{\frac{3}{2}} = k_2 \Rightarrow y = \text{const.}$

\leadsto Isokline: Horizontale Geraden.

Lösung dieser D'Gl:

$$(a) \quad y \equiv 0 \in \mathbb{L}$$

$$(b) \quad y' = \frac{dy}{dx} = 2 \cdot y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \quad \text{für } y \neq 0$$

$$\Rightarrow \int y^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int 2 dx \Rightarrow 3 \cdot y^{\frac{1}{3}} + C_1 = 2x + C_2$$

$$\Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(2x + C_2 - C_1) := \frac{1}{3}(2x + C_0) := \frac{2}{3}(x + C) \Rightarrow y = \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3$$

Achtung: Für $y \neq 0$ ist die Integralkurve hier nicht eindeutig definiert!

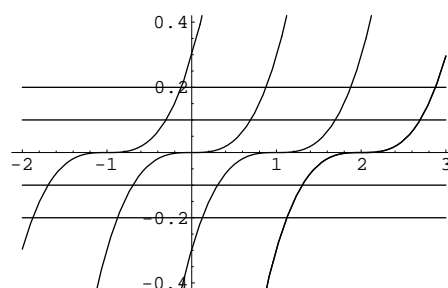
Eine Erklärung erhalten wir, wenn wir die Wendepunkte der Kurven untersuchen:

$$y = \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3 \Rightarrow y' = 2 \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow y'' = 2 \left(\frac{2}{3}(x + C)\right) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}(x + C)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{16}{9}(x + C) = 0 \Rightarrow x = -C = \text{const.} = k \Rightarrow y(x) = y(-C) = \left(\frac{2}{3}(-C + C)\right)^3 = 0$$

Die Kurve $y = \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3$ hat ihren Wendepunkt in $(-C, 0)$, d.h. auf der x -Achse.

Das Richtungsfeld hat daher die Gestalt wie im Bilde (Integralkurven):



Somit kann ein Stück einer Integralkurve, das von unten die x -Achse erreicht, auf verschiedene Weisen oberhalb der x -Achse fortgesetzt werden.

2.2.4 Zentrale Fragen

Eindeutigkeit einer Lösung

Im letzten Beispiel haben wir gesehen, dass es sicher Differentialgleichungen gibt, deren Integralkurven an gewissen Punkten auf unterschiedliche Weisen fortgesetzt werden können. Die Lösungen sind somit nicht eindeutig.

↪ **Problem 1:** Wann hat eine Differentialgleichung auch eine eindeutige Lösung?

Das Eindeutigkeitsproblem ist im Vergleich zu den nachfolgenden Problemen einfach zu lösen.

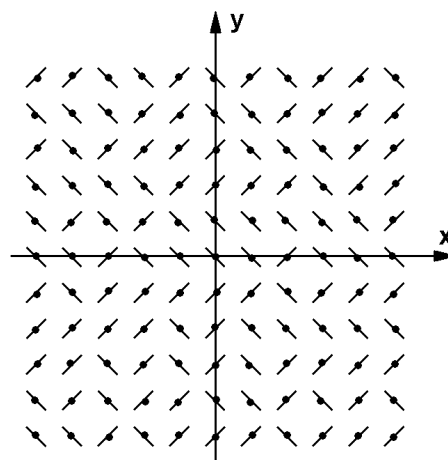
Existenz einer Lösung

Man sieht schon graphisch, dass die folgende Gleichung keine Integralkurve besitzen kann:

$$y' = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Im Bild ist jeder Punkt zufällig gewählt:

$$(x \in \mathbb{Q}) \vee (x \notin \mathbb{Q})$$



Hingegen besitzt die Gleichung $y' = y$ ganz sicher eine Lösung, nämlich $y(x) = e^x$, wie man sofort durch Einsetzen feststellt.

Weiteres Beispiel:

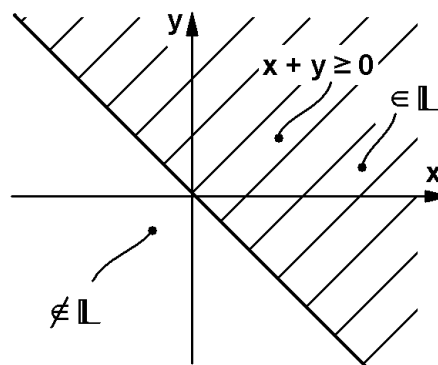
Definitionsbereich einer Lösung

$$y' = \sqrt{x+y}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad y(x) = ?$$

Wegen $\sqrt{x+y} \geq 0$ ist die Gleichung nur für $y \geq -x$ definiert.

Implizite Lösung:

$$-x - 2 \cdot \operatorname{artanh}(\sqrt{x+y}) - \ln(-1+x+y) + 2 \cdot \sqrt{x+y} = C, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in \mathbb{C} \dots!$$



↪ **Problem 2:** Existiert zu einer gegebenen Differentialgleichung auch eine Lösung?

Das Existenzproblem ist im Vergleich zu den andern Problemen oft schwierig zu lösen, ausser bei relativ einfachen Klassen von Gleichungen, für die man generelle Existenzsätze kennt.

Lösungsmethode

Problem 3: Wie lässt sich die Lösung einer gegebenen Differentialgleichung auffinden? Welche Methoden hat man zur Verfügung?

Was die Lösungsmethoden betrifft, gibt es in der Literatur riesige Sammlungen. Wir werden in diesem Kurs nur sehr wenige, aber für uns wichtige Methoden besprechen können.

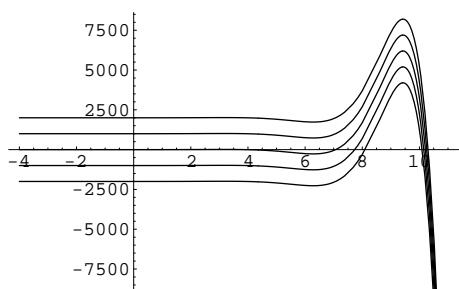
Natur der Darstellbarkeit einer Lösung

Problem 4: Wann ist es möglich, zu einer gegebenen Differentialgleichung eine analytische Lösung aufzufinden? Wann kann man eine brauchbare numerische Lösung finden?

Natur der Stabilität einer Lösung

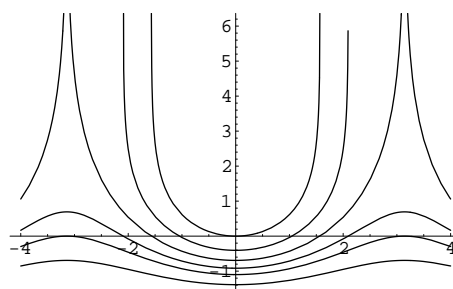
Wenn man an einem System ganz wenig die Parameter verändert, so hätte man es meistens gerne so, dass dann das System sein Verhalten auch nur ganz wenig ändert und nicht komplett kippt. Z.B. sollte ein wenig mehr Wärme in einem Gas zu einem etwas höheren Druck und nicht zur Explosion des Systems führen.

Problem 5: Wann verhält sich die Lösung einer gegebenen Differentialgleichung auch **stabil** in dem Sinne, dass bei kleinen Änderungen der Parameter die Lösung nach grösseren Zeiten auch nur wenig ändert und das System nicht komplett kippt? (Vgl. Skizzen.)



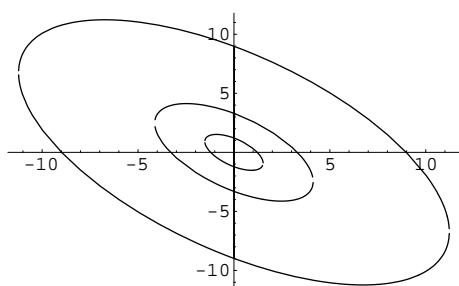
$$y' = e^x \cdot \sin(x)$$

$$y = c - \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \sin(x)$$



$$y' = e^y \cdot \sin(x)$$

$$y = -\ln(\cos(x) + c), \quad \cos(x) + c > 0$$



$$y' = -\frac{5x + 3y}{3x + 5y}$$

$$y = \frac{1}{5} (-3x \pm x \sqrt{-16 + 5e^{2(x - \ln(x))}})$$

2.3 Anfangswertproblem

2.3.1 Idee

Bsp.:

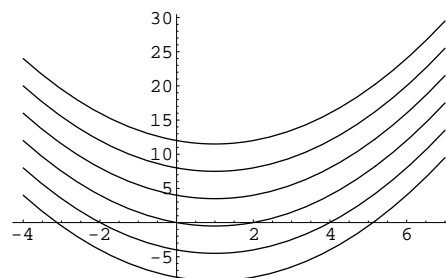
D'Gl: $y' = x - 1$

$$\Rightarrow y = \int x - 1 \, dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

Speziell: $y(0) = C$

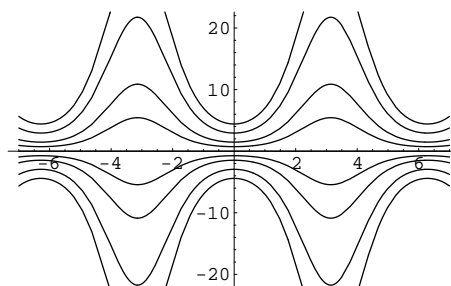
$$\mathbb{L} = \{y_C(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

$\leadsto \mathbb{L}$ = Unendliche Kurvenschar, Scharparameter C .



$$y' = x - 1, \quad y = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

Allgemein ist bei uns die Lösung einer einfachen expliziten Differentialgleichung eine Kurvenschar.



$$y' = y + \sin(x), \quad y = c \cdot e^{-\cos(x)}$$

Man kann sich demnach die folgende sinnvolle Frage stellen:

Problem: Suche zu einer gegebenen Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ diejenigen Integralkurven, die durch einen gegebenen Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ gehen.

Definition:

Das eben gestellte Problem heisst **Anfangswertproblem (AWP)**. Die Bedingung $y(x_0) = y_0$ heisst **Anfangsbedingung (A'Bed)**.

2.3.2 Verallgemeinerung des Problems

Ein analoges Problem kann man sich für einfache **explizite Differentialgleichungen höherer Ordnung** stellen. Man kann sich vorstellen, dass beim Lösen der D'Gl so oft integriert werden muss, wie die Ordnung angibt, um zur Lösung gelangen zu können. Daher sind vermutlich soviele Anfangsbedingungen notwendig, wie die Ordnung angibt, um die anfallenden Integrationskonstanten fixieren zu können.

Bsp.: $y''' = f(x, y, y', y'')$

\leadsto Integrationskonstanten: C_1, C_2, C_3

\leadsto **A'Bed.** $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0$

Daher definieren wir:

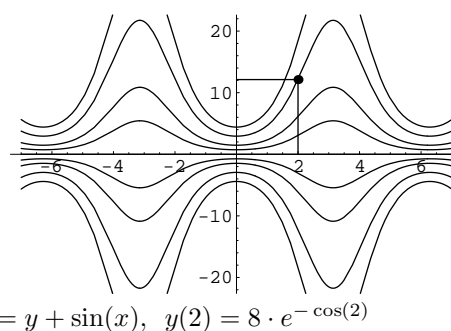
Definition:

Das Problem

$$\begin{aligned}
 y^{(n)}(x) &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\
 (*) \quad y(x_0) &= y_0 \\
 (*) \quad \dots &= \dots \\
 (*) \quad y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}
 \end{aligned}$$

heisst **Anfangswertproblem**.Die Bedingungen (*) heissen **Anfangsbedingungen****Bemerkung:**

Ohne Anfangsbedingungen \leadsto **allgemeine Lösung** (\mathbb{L}_g), mit Anfangsbedingungen \leadsto **partikuläre Lösung** (\mathbb{L}_p)

**Beispiele:**

$$1. \quad y \cdot y'' - (y')^2 = 0 \quad (\text{resp. } y'' = \frac{(y')^2}{y}) \quad \leadsto \quad \mathbb{L}_g: y(x) = C_1 \cdot e^{C_2 \cdot x}$$

$$\mathbf{A'Bed.} : \quad y(3) \approx 8.96338, \quad y'(3) \approx 4.48169 \Rightarrow y(x) \approx 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$2. \quad \frac{x \cdot y'}{2} - y = 0 \quad (\text{resp. } y' = \frac{dy}{dx} = 2 \frac{y}{x}), \quad \mathbf{A'Bed.} \quad y(1) = 1$$

Trick: „Separiere“ die Variablen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 y' \cdot \frac{1}{y} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = 2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{y} \cdot y' dx = \int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{y} dy = \int 2 \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx \\
 &\Rightarrow \ln(y) + C_1 = 2 \ln(x) + C_2 \Rightarrow \ln(y) = 2 \ln(x) + C_3 \\
 &\Rightarrow y = e^{\ln(y)} = e^{2 \ln(x) + C_3} = e^{2 \ln(x)} \cdot e^{C_3} := (e^{\ln(x)})^2 \cdot C = x^2 \cdot C = C \cdot x^2 \Rightarrow y(x) = C \cdot x^2
 \end{aligned}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow C \cdot 1^2 = C = 1 \quad \Rightarrow y_{\text{part}}(x) = x^2$$

2.3.3 Randwertprobleme

Eine vom Anfangswertproblem verschiedene Problemstellung begegnet uns in den **Randwertproblemen**.

Die Art dieser Problemstellung ist aus dem nachfolgenden Beispiel ersichtlich. (In diesem Kurs wird weiter nicht auf diese Problemstellung eingegangen.)

Bsp.: **D'Gl : (RWP)**

$$\begin{aligned} y'' &= \lambda y \\ y(0) &= 0 \quad (*) \\ y(\pi) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Die Gleichungen $(*)$ sind die **Randbedingungen**.

Allgemein lauten hier die Randbedingungen: $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$
Gesucht ist dann eine Lösung im Intervall $[x_1, x_2]$.

λ heisst hier **Eigenwert** \leadsto „Eigenwertproblem“.

Man kann sofort Lösungen erraten:

$$y_1(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \sin(2x), \quad y_3(x) = \sin(3x), \quad \dots, \quad y_n(x) = \sin(nx), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Es fällt auf, dass z.B. $y(x) = \cos(nx)$ zwar die Differentialgleichung erfüllt, nicht aber die Randbedingungen!

2.3.4 Veränderte Problemstellung

Bei Differentialgleichungen 1. Ordnung $y'(x) = f(x, y)$ kann man versuchen, statt die Lösungen die orthogonalen Trajektorien $y_{\perp}(x)$ zu suchen.

Denn es gilt: $y'_{\perp}(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)} \quad \forall x_0 \in D_y$

Bsp.: Sei (a) $y(x) = y_C(x) = C \cdot \sin(x) \Rightarrow y'(x) = C \cdot \cos(x)$

$$\Rightarrow \frac{y_C(x)'}{y_C(x)} = \frac{C \cdot \cos(x)}{C \cdot \sin(x)} = \cot(x) \quad \forall_C \leadsto y_C'(x) = y_C(x) \cdot \cot(x)$$

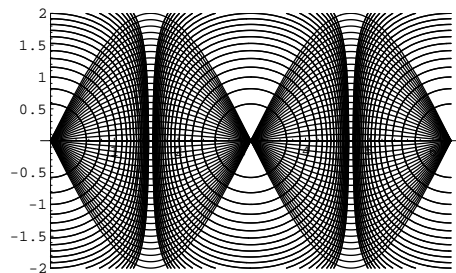
(b) $P = P(x, y)$, $P_0 = P(x_0, y_0) = P(x_0, y_C(x_0)) \leadsto y_C(x_0) = y_{\perp, B}(x_0)$
 C, B Parameter \leadsto

$$\begin{aligned} y_C'(x_0) &= y_C(x_0) \cdot \cot(x_0) = y_{\perp, B}(x_0) \cdot \cot(x_0) = -\frac{1}{y'_{\perp, B}(x_0)} \Rightarrow y'_{\perp, B}(x_0) \cdot y_{\perp, B}(x_0) = -\tan(x_0) \quad \forall_{B, x_0} \\ \Rightarrow y'_{\perp, B}(x) \cdot y_{\perp, B}(x) &= -\tan(x) \end{aligned}$$

Sei $y_{\perp, B}(x) := z(x)$
 $\Rightarrow z'(x) \cdot z(x) = -\tan(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int z'(x) \cdot z(x) dx &= \int z(x) \cdot \frac{dz}{dx} dx \\ &= \int z dz = \frac{1}{2} z^2 + B_1 = - \int \tan(x) dx \\ &= \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = \ln(|\cos(x)|) + B_1 \end{aligned}$$

$$\leadsto \Rightarrow z(x)^2 = \ln(\cos^2(x)) + B \Rightarrow z(x) = y_{\perp, B}(x) = \sqrt{\ln(\cos^2(x)) + B}$$



2.4 Existenz und Eindeutigkeit

Bemerkung:

Die **Existenz** einer Lösung einer expliziten D'Gl $y^{(n)}(x) = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$ lässt sich allgemein für **stetige** Funktionen f beweisen, **nicht** aber die **Eindeutigkeit**.

(Die Beweise sind im allgemeinen recht tieflegend und bauen üblicherweise auf Funktionalanalysis, worauf hier nicht eingegangen wird. Der Eindeutigkeitsbeweis gelingt unter der Voraussetzung einer **Lipschitzbedingung**, die später besprochen wird.)

2.4.1 Existenzsatz von Peano

Zur Vereinfachung wollen wir hier Differentialgleichungen 1. Ordnung diskutieren. Für D'Gl höherer Ordnung kann man eine ähnliche Betrachtung führen, muss aber Vektorräume mit speziellen Abstandsbegriffen zu Hilfe nehmen, was die Sache ein wenig kompliziert.

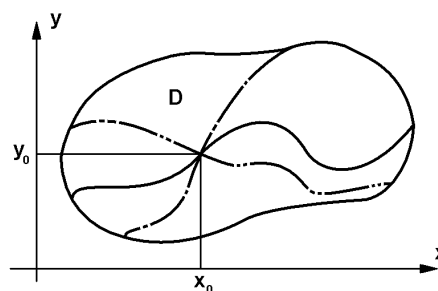
Sei D ein vernünftiges Gebiet.

Satz:

(Peano)

Vor.:

- 1) f stetig in $D \subseteq \mathbb{R}^2$
- 2) $y' = f(x, y)$ in D



Beh.: $\forall (x_0, y_0) \in D$: Durch (x_0, y_0) geht mindestens eine Integralkurve, die bis zum Rand von D verläuft.

2.4.2 Eindeutigkeit einer Lösung

Wir betrachten auch hier vorerst nur Differentialgleichungen 1. Ordnung.

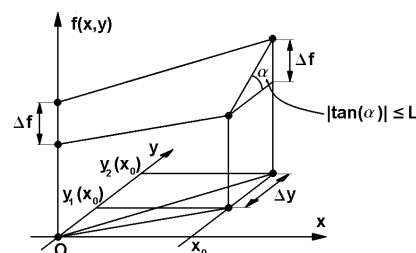
Definition:

f genügt in D bezüglich y einer **Lipschitzbedingung**

$$\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}^+ : \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

Symbol: $f \in \mathcal{Lipschitz}$

L heisst **Lipschitzkonstante**.

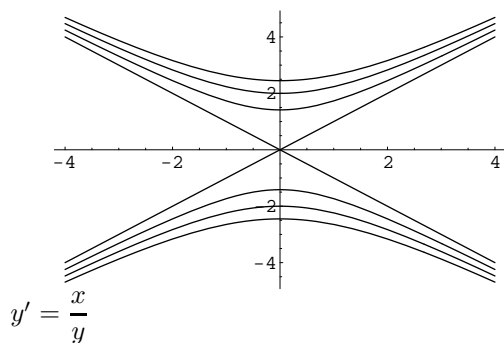
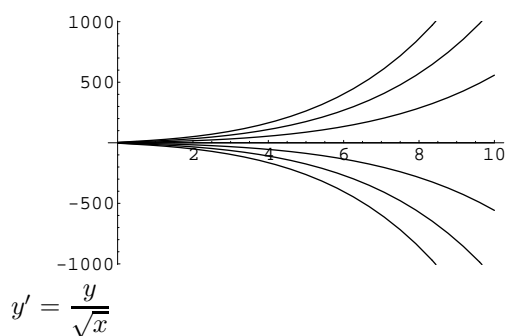


Bemerkung:

Die Lipschitzbedingung ist eine schwächere Bedingung als die Differenzierbarkeit!

Lipschitz: $Q(f, x, y_1(x), y_2(x)) := \left| \frac{f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)} \right| \leq L, \quad y_1(x) \neq y_2(x)$

Diff'barkeit: $\lim_{y_2 \rightarrow y_1} Q(f, x, y_1(x), y_2(x)) \text{ ex.}$

**Satz:****Vor.:**

- 1) f diff'bar in $U_\delta(y_0)$
- 2) f'_y beschränkt($U_\delta(y_0)$)

Beh.:

f genügt in $U_\delta(y_0)$ einer Lipschitzbedingung

Zum Beweis:

Sei $\Delta x > 0 \Rightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = \frac{|\Delta y|}{\Delta x} \rightarrow |y'| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

Analog:

$|f'_y| = \left| \frac{df}{dy} \right|$ mit $|f'_y| \leq k$ in $U_\delta(y_0)$ (f beschränkt) \Rightarrow

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \int_{f(x, y_2)}^{f(x, y_1)} df \right| \leq \left| \int_{f(x, y_2)}^{f(x, y_1)} |df| \right| = \left| \int_{y_2}^{y_1} \frac{df}{dy} dy \right| \leq \left| \int_{y_2}^{y_1} k dy \right| = k \cdot |y_1 - y_2|$$

Wähle: $L := k \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k \cdot |y_1 - y_2| = L \cdot |y_1 - y_2|$ (Lipschitz)

**Bedeutung von L :**

Sei f diff'bar in $U_\delta(y_0) \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$

$\Rightarrow L \geq \frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \Rightarrow |f'_y| = \lim_{y_2 \rightarrow y_1} \frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L \Rightarrow |f'_y| \leq L$

Konsequenzen: L ist eine Schranke für $|f'_y|$

Weiter folgt aus der Lipschitzbedingung:

1. $y' = e^y \cdot \sin(x) \rightsquigarrow f(x, y) := e^y \cdot \sin(x) \in \text{diff}'\text{bar}(D_f)$, $D_f = \mathbb{R} \times [-20, 20]$
 (d. h. $y \in [-20, 20]$) $\Rightarrow |f'_y| \in \text{beschränkt}(D_f)$

Wähle: $L = \text{Max}_{(x,y) \in D_f} |f'_y| + 1 \Rightarrow f \in \mathcal{Lipschitz}(D_f)$
 \Rightarrow AWP eindeutig lösbar!

2. $y'(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2} \cdot x^2 \Rightarrow f(x, y) = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} \cdot x^2$, $f'_y(x, y) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \cdot x^2$
 $\Rightarrow |f'_y(x, y)| = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \cdot x^2 \rightarrow \infty$ für $y \rightarrow 0$, $x = \text{const.} \neq 0$

Sei $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow |f'_y(x, y)| \notin \text{beschränkt}(D_f)$
 (Dasselbe gilt für: $D_f = \{(x, 0) \mid x \neq 0\}$)

\rightsquigarrow Wegen $|f'_y| \leq L$ gilt somit: $f \notin \mathcal{Lipschitz} !!$

Problem: Was passiert mit der Lösung für $(x, y) = (x_0, 0)$? (Wegen der Stetigkeit von f ist die Existenz einer Lösung zu erwarten. Wegen der Verletzung der Lipschitzbedingung kann diese Lösung aber nicht eindeutig sein!)

Lösung:

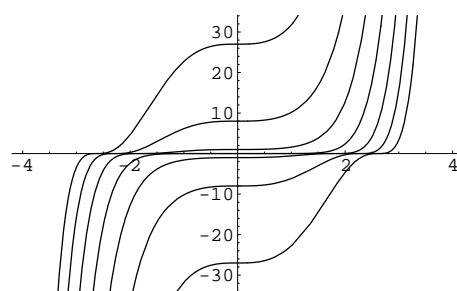
$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} \cdot x^2 \Rightarrow \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int \frac{3}{2} \cdot x^2 dx \Rightarrow 3 y^{\frac{1}{3}} + C_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C_2 \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} x^3 + C$$

$$\rightsquigarrow y(x) = \left(\frac{1}{6} x^3 + C\right)^3 := (u + C)^3 := g(u), \quad u(x) := \frac{1}{6} x^3 \quad (u \text{ bijektiv.})$$

Es gilt: $g'_u = 3(u + C)^2$, $g''_u = 6(u + C) = 6u + 6C = 6u + C_6 = 0$ für $u_0 = \frac{-C_6}{6} = C_0 \rightsquigarrow$
 $g''(u_0) = g'(u_0) = g(u_0) = 0 \rightsquigarrow$

$(C_0, 0) = (u_0, 0) \in \{(u, g(u))\}$
 (Lösungskurve)

Die Punkte der Lösungskurve auf der x -Achse sind Wendepunkte mit horizontalen Tangenten



Da die bijektive Abbildung $x \mapsto u(x) = \frac{1}{6} x^3$ nur eine Ausdehnung der x -Achse bewirkt, gilt dasselbe auch für die Integralkurven $y(x)$

Das Bild zeigt, dass auf der x -Achse die Kurven auf verschiedene Weisen fortgesetzt werden können. Dort sind die Lipschitzbedingung und die Eindeutigkeit der Integralkurven verletzt.

Wichtig: Die Eindeutigkeit von Lösungen ist in Technik und Wissenschaft zentral. Systeme, die plötzlich in eine andere, ebenfalls existierende Lösung kippen können, können gefährlich sein.

Bemerkung:

Oft findet man in der Ingenieurliteratur den Existenz- und Eindeutigkeitssatz in folgender Formulierung (Picard–Lindelöf):

Satz:**Vor.:**

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ D_f &= \{(x, y) \mid x \in [a, b] \wedge y \in [c, d]\} \\ f(x, y), f'_y(x, y) &\in C[c, d] \\ P &= P(x_0, y_0) \text{ (AWP)} \end{aligned}$$

Beh.:

$$\begin{aligned} \forall P \in D_f \quad \exists! y = y(x) : \\ y \text{ Lösungskurve} \\ y' = f(x, y) \wedge y_0 = y(x_0) \end{aligned}$$

2.4.4 Beispiel mit einer singulären Lösung

Geg.: D'Gl

$$(y'(x) - 1)^3 = 27 \cdot (y(x) - x)^2$$

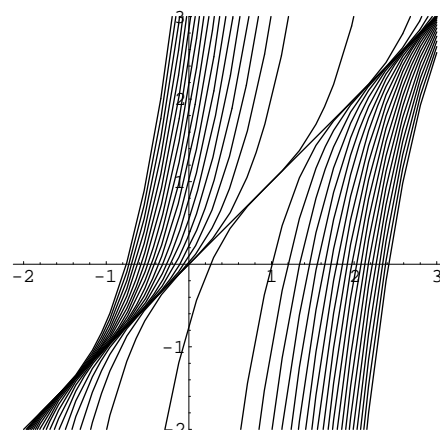
Man prüft sofort nach:

Allgem. Lös.:

$$y(x) = (x - C)^3 + x$$

Singuläre Lösung:

$$y(x) = x$$

**2.5 Gleichungstypen, Lösungsmethoden****2.5.1 Iterationsverfahren von Picard¹**

Betrachte: $y' = f(x, y), \quad x \in [x_0, x_0 + a], \quad f \in \mathcal{L}\text{ipschitz}$

Zugehörige Integralgleichung: $\int y' dx = y(x) + C = \int f(x, y) dx$

\leadsto AWP: $y'(x) = f(x, y) \wedge y(x_0) = y_0 \Rightarrow$ Lösung eindeutig!

Methode: Verwende die **Iterationsmethode**. In der Funktionalanalysis kann gezeigt werden, dass die folgende Funktionenfolge (Iterationsfolge) gegen eine Lösung konvergiert:

Start: $y_1(x) = y_0 = \text{const.}$ (y_0 wählen)

¹Emilie Picard, 1856 – 1941

Iteration: $y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt$

Bsp.:

AWP : $y' = y + x \Rightarrow f(x, y) = y + x, \quad y(0) = 0, \quad \neq 0 \quad (x \neq 0 \Rightarrow 0 + x \neq 0)$

Start: $y_1(x) = y_0 = 0$

Iteration: $y_2(x) = y_{1+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt = 0 + \int_0^x (0 + t) dt = \frac{1}{2} \cdot x^2$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x (y_2(t) + t) dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2} \cdot t^2 + t \right) dt = \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{2!} \cdot x^2$$

$$y_4(x) = 0 + \int_0^x (y_3(t) + t) dt = \int_0^x \left(\frac{1}{3!} \cdot t^3 + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + t \right) dt = \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{2!} \cdot x^2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$y_n(x) = 0 + \int_0^x (y_{n-1}(t) + t) dt = \dots = \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{1}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \dots + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{2!} \cdot x^2$$

$$\leadsto y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n \right) - x - 1 = e^x - x - 1$$

Kontrolle:

$$y' = y + x \Rightarrow (e^x - x - 1)' = e^x - 1 = (e^x - x - 1) + x + y = x, \quad y(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0 \leadsto \text{☺}$$

Problem: In der Praxis kann bei diesem Verfahren der Rechenaufwand enorm werden. Zwar erhält man eine Potenzreihe. Wenn aber das Bildungsgesetz nicht sichtbar wird, bleibt das Problem des Konvergenzradius und der Fehlerabschätzung.

Nun wollen wir uns etwas mit einfach lösbaren Gleichungstypen beschäftigen:

2.5.2 Separationsverfahren

Das Separationsverfahren oder die Methode der Variablentrennung haben wir bereits weiter oben praktiziert. (Vgl. Seite 13.) Jetzt wollen wir die Methode allgemeiner besprechen.

Definition: Eine D'Gl der Form $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$ heisst **separabel** oder separierbar.

Methode: $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{g(y)} = f(x), \quad g(y) \neq 0$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx \leadsto$$

Lemma:

Vor.:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y), \quad g(x) \neq 0$$

Beh.:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

Konsequenz:

Sei $G(y) := \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx = F(x) + C$. Sei $G^{-1}(y)$ definiert.

$$\leadsto y = G^{-1}(F(x) + C)$$

Beispiele:

1. **D'Gl** : $e^y \cdot y' - x^2 - x = 0 \Rightarrow y' = (x^2 + 2) \cdot e^{-y} = f(x) \cdot g(y) \leadsto$ separabel

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(y) &= \int \frac{1}{g(y)} dy = \int \frac{1}{e^{-y}} dy = \int e^y dy = e^y + C_1 \\ &= \int f(x) dx = \int (x^2 + 2) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C_2 \\ \Rightarrow e^y &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C \Rightarrow y = \ln\left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C\right) \end{aligned}$$

2. **D'Gl** : $y' = e^y \cdot \sin(x)$
 $\Rightarrow \int e^{-y} dy = \int \sin(x) dx \Rightarrow -e^{-y} = -\cos(x) - C \Rightarrow e^{-y} = \cos(x) + C$
 $\Rightarrow -y = \ln(\cos(x) + C), y = -\ln(\cos(x) + C)$

3. Elektrischer RC-Kreis (ohmscher Widerstand, Kondensator)

$$\text{AWP : } R \cdot C \cdot I' + I = 0 \Rightarrow U(t) = R \cdot I(t) = \text{const.} - \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_1} I(t) dt$$

$$\text{Sei } U_C(0) = \text{const.} = 0 \Rightarrow I = I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

4. **D'Gl** :

$$y' = -\text{sgn}(y) \cdot x \cdot \sqrt{|y|} = \begin{cases} -x \sqrt{+y} & y \geq 0 \\ +x \sqrt{-y} & y < 0 \end{cases}$$

Lösung: $y(x) = \frac{1}{16} (C - x^2)^2, x \in (-\sqrt{C}, +\sqrt{C}), C > 0$

5. **D'Gl** : $y' = y^2 + 1, y(0) = 0 \leadsto$

Lösung: $y(x) = \tan(x + n \cdot \pi), n \in \mathbb{Z}$

2.5.3 „Beinahe“ separable D'Gl

Begriffe: $P(x), Q(x)$ seien Polynome.

Die folgende Differentialgleichung nennen wir **beinahe separabel**:

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x)$$

Herleitung einer Lösungsformel:

1. Sei $Q(x) = 0$. $\leadsto y' = P(x) \cdot y$ ist separabel. \leadsto

$$\int P(x) dx = \int \frac{dy}{y} = \ln(|y|) + C_1 := \ln(|y|) - \ln(|C_2|) = \ln\left(\frac{|y|}{|C_2|}\right) \Rightarrow \frac{|y|}{|C_2|} = e^{(\int P(x) dx)}$$

$$\Rightarrow |y| = |C_2| \cdot e^{(\int P(x) dx)}, \quad y = C \cdot e^{(\int P(x) dx)}$$

2. Studiere:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y \cdot e^{-(\int P(x) dx)}) &= y' \cdot e^{-(\int P(x) dx)} + y \cdot e^{-(\int P(x) dx)} \cdot (-P(x)) \\ &= (y' - y \cdot P(x)) \cdot e^{-(\int P(x) dx)} = Q(x) \cdot e^{-(\int P(x) dx)} \\ \Rightarrow \int \frac{d}{dx}(y \cdot e^{-(\int P(x) dx)}) dx &= (y \cdot e^{-(\int P(x) dx)}) + C_1 = \int Q(x) \cdot e^{-(\int P(x) dx)} dx \Rightarrow \\ y(x) &= e^{(\int P(x) dx)} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-(\int P(x) dx)} dx - C_1 \right) = e^{(\int P(x) dx)} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-(\int P(x) dx)} dx + C \right) \end{aligned}$$

Satz:

Vor.:

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x),$$

$$P(x), Q(x) \text{ Polynome}$$

Beh.:

$$y(x) = (e^{(\int P(x) dx)}) \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-(\int P(x) dx)} dx + C \right)$$

Bsp.: D'Gl: $y' = 3x^2 \cdot y + x^2$

$$\leadsto P(x) = 3x^2, \quad Q(x) = x^2 \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{(\int 3x^2 dx)} \cdot \left(\int x^2 \cdot e^{-(\int 3x^2 dx)} dx + C \right) = e^{(x^3)} \cdot \left(\int x^2 \cdot e^{-(x^3)} dx + C \right) = \left(C - \frac{1}{3} \right) \cdot e^{(x^3)}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{(x^3)} + C_0$$

2.5.4 Substitutionsmethode

Bei gewissen Gleichungstypen lohnt sich eine Substitution.

Bsp.: Der Gleichungstyp $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Substituiere: $z := \frac{y}{x} \leadsto y = z \cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{dz \cdot x}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot x + z \cdot \frac{dx}{dx} \Rightarrow y' = z' \cdot x + z$

$$\leadsto z' = \frac{f(z) - z}{x} \Rightarrow \text{separabel}$$

Beispiele:

1. D'Gl: $x \cdot y' - y - x = 0 \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} := f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\Rightarrow y' = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} \Big|_{z=\frac{y}{x}} 1 + z = z' \cdot x + z$$

$$\Rightarrow z' \cdot x = 1, \quad z' = \frac{1}{x} \Rightarrow z = \ln(|x|) + C = \frac{y}{x} \Rightarrow y(x) = x \cdot (\ln(|x|) + C)$$

2. D'Gl: $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{2 \frac{y}{x}} = \frac{1 + (\frac{y}{x})^2}{2 \frac{y}{x}} = \frac{1 + (z)^2}{2z} = z' \cdot x + z$

$$\Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = \left(\frac{1 + (z)^2}{2z} - z \right) \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{2}z - z + \frac{1}{2z} \right) \cdot \frac{1}{x} = \left(-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2z} \right) \cdot \frac{1}{x}$$

↪ separabel

↪ **Lösung:** $z(x) = \pm \sqrt{\frac{x+C}{x}}, \quad y(x) = \pm \sqrt{x(x+C)}$

2.5.5 Exakte D'Gl

Wir betrachten: $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$

Nach der von der Variablentrennung her bekannten Vorgehensweise lässt sich diese Formel formal umschreiben in:

$$h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0$$

In diesem Ausdruck steht jetzt links ein totales Differential:

$$dF(x,y) = F_x' dx + F_y' dy = h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0$$

Das Problem ist hier die Existenz der Funktion $F(x,y)$.

Falls also eine Funktion $F(x,y)$ existiert mit $F_x' = g(x,y)$ und $F_y' = h(x,y)$, so ist $F_x' dx + F_y' dy = h(x,y) dy + g(x,y) dx$ ein totales Differential.

Diese Erkenntnis können wir benutzen, um die Differentialgleichung zu lösen:

↪ $h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0 = dF \Rightarrow F(x,y) = \int dF = C = \text{const.}$

(Denn $dF = 0$ ist nur gültig für $F = \text{const.}$)

Konsequenz: $y(x)$ ist jetzt durch $F(x,y) = C$ implizit gegeben. Falls sich diese Gleichung nach y auflösen lässt, hat man die explizite Lösung.

Daher definieren wir:

Definition:

Eine formale D'Gl der Form $h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0$ heisst **exakt** in D , falls in D eine Funktion $F(x,y)$ existiert mit $F_x' = g(x,y)$ und $F_y' = h(x,y)$.
 F heisst dann **Stammfunktion**.

Korollar:

Eine exakte D'Gl $h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0$ lässt sich als totales Differential $dF = F_x' dx + F_y' dy$ interpretieren. Damit kennt man die implizite Lösung $F(x,y) = C$. Die explizite Lösung findet man durch auflösen dieser Gleichung, falls möglich.

Bei „anständigen“ Funktionen gilt $F_{xy}'' = F_{yx}''$. Daher muss bei einer exakten Differentialgleichung entsprechend gelten: $g_y' = h_x'$ (notwendige Bedingung).

Lemma:

Vor.:

D'Gl

$$h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0, \quad g_y' = h_x'$$

Beh.:

Die D'Gl ist exakt.

Beispiele:

$$1. \text{ D'Gl } y' = -\frac{y^2 \cdot e^{xy} + 3x^2 y}{x^3 + (1+xy)e^{xy}} \Rightarrow (y^2 \cdot e^{xy} + 3x^2 y) dx + (x^3 + (1+xy)e^{xy}) dy = 0$$

$$\leadsto g_y' = 3x^2 + 2e^{xy}y + e^{xy}xy^2 = h_x' \quad \text{☺}$$

Falls die D'Gl exakt ist, gilt:

$$F(x, y) = \int (y^2 \cdot e^{xy} + 3x^2 y) dx = \int (x^3 + (1+xy)e^{xy}) dy = C$$

$$\leadsto y \cdot e^{xy} + x^3 y + C(y) = x^3 y + \frac{1}{x} e^{xy} + y \cdot e^{xy} - \frac{1}{x} e^{xy} + C(x) \Rightarrow C(y) = C(x) = C_0 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow F(x, y) = y \cdot e^{xy} + x^3 y + C_0 \text{ Stammfunktion.}$$

$$\leadsto y(x) \text{ ist Lösung von: } y \cdot e^{xy} + x^3 y = C$$

$$2. \text{ D'Gl } y'(1+x^2) + 2xy = 0 \Rightarrow 2xy dx = (1+x^2) dy, \quad (2xy)'_y = 2x = (1+x^2)'_x$$

$$\Rightarrow F(x, y) = x^2 y + y + C_0 \text{ Stammfunktion} \Rightarrow x^2 y + y = C, \quad y(x) = \frac{C}{1+x^2}$$

2.5.6 Eulersche Multiplikatoren

Beispiel

$$y' = -\frac{y}{2x} \Rightarrow y dx + 2x dy = 0 \leadsto g_y' = 1, \quad h_x' = 2 \leadsto \text{D'Gl nicht exakt!}$$

Problem: Lässt sich die Sache doch noch retten? — Ja! Man kann die D'Gl „künstlich“ exakt machen. Dazu braucht es die **Eulerschen² Multiplikatoren**.

Idee: Multipliziere die D'Gl mit y .

$$\leadsto y dx + 2x dy = 0 \mid \cdot y \Rightarrow y^2 dx + 2xy dy = 0 \leadsto \text{exakt!}$$

$$\Rightarrow F_1(x, y) = x y^2 + C_0 \quad \textbf{Lösung:} \quad x y^2 = C \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{C}{x}} = \frac{C_1}{\sqrt{|x|}}$$

Achtung: Eulersche Multiplikatoren sind nicht immer eindeutig!

Bsp.: Für $x > 0$ führt die Multiplikation der Gleichung mit $\frac{1}{\sqrt{x}}$ auf folgende exakte D'Gl:

$$\frac{y}{\sqrt{x}} dx + 2\sqrt{x} dy = 0$$

$$\leadsto y x^{-\frac{1}{2}} dx + 2x^{\frac{1}{2}} dy = 0 \Rightarrow F_2(x, y) = 2y \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2y \cdot \sqrt{x} = C$$

$$\leadsto \textbf{Lösung:} \quad y(x) = \frac{C}{2\sqrt{x}} = \frac{C_1}{\sqrt{x}}$$

\leadsto Lösung von oben!

²Leonard Euler, 1707 – 1783

Allgemeinere Beschreibung des Verfahrens

Sei $h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0$, $g(x, y), h(x, y) \in \text{stetig}(D)$ (D'Gl:)

Sei $M(x, y) \not\equiv 0$ in D

Definition:

$M(x, y) \cdot h(x, y) dy + M(x, y) \cdot g(x, y) dx = 0$ exakt
 $\Rightarrow M(x, y)$ heisst **integrierender Faktor** oder **Eulerscher Multiplikator**

Bemerkung:

1. Die Eulerschen Multiplikatoren werden manchmal fälschlicherweise „Multiplikatoren von Lagrange“ genannt. Der aus Turin stammende „Italiener“ Lagrange war 1766 in Berlin, wo auch Euler arbeitete. Später wirkte Lagrange in Paris.
2. Die Bestimmung des integrierenden Faktors ist im allgemeinen schwierig. In gewissen bekannten Fällen gelingt sie jedoch recht gut.

Beispiel eines Spezialfalles:

Seien $g(x, y), h(x, y), M(x, y) \in C^1$ (stetig diff'bar)

Sei $F''_{x,y} = F''_{y,x} \Rightarrow (M(x, y) \cdot g(x, y))_y' = (M(x, y) \cdot h(x, y))_x'$

\leadsto Partielle Differentialgleichung $M_y' \cdot g + M \cdot g_y' = M_x' \cdot h + M \cdot h_x'$

$\Rightarrow M = \frac{M_x' \cdot h - M_y' \cdot g}{g_y' - h_x'} \leadsto M$ eventuell modellierbar.

Speziell: $M(x, y) = M(x) \Rightarrow M_y' \equiv 0$

$\Rightarrow \frac{M_x'}{M} = \frac{g_y' - h_x'}{h} = (\ln(M))_x' \Rightarrow \ln(M) = \int \frac{g_y' - h_x'}{h} dx + C \Rightarrow M = M(x) = e^{(\int \frac{g_y' - h_x'}{h} dx + C)}$

Satz:**Vor.:**

$$M(x, y) = M(x)$$

Beh.:

$$\frac{M_x'}{M} = \frac{g_y' - h_x'}{h}, \quad M = M(x) = e^{(\int \frac{g_y' - h_x'}{h} dx + C)}$$

Beispiele:

$$1. \text{ D'Gl: } y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1)x_t' + (3y^2 + x)y_t' = 0, \quad x_t' = \frac{dx}{dt}, \quad y_t' = \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1)dx + (3y^2 + x)dy = gdx + gdy = 0, \quad g_y' \neq h_x'$$

Versuche: $M = M(x)$,

$$\frac{M_x'}{M} = \frac{g_y' - h_x'}{h} = \frac{1 \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1) + y \cdot (2 \cdot 2xy) - 1}{(3y^2 + x)} = \frac{2x^2 + 6xy^2}{x + 3y^2} = 2x := q(x) \Rightarrow M = M(x)!!$$

$$\Rightarrow M(x) = e^{\left(\int \frac{g'_y - h'_x}{h} dx + C_0\right)} = e^{\left(\int 2x dx + C_0\right)} = e^{(x^2 + C_1)} = e^{(x^2)} \cdot C \quad C \text{ ist frei wählbar (nur ein Multiplikator notwendig!)}. \quad \Rightarrow C := 1, M = e^{(x^2)}$$

$$\Rightarrow \text{D'Gl } e^{(x^2)} \cdot y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1) dx + e^{(x^2)} \cdot (3y^2 + x) dy \quad \text{exakt.}$$

$$\begin{aligned} e^{(x^2)} \cdot y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1) dx + e^{(x^2)} \cdot (3y^2 + x) dy &= F'_x dx + F'_y dy \\ \Rightarrow F(x, y) = \int F'_y dy &= \int e^{(x^2)} \cdot (3y^2 + x) dy = e^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) + C_1(x) \\ \Rightarrow F'_x &= \frac{d}{dx} e^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) + C_1(x) = 2xe^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) + e^{(x^2)} \cdot y + C_1(x)' \stackrel{?}{=} e^{(x^2)} \cdot y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1) \end{aligned}$$

☺

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_1(x)' &= 0, \quad C_1(x) = C_0 = \text{const.} \quad \Rightarrow F(x, y) = e^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) = C \\ \leadsto y &= - \left(\frac{2^{\frac{1}{3}} e^{x^2} x}{(27 C e^{2x^2} + \sqrt{729 C^2 e^{4x^2} + 108 e^{6x^2} x^3})^{\frac{1}{3}}} \right) + \frac{(27 C e^{2x^2} + \sqrt{729 C^2 e^{4x^2} + 108 e^{6x^2} x^3})^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} e^{x^2}} \end{aligned}$$

2. Beispiel mit Variablentrennung

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = (x - 1)^2 y dx + x^2 (y + 1) dy = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(x, y) &= (x - 1)^2 y = M_1(x) \cdot N_1(y), \quad h(x, y) = x^2 (y + 1) = M_2(x) \cdot N_2(y) \\ g(x, y) dx + h(x, y) dy &= M_1(x) \cdot N_1(y) dx + M_2(x) \cdot N_2(y) dy \end{aligned}$$

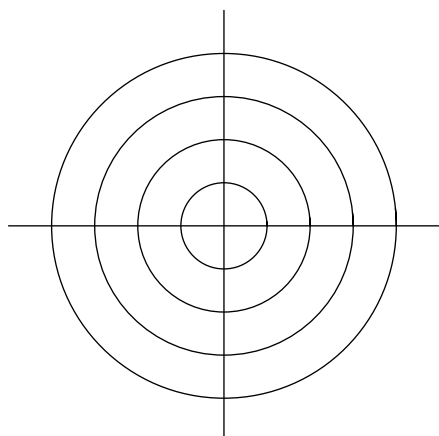
$$\begin{aligned} \text{Idee:} \quad \text{Wähle:} \quad M &= \frac{1}{N_1(y) \cdot M_2(x)} \\ \Rightarrow M \cdot g(x, y) dx + M \cdot h(x, y) dy &= \frac{M_1(x) \cdot N_1(y)}{N_1(y) \cdot M_2(x)} dx + \frac{M_2(x) \cdot N_2(y)}{N_1(y) \cdot M_2(x)} dy = \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy \\ \leadsto \text{D'Gl} \quad g_1(x) dx + h_1(y) dy &= F'_x dx + F'_y dy = 0 \quad \text{mit} \\ F(x, y) &= G(x) + H(y) + C, \quad g_1(x) = G'_x, \quad h_1(y) = H'_y, \quad ((g_1)'_y = 0 = (h_1)'_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \text{D'Gl} \quad \frac{(x-1)^2}{x^2} dx &= \frac{y+1}{y} dy = 0 \quad \Rightarrow F(x, y) = \int \frac{(x-1)^2}{x^2} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \\ x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + C_1(y), \quad F(x, y) &= \int \frac{y+1}{y} dy = \int \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = y + \ln(|y|) + C_2(x) \quad \Rightarrow \\ x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + C_1(y) &= G(x) + C_1(y) = H(y) + C_2(x) = y + \ln(|y|) + C_2(x) \quad \Rightarrow \\ C_1(x) &= x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + C_0 \quad \wedge \quad C_2(y) = y + \ln(|y|) + C_0 \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = \\ x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + y + \ln(|y|) + C_0, \quad x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + y + \ln(|y|) &= C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \dots \end{aligned}$$

Hier lässt sich z.B. $x(y)$ einfach berechnen. $y(x)$ kann man daraus graphisch ermitteln. Ein anderer Weg ergibt sich mit einer Approximation der Ausdrücke durch Taylorpolynome.

2.5.7 Eine Anwendung: Einhüllende einer Kurvenschar

1. Beispiel: $\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - c^2 = 0, \quad c = r \leadsto$ Konzentrische Kreise, keine Einhüllende!



$$\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - c^2 = 0, \quad c = r$$

2. Beispiel: Kurvenschar rechts: $\Phi(x, y, c) = 0$
 c : Scharparameter

Wir nehmen an, dass in diesem Fall zur Kurvenschar eine Kurve existiert, die dem entspricht, was man sich als „Einhüllende“ etwa vorstellen kann. Es gilt nun, diese Einhüllende exakt zu definieren:

Definition:

γ ist **Einhüllende** der Kurvenschar $S = \{\gamma_i\} \Leftrightarrow$

- (1) γ ist Kurve, $\gamma: t \mapsto \vec{r}(t)$
- (2) $|\gamma|$ berührt in jedem Punkt $P_i(x_i, y_i)$ genau eine Kurve $|\gamma_i|$ der Schar S .

Konsequenz: $\forall P_i(x_i, y_i) \in |\gamma| \exists c_i, \gamma_i: c = c(x_i, y_i) \wedge \Phi(x_i, y_i, c(x_i, y_i)) = 0$

„Berühren“ \leadsto gleiche Tangentensteigungen!

Untersuchung der Tangentensteigungen:

1. $\underline{\gamma}$: $\Phi(x, y, c(x, y)) = 0 \Rightarrow d\Phi = 0 \Rightarrow d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial c} dc = 0, \quad dc = \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy$
 $\Rightarrow d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} dy = 0$
 $\Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$
2. $\underline{\gamma}$: $\Phi(x, y, c_i) = 0 \wedge c = c_i = \text{const.} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \Rightarrow d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$
 $\Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$
3. $\underline{\gamma = \gamma_i}$: $c = c_i, P = P_i$, Steigung $\frac{dy}{dx}|_{\gamma} = \frac{dy}{dx}|_{\gamma_i}, (x_i, y_i, c_i)|_{\gamma} = (x_i, y_i, c_i)|_{\gamma_i}$
 $\Rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{|_{\gamma}} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{|_{\gamma_i}}$
 $\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$

Schar: c ist veränderlicher Parameter

$$\leadsto \Phi(x, y, c) = 0 \Rightarrow c = c(x, y), \quad \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \neq 0 \quad (\text{Sonst müsste } c(x, y) = \text{const.} \neq \text{veränderlich sein.})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \leadsto \text{D'Gl für } \Phi!$$

Damit erhalten wir:

Satz: Die Einhüllende γ ist durch die folgenden Bedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Phi(x, y, c) = 0 \\ (2) \quad & \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{aligned}$$

Damit gelingt es, Einhüllende von Kurvenscharen zu berechnen.

Bsp.: „Sicherheitslinie“ als Einhüllende einer Schar von Schussparabeln, Abschusswinkel α .

$$1. \quad y - cx + a(1 + c^2)x^2 = 0, \quad y = cx - a(1 + c^2)x^2$$

$$2. \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 = -x + a x^2 \cdot 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2ax} \Rightarrow y = -a x^2 + \frac{1}{4a} \leadsto \text{Parabel!}$$

2.6 Theorie der linearen D'Gl

2.6.1 Einführung, Definitionen

Definition: Eine D'Gl n -ter Ordnung heisst **linear**, falls sie linear ist in $y, y', \dots, y^{(n)}$:

$$\sum_{j=0}^n y^{(j)}(x) \cdot a_j(x) = b(x), \quad a_n(x) \neq 0, \quad a_j(x), b(x) \in \text{stetig}$$

$b(x) \equiv 0 \leadsto$ das System heisst **homogen**

$b(x) \neq 0 \leadsto$ das System heisst **inhomogen**

Die Verallgemeinerung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Systeme und somit für D'Gl höherer Ordnung sagt, dass für lineare D'Gl das AWP immer eindeutig lösbar ist.

Bekanntlich können wir eine solche D'Gl höherer Ordnung wie folgt als System 1. Ordnung schreiben:

$$\left| \begin{array}{lcl} y(x) : & = & z_0(x) \\ y'(x) : & = & z_1(x) = z'_0(x) \\ \vdots & = & \vdots \\ y^{(n)}(x) & = & z_n(x) = z'_{n-1}(x) = \frac{b(x)}{a_n(x)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j(x)}{a_n(x)} \cdot z_j(x) \end{array} \right|$$

Vektorschreibweise: Sei :

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}, \quad \vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_0(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \vec{z}'(x) = A(x) \cdot \vec{z}(x) + \vec{b}(x)$$

Beispiele:

1. $y \cdot y''' + y'' = e^{-x} \leadsto$ nicht linear
2. $(y''')^2 + y^3 = 0 \leadsto$ nicht linear
3. $5x^2 \cos(x) \cdot y' - 2y'' \cdot x \cdot e^{\cosh(x)} + 6y = 0 \leadsto$ linear, homogen
4. $4y' - \sqrt{x} y''' + \tan(x) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot y = \sin(x) \leadsto$ linear, inhomogen
5. $\cos(y') + y = 0 \leadsto$ nicht linear

2.6.2 Homogenes System

LK von Lösungen

Sei $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $a_j(x) := a_j$.

y_i Lösung des homogenen Problems. $\leadsto y_i \in \mathbb{L}_{hom} \leadsto$

1. $\sum_{j=0}^n a_j \cdot y_i^{(j)} = 0 \Rightarrow \lambda_k \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_i^{(j)} = \sum_{j=0}^n a_j \cdot (\lambda_k y_i^{(j)}) = 0 \Rightarrow \lambda_k \cdot y_i(x) \in \mathbb{L}_{hom}$
2. $\sum_{j=0}^n a_j \cdot y_1^{(j)} = 0 \wedge \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_2^{(j)} = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_1^{(j)} + \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_2^{(j)} = \sum_{j=0}^n a_j \cdot (y_1^{(j)} + y_2^{(j)}) = 0$
 $\Rightarrow (y_1(x) + y_2(x)) \in \mathbb{L}_{hom}$

Satz:

Vor.:

$$y_1, \dots, y_k \in \mathbb{L}_{hom}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

Beh.:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot y_i \in \mathbb{L}_{hom}$$

Definition:

Eine Funktionenmenge $\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ heisst **linear unabhängig** (l.u.) \Leftrightarrow

$$\forall \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot f_i(x) \equiv 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} : \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

Bsp.: $\{f_1(x), f_2(x)\} = \{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$ l.u. für $\alpha \neq \beta$:

Sei $\lambda_1 \cdot e^{\alpha x} + \lambda_2 \cdot e^{\beta x} = 0 \wedge \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ (Annahme)

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(\lambda_1 + \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x}) = \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} \cdot (\beta - \alpha) = 0$$

$$\lambda_2 \neq 0 \wedge \beta \neq \alpha \wedge e^{(\beta-\alpha)x} \neq 0 \wedge \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} \cdot (\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow \text{Widerspruch!}$$

\leadsto Annahme $\lambda_2 \neq 0$ falsch! Sei $\lambda_2 = 0$

$$\leadsto \lambda_1 + \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} = \lambda_1 + 0 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} = \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$



Die Wronskideterminante

Seien $\vec{y}_0 = \vec{y}_0(x), \dots, \vec{y}_n = \vec{y}_n(x), \vec{y}_j(x) = \begin{pmatrix} y_j(x) \\ y_j'(x) \\ \vdots \\ y_j^{(n)}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

Konstruiere Matrix:

$$Y = Y(x) = (\vec{y}_0, \dots, \vec{y}_n) = \begin{pmatrix} y_0(x) & \dots & \dots & y_n(x) \\ y_0^{(n)}(x) & \dots & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

Definition:

$W = W(x) := \det(Y(x))$ heisst **Wronskideterminante**

Satz:

Vor.:

$$\{y_0(x), \dots, y_n(x)\} \in \mathcal{C}^{(n)} \text{ (} n \text{ mal stetig diff'bar)}$$

Beh.:

$$\{y_0(x), \dots, y_n(x)\} \text{ l.a.} \Leftrightarrow W(x) \equiv 0$$

Beweis für das Beispiel $n = 1$ (2×2 -Matrix)

$$1. (y_0(x) \equiv 0) \vee (y_1(x) \equiv 0) \Rightarrow W(x) \equiv 0 \text{ (Spalte} = 0 \text{)}$$

$$2. \text{ Sei } (y_0(x) \neq 0) \wedge (y_1(x) \neq 0)$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_0(x) & y_1(x) \\ y_0'(x) & y_1'(x) \end{vmatrix} \equiv 0 \Leftrightarrow W(x) = y_0(x) \cdot y_1'(x) - y_1(x) \cdot y_0'(x) \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow y_0(x) \cdot y_1'(x) \equiv y_1(x) \cdot y_0'(x) \Leftrightarrow y_0(x) \cdot \frac{dy_1}{dx} \equiv y_1(x) \cdot \frac{dy_0}{dx} \Leftrightarrow y_0 \cdot \frac{dy_1}{dx} dx \equiv y_1 \cdot \frac{dy_0}{dx} dx$$

(Ausnahme: Diskrete Punkte, wo der Nenner 0 sein könnte \leadsto Fall $y_0(x), y_1(x) \neq 0$.)

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy_1}{y_1 dx} dx \equiv \int \frac{dy_0}{y_0 dx} dx \Leftrightarrow \int \frac{dy_1}{y_1(x)} \equiv \int \frac{dy_0}{y_0(x)} \Leftrightarrow \ln(|y_1(x)|) \equiv \ln(|y_0(x)|) + C_0$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(|y_1(x)|)} = |y_1(x)| \equiv e^{\ln(|y_0(x)|) + C_0} = |y_0(x)| \cdot e^{C_0} = C \cdot |y_0(x)| \Rightarrow |y_1(x)| \equiv C \cdot |y_0(x)|$$

Wegen der stetigen Diff'barkeit im Definitionsbereich gilt die letzte Äquivalenz auch an den eventuellen diskreten Ausnahmepunkten.

$|y_1(x)| \equiv C \cdot |y_0(x)|$ bedeutet bei diff'baren Funktionen:

$$y_0(x), y_1(x) \neq 0 \Rightarrow y_1(x) \equiv \pm C \cdot y_0(x) \quad \text{d. h.} \quad \{y_0(x), y_1(x)\} \text{ l.a.}$$

Bsp.: Sei $a \neq 0$, $M = \{\sin(ax), \cos(ax)\}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin(ax) & \cos(ax) \\ a \cos(ax) & -a \sin(ax) \end{vmatrix} = -a(\sin^2(ax) + \cos^2(ax)) = -a \neq 0 \Rightarrow M \text{ l.u.}$$

Anwendung der Wronskideterminante

1. D'Gl 1. Ordnung: $y' = a(x) \cdot y$, $y(x_0) = y_0$ (**AWP**)

AWP eindeutig lösbar, $W(x) = y(x) \neq 0$ für $y_0 \neq 0$

2. D'Gl 2. Ordnung:

$$y'' = a_0(x) \cdot y + a_1(x) \cdot y', \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) \text{ sei vorläufig frei.}$$

\leadsto AWP unbestimmt. Durch $(x_0, y_0 = y(x_0))$ gehen mehrere Integralkurven, je nach dem Wert von $y'(x_0)$.

Zwei solche Kurven seien:

$$y_1(x), y_2(x) \text{ mit } y_1(x) \neq y_2(x), \quad y_1(x_0) = y_2(x_0).$$

Annahme: $W(x) \equiv 0$ (in I , $x_0 \in I$) $\Rightarrow \{y_1(x), y_2(x)\}$ l.a.

$$\leadsto \exists_{\lambda_1, \lambda_2 \neq 0} : \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \equiv 0 \Rightarrow y_2(x) \equiv -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} y_1(x) = \mu \cdot y_1(x)$$

$$y_0 := y_1(x_0) = y_2(x_0) \Rightarrow y_0 = y_2(x_0) = \mu \cdot y_1(x_0) = \mu \cdot y_0 \Rightarrow y_0 = \mu \cdot y_0 \Rightarrow (\mu = 1) \vee (y_0 = 0)$$

$$(1) \quad \text{Fall } y_1(x) \neq 0 \wedge \mu = 1 \Rightarrow y_1(x) \equiv y_2(x) \leadsto \text{Widerspruch!}$$

$$(2) \quad \text{Fall } y_1(x) \equiv 0 \wedge \mu = 1 \Rightarrow y_1(x) \equiv y_2(x) \leadsto \text{Widerspruch!}$$

$$(3) \quad \text{Fall } y_0 = 0, \Rightarrow y_0 = y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0 \\ \text{Eindeutigkeit der Lösung} \leadsto y_1(x) \equiv y_2(x).$$

Konsequenz:

Vor.: $y_1(x) \neq y_2(x), \quad y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$

Beh.: $W(x) \equiv 0 \Rightarrow y_0 = 0$

Problem: Sei $W(x) \neq 0$ (in I), $x_0 \in I$, $\{y_1, y_2\}$ l.u.

Kann es sein, dass $W(x)$ trotzdem punktweise 0 werden kann in I ?

Untersuchung: Sei $W(x_1) = 0$, $x_1 \in I$

$$\leadsto W(x_1) = 0 \Rightarrow y_1(x_1) \cdot y_2'(x_1) = y_2(x_1) \cdot y_1'(x_1)$$

Es gilt: $\begin{pmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix}$, denn sonst müsste wegen der eindeutigen Lösung des AWP für x_1 gelten:
 $y_1(x) \equiv y_2(x)$.

Fall 1:

$$\text{Sei z.B.: } y_1(x_1), y_1'(x_1) \neq 0 \Rightarrow \frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)} = \frac{y_2'(x_1)}{y_1'(x_1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix}$$

$\leadsto y_1(x), y_2(x)$ Lösungen zu zwei verschiedenen AWP in x_1 (AWP_1, AWP_2) mit:

$y_2(x)$ und $\lambda \cdot y_1(x)$ sind ebenfalls auch zwei Lösungen von AWP_2 .

$$\Rightarrow \lambda \cdot y_1(x) = y_2(x) \Rightarrow \{y_1(x), y_2(x)\} \text{ l.a.} \Rightarrow W(x) \equiv 0$$

Fall 2:

Seien $y_1(x_1) = y_2(x_2) = 0$

$$\Rightarrow W(x_1) = y_1(x_1) \cdot y_2'(x_1) - y_2(x_1) \cdot y_1'(x_1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)} = \frac{y_2'(x_1)}{y_1'(x_1)} \text{ (Bernoulli!)}$$

Fall 2.1.:

Z.B. $y_1'(x_1) = 0 \Rightarrow y_1(x) \equiv 0$ Lösung von AWP_1 ,

$\leadsto \{y_1(x) \equiv 0, y_2(x)\} \text{ l.a.} \Rightarrow W(x) \equiv 0$

Fall 2.2.:

$$y_1'(x_1), y_2'(x_1) \neq 0 \Rightarrow \frac{y_2'(x_1)}{y_1'(x_1)} = \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix} \Rightarrow \{y_1(x), y_2(x)\} \text{ l.a.}$$

$$\Rightarrow W(x) \equiv 0 \text{ Wie in Fall 1.}$$

$\leadsto \Rightarrow W(x) \equiv 0$ in allen Fällen.

Ein analoges Resultat erhält man für lineare D'Gls höherer Ordnung.

Satz:

Vor.:

$W(x)$ = Wronski-Determinante einer linearen homogenen D'Gl der Ordnung n auf I .

$$\exists_{x_0 \in \mathbb{R}} : W(x_0) = 0$$

Beh.:

$$\forall_{x \in I} : W(x) \equiv 0$$

Konsequenz:

Korollar:**Vor.:**

Gegeben: Lineare homogene D'Gl der Ordnung n auf I .
 Für x_0 seien verschiedene Anfangsbedingungen gegeben.

Beh.:

Anfangsbedingungen $l.u.$ \Rightarrow zugehörige Lösungen $l.u.$.

Konsequenz:

Da es für eine eindeutige Lösung eines AWP mit einer linearen D'Gl n -ter Ordnung genau n Anfangsbedingungen braucht, die man als Vektor im \mathbb{R}^n vorgeben kann, sind alle möglichen Anfangsbedingungen eines solchen Problems mit Hilfe einer Basis des \mathbb{R}^n linear kombinierbar. Somit sind genau n verschiedene linear unabhängige Anfangsbedingungen möglich. Aus dem letzten Korollar folgt daher, dass eine lineare homogene D'Gl n -ter Ordnung immer genau n linear unabhängige Lösungen besitzt.

Satz:

1. Die Lösungen einer linearen homogenen D'Gl der Ordnung n bilden einen Vektorraum der Dimension n .
2. Sei $\{y_1, \dots, y_n\}$ eine Basis von n linear unabhängigen Lösungen. Die allgemeine Lösung hat dann die Form:

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot y_i$$

Bsp.: D'Gl : $y'' + y = 0$

Bekannte Lösungen: $y_1(x) = \sin(x)$, $y_2(x) = \cos(x)$, $\{\sin(x), \cos(x)\}$ $l.u.$

Denn: $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1^2 \sin^2(x) = (-\lambda_2)^2 \cos^2(x)$. Sei z.B.: $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \forall x : \sin^2(x) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 \cos^2(x)$

Wer nicht sofort sieht, dass das ein Widerspruch ist, braucht nur Werte wie $x = 0$ oder $x = \frac{\pi}{2}$ einzusetzen.

\leadsto Allgemeine Lösung: $y(x) = \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x)$

2.6.3 Inhomogenes System

Wir verwenden vorläufig die folgenden Schreibweisen:

$A = A(x)$, $\vec{b} = \vec{b}(x)$, $A \cdot \vec{y} = \vec{0}$ (Syst.hom.), $A \cdot \vec{y} = \vec{b}$ (Syst.inhom.)

Seien $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbb{L}_{inhom}$, $\vec{y} = \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$

$$A \cdot \vec{y}_1 = \vec{b}, \quad A \cdot \vec{y}_2 = \vec{b} \Rightarrow A \cdot (\vec{y}_1 - \vec{y}_2) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}_1 - \vec{y}_2 \in \mathbb{L}_{hom}$$

Umgekehrt:

Seien $\vec{y}_1 \in \mathbb{L}_{inhom}$, $\vec{y} \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow \vec{y}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}$ erfüllt:

$$A \cdot \vec{y}_2 = A \cdot (\vec{y}_1 + \vec{y}) = A \cdot \vec{y}_1 + A \cdot \vec{y} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b} \Rightarrow \vec{y}_2 \in \mathbb{L}_{inhom}$$

Sei $\vec{y}_p \in \mathbb{L}_{inhom}$ eine partikuläre Lösung.

Damit folgt:

Satz:

Vor.:

D'Gl $A \cdot \vec{y} = \vec{b}$, $\vec{y}_p \in \mathbb{L}_{inhom}$
 $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\} =$ Basis des homogenen
 Lösungsraumes $A \cdot \vec{y} = \vec{0}$

Beh.:

Die allgemeine Lösung \vec{y}_{inhom} hat die Form:

$$\vec{y}_{inhom} = \vec{y}_p + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{y}_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Bsp.: $y' - y = 1$

1. Homogenes Problem:

$$y' - y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = y, \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln(|y|) = x + C_0 \Rightarrow |y| = e^{x+C_0} = e^x \cdot e^{C_0} = e^x \cdot C_1 \\ \Rightarrow y(x) = e^x \cdot C$$

(Der Betrag kann hier weggelassen werden, da links und rechts des Gleichheitszeichens differenzierbare Funktionen stehen, die Tangentensteigung also keinen Knick haben kann.)

2. Inhomogenes Problem:

$$-y_p = 1 \Rightarrow y_p = -1, \quad y_p' - (-1) = 0 + 1 = 1 \rightsquigarrow \text{☺}$$

Diese Lösung kann man mit wenig Phantasie erraten.

3. $y_{inhom} = y_{hom} + y_p = C \cdot e^x - 1$

Um C festzulegen, ist eine Anfangsbedingung notwendig.

Bemerkung:

Diesen Typ von linearer D'Gl haben wir schon früher untersucht:

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x)$$

Das **homogene Problem** lösen wir durch **Separation der Variablen**:

$$y' = P(x) \cdot y \Rightarrow y_{hom} = e^{\int P(x) dx + C_1} = C \cdot e^{\int P(x) dx}$$

Eine **partikuläre Lösung** kann mit Hilfe der **Methode der Variation der Konstanten** (Lagrange) gefunden werden:

Ansatz: $y_p := C(x) \cdot e^{\int P(x) dx}$

Dieser Ansatz ist erlaubt, da es sich nur um eine implizite Definition von $C(x)$ handelt.

$$\Rightarrow y'_p = C'(x) \cdot e^{\int P(x) dx} + C(x) \cdot e^{\int P(x) dx} \cdot P(x) := P(x) \cdot \underbrace{C(x) \cdot e^{\int P(x) dx}}_{=y} + Q(x),$$

$$C'(x) = Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \Rightarrow C(x) = \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C_0$$

$$\Rightarrow y_{inhom} = y_{hom} + y_p = C_{hom} \cdot e^{\int P(x) dx} + \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C_0 \right) \cdot e^{\int P(x) dx}$$

$$\Rightarrow y_{inhom} = e^{\int P(x) dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C \right)$$

Formel:

Vor.:

D'Gl $y' = P(x) \cdot y + Q(x)$

Beh.:

$$y_{inhom} = e^{\int P(x) dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C \right)$$

1. Beispiel:

D'Gl $y' = -2x \cdot y + 4x \Rightarrow -2x = P(x), 4x = Q(x)$

$$y_{inhom} = e^{\int -2x dx} (C_0 + \int 4x \cdot e^{-\int -2x dx} dx) = e^{-x^2} (C_0 + \int 4x e^{+x^2} dx) = e^{-x^2} (C_0 + 2e^{+x^2})$$

$$\Rightarrow y_{inhom} = C \cdot e^{-x^2} + 2$$

2. Beispiel:

D'Gl $y' = \frac{2y}{x} - 3 \rightsquigarrow \frac{2}{x} = P(x), Q(x) = -3$

$$y_{inhom} = e^{\int \frac{2}{x} dx} (C_0 + \int -3 \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx) = e^{2 \ln(|x|)} \cdot (-3 \int e^{-2 \ln(|x|)} dx + C_0) =$$

$$= |x|^2 (-3 \int |x|^{-2} dx + C_0) = x^2 (-3 \int \frac{1}{x^2} dx + C_0) = x^2 (-3 \frac{-1}{x} + C_0) = x^2 (\frac{3}{x} + C_0) = 3x + \frac{C_0}{x^2}$$

3. Beispiel:

D'Gl $y' + y = y^2 (\cos(x) - \sin(x)) \rightsquigarrow$ Nicht linear!

$$\rightsquigarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \cos(x) - \sin(x). \quad \text{Subst.: } z := -\frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' \cdot (-1)$$

$$\rightsquigarrow z' - z = \cos(x) - \sin(x) \rightsquigarrow \text{Linear!} \rightsquigarrow z(x) = \frac{1}{y(x)} = e^x C_0 + \sin(x)$$

$$\rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{e^x C_0 + \sin(x)}$$

2.7 Lineare D'Gl mit konstanten Koeffizienten

2.7.1 Homogenes Problem

Wir studieren das folgende AWP:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \\ \vdots &= \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R}, \quad a_0, a_n \neq 0$$

Es gilt: $y_{inhom} = y_{hom} + y_p$

Das zugehörige **homogene Problem** ist:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Kurzschreibweise: $\vec{L} := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} := \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \langle \vec{L}, \vec{y} \rangle = 0$

Bekannt: Es gibt genau n linear unabhängige Lösungen.

Idee: Verwende $y = e^{\lambda x}$, setze das in die D'Gl ein, dann erscheint in jeder Ableitung der Faktor $y = e^{\lambda x}$!

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \textbf{D'Gl: } & a_n (\lambda^n) e^{\lambda x} + a_{n-1} (\lambda^{n-1}) e^{\lambda x} + \dots + a_1 (\lambda^1) e^{\lambda x} + a_0 (\lambda^0) e^{\lambda x} = 0 \\ \Rightarrow & e^{\lambda x} \cdot (a_n (\lambda^n) + a_{n-1} (\lambda^{n-1}) + \dots + a_1 \lambda + a_0 \cdot 1) = 0, \quad e^{\lambda x} \neq 0 \\ \Rightarrow & a_n (\lambda^n) + a_{n-1} (\lambda^{n-1}) + \dots + a_1 \lambda + a_0 := P(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Definition: $P(\lambda) := a_n (\lambda^n) + a_{n-1} (\lambda^{n-1}) + \dots + a_1 \lambda + a_0$ heisst **charakteristisches Polynom** der D'Gl

Konsequenz: $P(\lambda) = 0$ hat nach Konstruktion maximal n verschiedene Lösungen $y_i = e^{\lambda_i x}$.

Weiter oben haben wir gesehen, dass $\{y_i = e^{\lambda_i x}, y_j = e^{\lambda_j x}\}$ linear unabhängig ist für $i \neq j$.

\rightsquigarrow Findet man n verschiedene Lösungen $y_i = e^{\lambda_i x}$, so hat man eine Basis gefunden.

\rightsquigarrow **Problem:** Was passiert

1. für $\lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \notin \mathbb{R}$
2. $\exists_{i,j} : y_i = y_j$ (zusammenfallende Lösungen)

Fall 1: Sei $\lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \notin \mathbb{R}$

$$P(x) \text{ reell} \Rightarrow (\lambda_i \in \mathbb{L}(\lambda) \Rightarrow \bar{\lambda}_i \in \mathbb{L}(\lambda))$$

$$\text{Sei } i = 1 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{\bar{\lambda}_1 x} \in \mathbb{L}(\textbf{D'Gl})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1 + y_2 &= e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} + e^{\bar{\lambda}_1 x} = e^{\operatorname{Re} \lambda_1 x} \cdot (e^{i \operatorname{Im} \lambda_1 x} + e^{-i \operatorname{Im} \lambda_1 x}) \\ &= 2 \cdot e^{\operatorname{Re} \lambda_1 x} \cdot \cos(\operatorname{Im} \lambda_1 x) \in \mathbb{R} \text{ ist auch Lösung (Summe!)} \end{aligned}$$

Ebenso: $i \cdot (y_1 - y_2) = 2 e^{Re \lambda_1 x} \cdot \sin(Im \lambda_1 \cdot x) \in \mathbb{R}$

Satz: (1)

Vor.: $P(\lambda)$ hat lauter verschiedene Nullstellen λ_i

Beh.: $\{y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}\}$ ist Basis von \mathbb{L}

Satz: (2)

Vor.: $P(\lambda)$ hat Nullstellen $\lambda_i \notin \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$

Beh.: $e^{\lambda_1 x} + e^{\bar{\lambda}_1 x}$, $i \cdot (e^{\lambda_1 x} - e^{\bar{\lambda}_1 x})$ l.u. Lösungen $\in \mathbb{R}$

Symbol:

$k(\lambda_i) :=$ Vielfachheit der Nullstelle λ_i von $P(\lambda)$.

Problem: Sei λ_i Nullstelle von $P(\lambda)$ mit der Vielfachheit $k(\lambda_i) > 1$. Sei z.B. $i = 1$. Dann gilt:

Satz: **Vor.:**

λ_i NS von $P(\lambda)$, $k(\lambda_i) > 1$

Beh.:

$\{e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x}\}$
= System von l.u. Lösungen

Der Beweis dieser Aussage ist mathematisch sehr trickreich. Man kann dabei aber einiges lernen.

Zum Beweis:

1. Lineare Unabhängigkeit von $\{e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x}\}$:

Sei $p_{k-1}(x) := c_0 \cdot e^{\lambda_i x} + c_1 \cdot x \cdot e^{\lambda_i x} + \dots + c_{k-1} \cdot x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x} := q_{k-1}(x) \cdot e^{\lambda_i x} \equiv 0$
 $\Rightarrow q_{k-1}(x) := c_0 + c_2 x + \dots + c_{k-1} x^{k-1} \equiv 0$

Dieses Polynom vom Grade $k-1$ hat für $c_{k-1} \neq 0$ maximal $k-1$ Nullstellen.
 $\Rightarrow p_{k-1}(x) \not\equiv 0 \leadsto$ Widerspruch!

$\leadsto c_{k-1} = 0$

Genauso argumentiert man mit:

$p_{k-2}(x) := c_0 \cdot e^{\lambda_i x} + c_1 \cdot x \cdot e^{\lambda_i x} + \dots + c_{k-2} \cdot x^{k-2} \cdot e^{\lambda_i x} \leadsto c_{k-2} = 0$
u.s.w $\leadsto c_{k-1} = c_{k-2} = \dots = c_0 = 0 \Rightarrow$ l.u.



2. Zeige: $x^m \cdot e^{\lambda_i x} \in \mathbb{L}$ für $m = 0, 1, 2, \dots, k-1$

Trick:

Behandle $\tilde{y}(\lambda) := x^m \cdot e^{\lambda x}$ als Funktion von λ .

$$\leadsto \tilde{y}(\lambda) := x^m \cdot e^{\lambda x} = \frac{d}{d\lambda}(x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}) = \dots = \frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})_{\lambda}^{(m)} \Rightarrow \tilde{y}(\lambda_i) = (e^{\lambda x})_{\lambda}^{(m)}|_{\lambda=\lambda_i}$$

Die D'Gl war: $L(y) := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Wir setzen die Lösung $\tilde{y}(\lambda)$ darin ein:

$$\begin{aligned} \leadsto L(\tilde{y}(\lambda)) &= L(x^m \cdot e^{\lambda x}) = \\ &= a_n (x^m \cdot e^{\lambda x})_x^{(n)} + a_{n-1} (x^m \cdot e^{\lambda x})_x^{(n-1)} + \dots + a_1 (x^m \cdot e^{\lambda x})'_x + a_0 x^m \cdot e^{\lambda x} = \\ &= L\left(\frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x})\right) \stackrel{(*)}{=} \frac{d^m}{d\lambda^m} L(e^{\lambda x}) = \frac{d^m}{d\lambda^m} (e^{\lambda x} \cdot P(\lambda)) \end{aligned}$$

(*): Vertauschung der Ableitungen nach x und λ .

$$\Rightarrow L(\tilde{y}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} = L(x^m \cdot e^{\lambda x})|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^m}{d\lambda^m} (e^{\lambda x} \cdot P(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i}$$

λ_i k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$

$\leadsto P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^k \cdot R(\lambda)$ Hauptsatz der Algebra

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(\tilde{y}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} &= L(x^m \cdot e^{\lambda x})|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^m}{d\lambda^m} (e^{\lambda x} \cdot (\lambda - \lambda_i)^k \cdot R(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} \\ &= \frac{d^m}{d\lambda^m} ((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned}$$

$m \leq k-1$, Produktregel:

In jedem Summanden der Ableitung $\frac{d^m}{d\lambda^m} ((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda))$ erscheint ein Faktor $((\lambda - \lambda_i)^j)$, $j \geq k - m \geq 1$

$$\leadsto \frac{d^m}{d\lambda^m} ((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda)) = (\lambda - \lambda_i) \cdot e^{\lambda x} \cdot Q(\lambda), \quad Q(\lambda) = \text{Polynom in } \lambda$$

$$\Rightarrow L(\tilde{y}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^m}{d\lambda^m} ((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} = 0 \Rightarrow \tilde{y}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i} = x^m \cdot e^{\lambda_i x} \mathbb{L} \quad \leadsto \text{☺}$$

Satz:

(3)

Vor.:

$P(\lambda)$ hat eine k_i -fache Nullstelle λ_i

Beh.:

$\{e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x}\}$
= System von l.u. Lösungen der D'Gl

1. Beispiel: D'Gl :

$$y''' - y'' + y' - y = 0, \quad P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda^2 + 1) \cdot (\lambda - 1), \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$$

\leadsto Lösungen: e^x, e^{ix}, e^{-ix}
 oder $e^x, e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x), -i(e^{ix} - e^{-ix}) = 2 \sin(x)$

2. Beispiel: D'Gl :

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$$

\leadsto 3 zusammenfallende Lösungen:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad k = 3 \quad \{e^x, x \cdot e^x, x^2 \cdot e^x\}$ linear unabhängiges System von Lösungen.

2.7.2 Inhomogenes Problem

Problemlage

$$\text{D'Gl} \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x), \quad a_n, a_0 \neq 0$$

Bekannt: $\mathbb{L}_{inhom} = \{y_{hom} + y_p \mid y_{hom} \in \mathbb{L}_{hom}\}, \quad \mathbb{L}_{hom} \text{ bekannt.}$

\leadsto **Problem:** Finde y_p !

Methoden

A: Einfache Fälle:

$$1. \quad b(x) = c = \text{const.} \quad \text{Wähle: } y_p := \frac{c}{a_0}$$

$$2. \quad b(x) = p(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \text{Polynom}$$

Ansatz: $y_p = q(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}, \quad q(x) = \text{Polynom mit unbekannten Koeffizienten}$

\leadsto Einsetzen, Koeffizientenvergleich!

$$3. \quad b(x) = a \cdot \sin(\alpha \cdot x) + b \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

Ansatz: $y_p = x^k \cdot (A \cdot \sin(\alpha \cdot x) + B \cdot \cos(\beta \cdot x))$

\leadsto Einsetzen, A, B, k bestimmen!

$$4. \quad b(x) = p(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) + q(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

Ansatz: $y_p = x^k \cdot (p_1(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) + q_1(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x))$

\leadsto Einsetzen, p_1, q_1, k bestimmen!

1. Beispiel: D'Gl $y'' - y' - 2y = 2x$

$$y_{hom} : y'' - y' - 2y = 0 \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2, \text{ NS: } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_{hom} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

$$y_p : y_p \stackrel{?}{=} ax + b \Rightarrow y_p'' - y_p' - 2y_p = 0 - a - 2(ax + b) = 2x \Rightarrow -a - 2b = 0 \wedge -2a \neq 2 \neq \Rightarrow a = -1, b = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{inhom} = y_{hom} + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - x + \frac{1}{2}$$

2. Beispiel: D'Gl $y^{(6)} + y^{(4)} - y^{(2)} - y = e^x \cdot \sin(x)$

$$y_{hom} : P(\lambda) = \lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1 = 0 \text{ Setze: } \lambda^2 = \mu$$

$$\leadsto \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_{3,4} = i, \lambda_{5,6} = -i \Rightarrow \text{Basis: } e^x, e^{-x}, e^{ix}, x \cdot e^{ix}, e^{-ix}, x \cdot e^{-ix} \text{ oder } e^x, e^{-x}, \cos(x), x \cdot \cos(x), \sin(x), x \cdot \sin(x)$$

$$\leadsto y_{hom} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 x \cdot \cos(x) + C_5 \sin(x) + C_6 x \cdot \sin(x)$$

$$y_p : y_p(x) \stackrel{?}{=} e^x(k_1 \sin(x) + k_2 \cos(x)) \text{ Einsetzen:}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = e^x \left(\frac{1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(x) \right)$$

$$\leadsto y_{inhom} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 x \cdot \cos(x) + C_5 \sin(x) + C_6 x \cdot \sin(x) + e^x \left(\frac{1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(x) \right)$$

B: Allgemeinere Methoden:

1. Ansatzmethoden wie z.B. die Variation der Konstanten.
2. Potenzreihenansatz und Koeffizientenvergleich (vgl. unten).
3. Numerische Methoden (vgl. unten).
4. Laplace-Transformationen (vgl. nächstes Kapitel).

2.7.3 Potenzreihenansatz

D'Gl $y' - y = x^2, y(x_0) = y(0) = y_0 \leadsto$ **AWP**

Idee: Sei $y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$,

Einsetzen in die D'Gl, Koeffizientenvergleich $\leadsto a_n \leadsto$ speziell: $x_0 = 0, y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} (m+1) x^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n,$$

$$x^2 = y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} (n+1) - a_n) x^n,$$

$$\Rightarrow y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 = y_0 \wedge a_{n+1} (n+1) - a_n = 0 \text{ für } n \neq 2,$$

$$a_{n+1} (n+1) - a_n = 1 \text{ für } n = 2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{l|lclcl}
n=0: & a_0 & = & y_0 = a_1 \cdot (0+1) & \Rightarrow & a_1 & = & y_0 \\
n=1: & a_1 & = & a_2 \cdot (1+1) & \Rightarrow & a_2 & = & \frac{y_0}{2} \\
n=2: & 1+a_2 & = & a_3 \cdot (2+1) & \Rightarrow & a_3 & = & \frac{1}{3} + \frac{y_0}{2 \cdot 3} \\
n=3: & a_3 & = & a_4 \cdot (3+1) & \Rightarrow & a_4 & = & \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{y_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \Rightarrow & \vdots & \vdots & \vdots \\
n=k: & a_k & = & a_{k+1} \cdot (k+1+1) & \Rightarrow & a_{k+1} & = & \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+1)} + \frac{y_0}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+1)}
\end{array}$$

$$\Rightarrow a_{k+1} = \frac{2}{(k+1)!} + \frac{y_0}{(k+1)!} \Rightarrow a_k = \frac{2+y_0}{k!}$$

$$\begin{aligned}
e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Rightarrow y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = y_0 + y_0 \cdot x + \frac{y_0}{2} x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2+y_0}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_0}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k!} - 2 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = \\
&= y_0 \cdot e^x + 2 \cdot e^x - 2 - 2x - 2x^2 = (y_0 + 2) \cdot e^x - 2 - 2x - 2x^2 \\
\Rightarrow y(x) &= (y_0 + 2) \cdot e^x - 2 - 2x - 2x^2
\end{aligned}$$

2.8 Numerische Verfahren

Wir betrachten hier D'Gl erster Ordnung oder anstelle von D'Gl n -ter Ordnung Systeme erster Ordnung. Es sollen hier zwei numerische Verfahren zur approximativen Auffindung einer partikulären Lösungskurve besprochen werden: Das Euler-Verfahren und das klassische Runge-Kutta-Verfahren.

2.8.1 Das Verfahren von Euler

Gegeben sei das AWP: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

Ges.: Eine Näherungslösung in $I = [x_0, b]$

Methode: Teile I in n gleich lange Teile $\leadsto x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (Teilpunkte).

Schrittweite: $\Delta x = \Delta x_n = \frac{b - x_0}{n}$, $x_{k+1} = x_k + \Delta x$

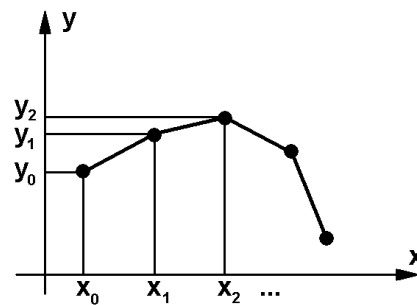
Idee: Ersetze den Differentialquotienten $y' = \frac{dy}{dx}$ durch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\leadsto y' = f(x, y) \mapsto \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f(x, y)|_{x=x_k}$$

$$\Rightarrow \Delta y \approx f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_n \Rightarrow y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_n + R(\Delta x_n^2), \quad R(\Delta x_n^2) \xrightarrow{(\Delta x_n \rightarrow 0)} 0$$

Die Restfunktion $R(\Delta x_n^2)$ geht mit Δx_n quadratisch gegen 0. Betreffend den Beweis sei auf die Literatur verwiesen.

Die so berechneten Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ bilden die Ecken eines Polygonzuges.



Definition: Diesen Polygonzug nennen wir **Eulerschen Polygonzug**.

Bsp.: D'Gl $y' - y = x$, $y(0) = 1$

Bekannte exakte Lösung:

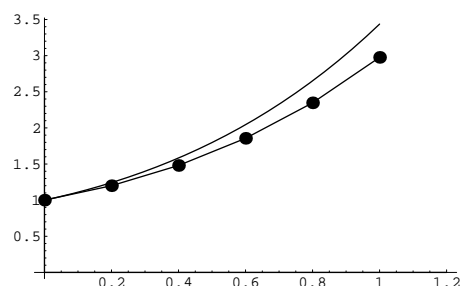
$$y_{hom} = C \cdot e^x, \quad y_p = -x - 1 \Rightarrow y_{inhom} = C \cdot e^x - x - 1, \quad y(0) = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y_{inhom} = 2 \cdot e^x - x - 1$$

Numerische Näherung nach Euler:

$$y' = y + x = f(x, y), \quad \Delta x = \text{const.}, \quad y_{k+1} \approx y_k + \Delta y_k = y_k + f(x_k, y_k) \Delta x_k = y_k + (y_k + x_k) \Delta x_k$$

Sei $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1.0$

x_k	x_k
0.0	1.000
0.2	1.200
0.4	1.480
0.6	1.856
0.8	2.347
1.0	2.976



Genauer Wert: $y_5 \approx 3.42!!$

\leadsto Grosser Fehler.

Für die Praxis besser geeignet ist daher eine verbesserte Version des Euler-Verfahrens, das **Runge-Kutta-Verfahren**.

2.8.2 Die Methode von Runge-Kutta

Gleichung 1. Ordnung

Sei das folgende AWP gegeben: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

Berechne für:

$$\begin{aligned}
k_{1,j} &= f(x_j, y_j) \\
k_{2,j} &= f\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, y_j + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{1,j}\right) \\
k_{3,j} &= f\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, y_j + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{2,j}\right) \\
k_{4,j} &= f(x_j + \Delta x, y_j + \Delta x \cdot k_{3,j}) \\
y_{j+1} &= y_j + \frac{\Delta x}{6} \cdot (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j}) + R(\Delta x^5)
\end{aligned}$$

Bemerkenswert ist, dass hier die Restfunktion R mit Δx^5 gegen 0 geht, während beim Euler-Verfahren vergleichsweise nur mit Δx^2 . $f(x_j, y_j)$ wird hier ersetzt durch einen gewichteten gemittelten Wert.

Empfehlung zur Wahl der Schrittweite Δx :

Sei $L = \text{Lipschitzkonstante} \rightsquigarrow$ Wähle: $\Delta x \leq \frac{L}{10}$

Hinweis: f diff'bar $\rightsquigarrow L = \text{Max}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=\text{const}}$

Bsp.: D'Gl

$$y' - y = x, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 0.4000] \rightsquigarrow y' = f(x, y) = y + x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \rightsquigarrow \text{Wähle: } \Delta x \leq \frac{1}{10} = 0.1, \quad I = [0, 0.4],$$

$$4 \text{ Teilintervalle: } x_0 = 0.0, \quad x_1 = 0.1, \quad x_2 = 0.2, \quad x_3 = 0.3, \quad x_4 = 0.4$$

Rechnung:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = y_{0+1} \quad \text{für } j = 0$$

$$\begin{aligned}
k_{1,0} &= f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 0 + 1 &= 1.0 \\
k_{2,0} &= f\left(0, \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 1\right) = 0.05 + 1.05 &= 1.1 \\
k_{3,0} &= f\left(0, \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 1.1\right) = 0.05 + 1.055 &= 1.105 \\
k_{4,0} &= f(0, 0.1, 1 + 0.1 \cdot 1.105) = 0.1 + 1.1105 &= 1.2105 \\
y_1 &= 1 + \frac{0.1}{6} (1.0 + 2 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.105 + 1.2105) &= 1.1103
\end{aligned}$$

Weiter: $y_2 = y_{1+1}, \quad j = 1$

$$\rightsquigarrow k_{1,1} = 1.210, \quad k_{2,1} = 1.321, \quad k_{3,1} = 1.326, \quad k_{4,1} = 1.443, \quad y_2 = 1.2429$$

$$\rightsquigarrow k_{1,2} = 1.443, \quad k_{2,2} = 1.567, \quad k_{3,2} = 1.571, \quad k_{4,2} = 1.700, \quad y_3 = 1.3998$$

$$\rightsquigarrow k_{1,3} = 1.700, \quad k_{2,3} = 1.835, \quad k_{3,3} = 1.840, \quad k_{4,3} = 1.984, \quad y_4 = 1.5836$$

Vergleich bei $x = 0.4$

$$\begin{aligned}
y_{\text{exact}} &\approx 1.5836 \\
y_{\text{Runge-Kutta}} &\approx 1.5836 (!) \\
y_{\text{Euler}} &\approx 1.48 \dots
\end{aligned}$$

Systeme 1. Ordnung

$$\text{Sei } \left| \begin{array}{lcl} z'_1(x) & = & f_1(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \\ \vdots & = & \vdots \\ z'_m(x) & = & f_m(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \end{array} \right| \quad \text{d. h. } \vec{z}' = \vec{f}(x, \vec{z})$$

$$\text{AWP} \rightsquigarrow z_i(x_0) = z_{i,0}, \quad i = 1, \dots, m$$

Idee: Wende das oben besprochene Verfahren parallel für alle Gleichungen an.

Vorgehen:

Berechne mit Runge–Kutta $\{z_{1,1}, \dots, z_{m,1}\}$ aus $\{z_{1,0}, \dots, z_{m,0}\}$. Dazu muss man für jedes $z_{i,1}$ die $k_{1,(i,1)}, \dots, k_{4,(i,1)}$ berechnen in der folgenden Reihenfolge: Zuerst berechnet man $k_{1,(1,1)}, \dots, k_{1,(m,1)}$. Anschliessend $k_{2,(1,1)}, \dots, k_{2,(m,1)}$ u.s.w.. Dann berechnet man $z_{1,2}, \dots, z_{m,2}$ aus $z_{1,1}, \dots, z_{m,1}$.

Formeln: Seien $j = 1, \dots, n$, $i = 0, \dots, m$
 n = Anzahl Teilintervalle

$$\begin{aligned} k_{1,(i,j)} &= f_i(x_j, z_1(x_j), \dots, z_m(x_j)) \\ k_{2,(i,j)} &= f_i\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, z_1(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{1,(i,j)}, \dots, z_m(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{1,(m,j)}\right) \\ k_{3,(i,j)} &= f_i\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, z_1(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{2,(i,j)}, \dots, z_m(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{2,(m,j)}\right) \\ k_{4,(i,j)} &= f_i\left(x_j + \Delta x, z_1(x_j) + \Delta x \cdot k_{3,(i,j)}, \dots, z_m(x_j) + \Delta x \cdot k_{3,(m,j)}\right) \\ z_{i,(j+1)} &= z_i(x_{j+1}) = z_{i,j} + \frac{\Delta x}{6} \cdot (k_{1,(i,j)} + 2k_{2,(i,j)} + 2k_{3,(i,j)} + k_{4,(i,j)}) \end{aligned}$$

Bemerkung:

Man stellt sofort fest, dass im Computerzeitalter diese Formeln wohl nicht mehr für Handrechnungen verwendet werden. Der Zeitverschleiss ist enorm. Doch sind für Programmierungen in dieser Richtung Kenntnisse der Theorie unabdingbar. In vielen Computeralgebra–Systemen findet man entsprechende Module heute eingebunden, etwa z.B. in Mathematica. (Vgl. Mathematica–Kurs.)

Der nachfolgende Abschnitt ist dem Algebra–Skript entnommen:

2.8.3 D'Gl und Differenzenmethode — Equation différentielle et méthode d'équations aux différences**Bsp.:**

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung (Randwertproblem):

$$3y''(x) - 5y'(x) + y(x) + 2x = 0, \quad a = 0, \quad b = 10, \quad y(a) = -2; y(b) = 5;$$

Nun diskretisieren wir das Problem indem wir das Intervall $I = [a, b]$ in n Teile gleicher Länge h teilen (Teilpunkte x_k).

$$\rightsquigarrow x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \cdot h$$

Nun ersetzen wir die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten:

$$y'(x_k) \approx \frac{y(x_k) - y(x_{k-1}))}{h}, \quad y''(x_k) \approx \frac{y'(x_{k+1}) - y'(x_k)}{h} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

$$\frac{2x_k h^2 + (5h + 3)y_{k-1} + (h^2 - 5h - 6)y_k + 3y_{k+1}}{h^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{(5h + 3)y_{k-1} + (h^2 - 5h - 6)y_k + 3y_{k+1}}{h^2} = -2x_k$$

Wir studieren zuerst das Beispiel mit $n = 11$. $y_0 = y(x_0) = y(a)$ und $y_{11} = y(x_{11}) = y(b)$ sind gegeben. Daher müssen noch y_1, y_2, \dots, y_{10} berechnet werden. Dazu verwenden wir obige Gleichungen. Diese ergeben ein System:

$$\begin{array}{rcl} \frac{(5h + 3)y_0 + (h^2 - 5h - 6)y_1 + 3y_2}{h^2} & = & -2x_1 \\ & \vdots & \\ \frac{(5h + 3)y_{k-1} + (h^2 - 5h - 6)y_k + 3y_{k+1}}{h^2} & = & -2x_k \\ & \vdots & \\ \frac{(5h + 3)y_9 + (h^2 - 5h - 6)y_{10} + 3y_{11}}{h^2} & = & -2x_{10} \end{array}$$

Wie man sieht, kommen in jeder Zeile immer nur drei der Unbekannten y_k vor. Daher ist die Koeffizientenmatrix eine Bandmatrix, die nur in drei Diagonalen, der Hauptdiagonale und den beiden Nebendiagonalen, besetzt ist. Gleichungssysteme mit solchen Matrixen sind einfach lösbar.

Bemerkung:

Falls die D'Gl nicht linear ist, kann man die Matrizenmethode nicht ohne weiteres anwenden. Man muss sich dann überlegen, ob man die Gleichung eventuell z.B. mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung linearisieren könnte.

Resultat der Berechnung:

$$M \cdot \vec{y} = \vec{b} \Rightarrow M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18086 \\ 4000 \\ 6000 \\ 8000 \\ 10000 \\ 12000 \\ 14000 \\ 16000 \\ 18000 \\ 39965 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 12936 & -3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 \end{pmatrix}$$

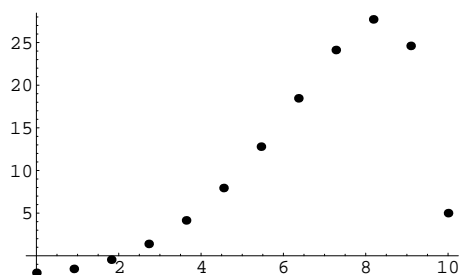
Exakte Lösung:

$$y(x) =$$

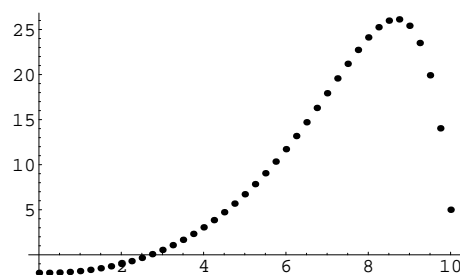
$$\frac{e^{-\frac{1}{6}(-5+\sqrt{13})x} \left(2e^{\frac{1}{6}((-5+\sqrt{13})x+50)}(x+5) - 2e^{\frac{1}{6}((-5+\sqrt{13})x+20\sqrt{13}+50)}(x+5) + 35e^{\frac{1}{3}\sqrt{13}(x+5)} - 8e^{\frac{1}{3}(\sqrt{13}x+25)} + 8e^{\frac{5}{3}(5+2\sqrt{13})} - 35e^{\frac{5\sqrt{13}}{3}} \right)}{-e^{25/3} + e^{\frac{5}{3}(5+2\sqrt{13})}}$$

$$\approx -2x + 8.00002759115e^{0.2324081207560x} - 0.0000275911538341e^{1.43425854591x} - 10$$

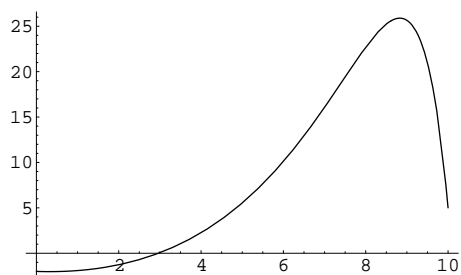
In den nachstehenden Diagrammen sind die Resultate der Berechnung für $n = 11$, $n = 40$ dem exakten Resultat gegenübergestellt:



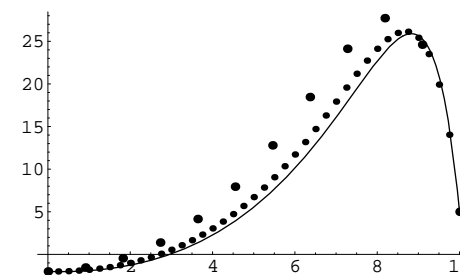
12 Punkte, $n = 11$



41 Punkte, $n = 40$



Exakte Lösung



Alles zusammen

2.9 Allgemeine Maschinenlösungen

2.9.1 Mathematica-Lösung

1. Beispiel: $y'(x) + \alpha y(x) = f(x)$

Mathematica-Basiscode:

```
solv1 = DSolve[ y'[x] + \[Alpha] y[x] == f[x], y, x];
u[x_] := y /. solv1[[1]];
a = (u[x][x] // InputForm)[[1]][[2]][[2]][[2]][[1]];
v[x_] := u[x][x] /. a -> t;
Print["y(x) = ", v[x] // Simplify];
```

Output: $y(x) = e^{-x\alpha} \left(c_1 + \int_1^x e^{t\alpha} f(t) dt \right)$

2. Beispiel: $y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = f(x)$

Mathematica-Code:

```
Remove["Global`*"];
solv2 = DSolve[y''[x] + \[Alpha] y'[x] + \[Beta] y[x] == f[x], y, x][[1]];
u[x_] := y /. solv2[[1]];
a = u[x][[2]][[3]][[2]][[2]][[1]];
b = u[x][[2]][[4]][[2]][[2]][[1]];
v[x_] := u[x][x] /. {a -> t, b -> t};
Print["y(x) = ", v[x] // Simplify]
```

Output:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})} \left(c_1 + e^{x\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} c_2 + e^{x\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \int_1^x \frac{e^{\frac{1}{2}t(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})} f(t)}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} dt + \int_1^x -\frac{e^{\frac{1}{2}t(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})} f(t)}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} dt \right)$$

3. Beispiel: $y''(x) + 2y'(x) + (-1)y(x) = \cos(x)$, $y(0) = 2.86909$, $y'(0) = -4.80015$

Mathematica-Code:

```
Remove["Global`*"];
solv2 = DSolve[y''[x] + \[Alpha] y'[x] + \[Beta] y[x] == f[x], y, x][[1]];
u[x_] := y /. solv2[[1]];
a = u[x][[2]][[3]][[2]][[2]][[1]];
b = u[x][[2]][[4]][[2]][[2]][[1]];
v[x_] := u[x][x] /. {a -> t, b -> t};
s[u_] := v[x] /. {x -> u, \[Alpha] -> 2, \[Beta] -> -1, C[1] -> 1, C[2] -> 1, f[t] ->
  Cos[t]};
Print["y(x) = ", s[x] // N // Simplify];
Print["y(0) = ", s[0] // N];
Print["y'(0) = ", (D[s[m], m] /. m -> 0) // N];
Plot[s[m], {m, 0, Pi}, AspectRatio->1];
```

Output: (Ohne weitere Kommastellen)

$$y(x) = 0.25 \cos(x) + 2.24228 e^{-2.414218x} + 0.87682 e^{0.414212x} + 0.25 \sin(x)$$

$$y(0) = 2.86909, \quad y'(0) = -4.80015$$

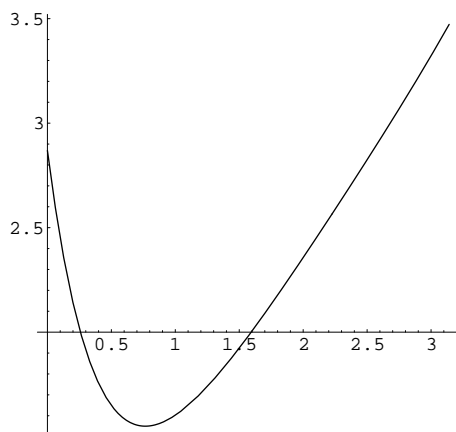
(Plot siehe unten, identisch mit Bild links.)

Direkter Plot der exakten Lösung:

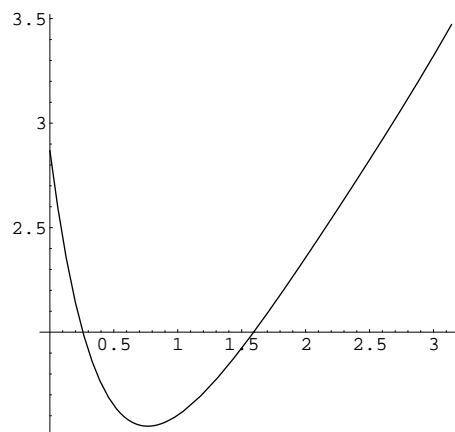
```
Remove["Global`*"];
solv = Flatten[DSolve[{y''[x]+2 y'[x]-1 y[x]==Cos[x],
y[0]==2.86909,y'[0]==-4.80015},y,x]];
y = y/.solv;
Plot[y[x],{x,0,Pi},AspectRatio->1];
```

Direkter Plot der numerischen Lösung:

```
Remove["Global`*"];
solution=NDSolve[{y''[x]+2 y'[x]-1 y[x]==Cos[x],y[0]==2.86909,
y'[0]==-4.80015},y,{x,0,4 Pi}];
Plot[y[x]/. solution,{x,0,Pi},AspectRatio->1];
```



Exakte Lösung



Numerische Lösung

2.9.2 Selbst gerechnete Lösung

Wir betrachten Beispiel 3:

$$y''(x) + 1 y'(x) + (-1) y(x) = \cos(x + 1) = \cos(x) \cos(1) - \sin(x) \sin(1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Homogene Lösung

y_{hom} Lösung des homogenen Problems.

$$1. \quad y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$$

\leadsto Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \leadsto y_{hom} = c_1 e^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})x} + c_2 e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})x}$$

2. Frage: $y_{part} = ? \quad \leadsto$ Probiere:

$$\begin{aligned} \text{(a) } y_1(x) = \cos(x) &\Rightarrow A(y_1(x)) := y_1''(x) + y_1'(x) - y_1(x) \\ &= -\cos(x) - \sin(x) - \cos(x) = -2 \cos(x) - \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) = \sin(x) &\Rightarrow A(y_2(x)) := y_2''(x) + y_2'(x) - y_2(x) \\ &= -\sin(x) + \cos(x) - \sin(x) = \cos(x) - 2 \sin(x) \end{aligned}$$

Bemerkung:

A ist linearer Operator!

$$y_{part}(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(y_{part}(x)) &= A(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)) = \alpha A(y_1(x)) + \beta A(y_2(x)) = \\ &\alpha(-2 \cos(x) - \sin(x)) + \beta(\cos(x) - 2 \sin(x)) = (-2\alpha + \beta) \cos(x) + (-\alpha - 2\beta) \sin(x) \\ &:= \cos(x) \cos(1) - \sin(x) \sin(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2\alpha + \beta &= \cos(1) & \alpha &= \frac{1}{5}(-2 \cos(1) + \sin(1)), \\ -\alpha - 2\beta &= -\sin(1) & \beta &= \frac{1}{5}(\cos(1) + 2 \sin(1)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_{part}(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \frac{1}{5}(-2 \cos(1) + \sin(1)) \cos(x) + \frac{1}{5}(\cos(1) + 2 \sin(1)) \sin(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_{allg}(0) &= 1, \quad y'_{allg}(0) = 0, \quad y_{allg}(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x) = \\ &\frac{1}{5} \left(5 e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} \left(c_1 + c_2 e^{\sqrt{5}x} \right) - 2 \cos(x+1) + \sin(x+1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_{allg}(x) &= \frac{1}{10} (2 \cos(x+1) + e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} (4 e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} \sin(x+1) - 5((1+\sqrt{5})c_1 \\ &\quad - (-1+\sqrt{5})c_2 e^{\sqrt{5}x}))) \end{aligned}$$

$$y_{allg}(0) = 1 = c_1 + c_2 + \frac{1}{5}(-2 \cos(1) + \sin(1))$$

$$y'_{allg}(0) = 0 = \frac{1}{10}(-5((1+\sqrt{5})c_1 - (-1+\sqrt{5})c_2) + 4 \sin(1) + 2 \cos(1))$$

$$c_1 = \frac{1}{10} \left(5 - \sqrt{5} + 2 \cos(1) + (-1 + \sqrt{5}) \sin(1) \right)$$

$$c_2 = \frac{1}{10} \left(5 + \sqrt{5} + 2 \cos(1) - (1 + \sqrt{5}) \sin(1) \right) \quad \leadsto$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{10} (2(-2 \cos(1) + \sin(1)) \cos(x) + 2(\cos(1) + 2 \sin(1)) \sin(x) + e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})x} \\ &\quad * (5 + \sqrt{5} + 2 \cos(1) - (1 + \sqrt{5}) \sin(1)) + e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} (5 - \sqrt{5} + 2 \cos(1) + (-1 + \sqrt{5}) \sin(1))) \end{aligned}$$

$$y(x) = -0.04783 \cos(x) + 0.48847 e^{-1.61803x} + 0.55936 e^{0.61803x} + 0.44465 \sin(x)$$

Vergleich: Maschinenlösung:*Mathematica*-Code:

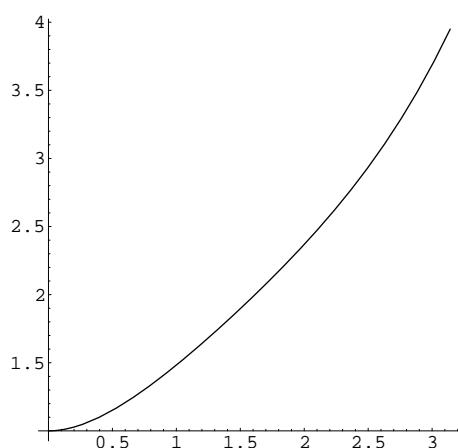
```

Remove[x,y];
solv = Flatten[DSolve[{y''[x] + y'[x] - y[x]==Cos[x+1], y[0]==1, y'[0]==0},y,x]];
y = y/.solv;
(* Print["y(x) = ",Simplify[y[x]]]; *)
Print["Numerisch y(x) = ",Simplify[y[x]]/N];
Plot[y[x],{x,0,Pi},AspectRatio->1];

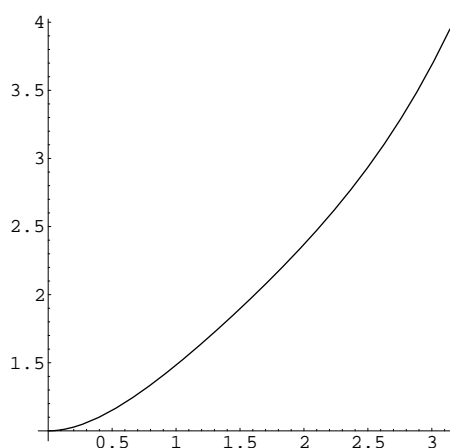
```

Output: (Numerisch \leadsto kürzer.)

$$y(x) = -0.1 * 2.71828^{-1.61803x} (4.0 * 2.71828^{1.61803x} \cos(x + 1.) - 5.59366 * 2.71828^{2.23607x} - 2.0 * 2.71828^{1.61803x} \sin(x + 1.0) - 4.88465)$$



Oben errechnete Lösung



Maschinenlösung

 \leadsto Diagramme identisch!

ligne élastique ou axe neutre

2.10 Artillerie-Methode

Die hier behandelte Methode ist auch unter dem Namen „Shooting-Methode“ bekannt.

Wir wollen das folgende **Randwertproblem** lösen (Knickungsproblem):

$$y''(x) + \frac{F}{(EI_y)} y(x) (1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(x_L) = 0$$

Zuerst studieren wir eine vereinfachte lineare Gleichung ($|y'(x)| < 1$):

$$y''(x) + \frac{F}{(EI_y)} y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(x_L) = 0$$

Man findet sofort die allgemeine Lösung:

$$y_{gen}(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{F} x}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{F} x}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right)$$

Wir wählen wir für die Konstanten numerische Werte (m, N u.s.w.):

$$x_L = 5, \quad I_y = \frac{Pi}{4} (R^4 - r^4), \quad R = 0.1, \quad r = 0.01, \quad E = 210000 * 1000^2, \quad F = 5 * 10^6$$

→ Allgemeine Lösung:

$$y_{gen}(x) = c_1 \cos(0.55062 x) + c_2 \sin(0.55062 x)$$

Setzt man jedoch Randbedingungen, so ändert sich die Situation.

Sei $y(0) = 0$

$$\Rightarrow y_{gen}(0) = 0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 = 0 \Rightarrow y_{gen}(0) = c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{F} x}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right)$$

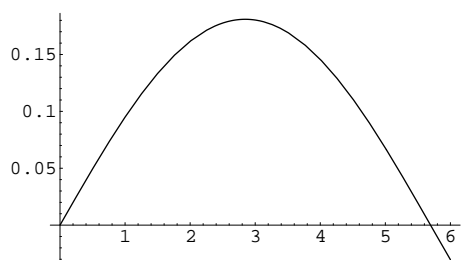
Sei $y(x_L) = 0$

$$\Rightarrow y_{gen}(0) = 0 = c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{F} x_L}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{F} x_L}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}} = \pi \Rightarrow x_L = \pi \frac{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}{\sqrt{F}} \quad \text{oder} \quad F = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{x_L^2}$$

Für ein gegebenes x_L ist damit F bestimmt und kann somit nicht mehr frei gewählt werden.

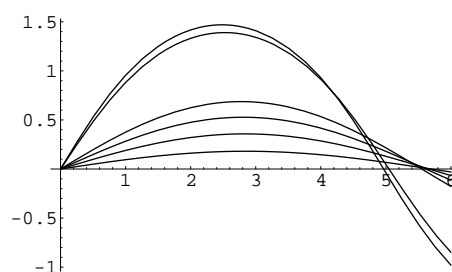
Dagegen lässt sich c_2 hier ohne weitere Bedingung nicht bestimmen.

Um weiterzukommen, verändern wir das ursprüngliche Problem. Wir gehen vor wie die Artillerie. An Stelle der zweiten Randbedingung führen wir eine zweite Anfangsbedingung ein, die wir solange anpassen, bis die zweite Randbedingung erfüllt ist. (**Shooting-Methode**). Wir lösen das Problem numerisch.

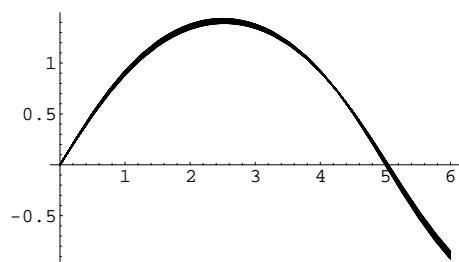
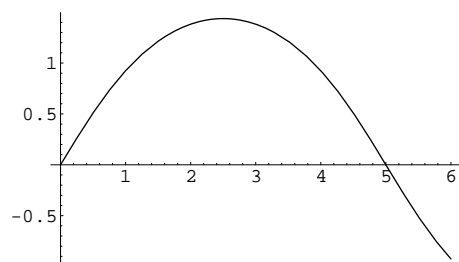


$$y''(x) + y(x) \frac{F}{(E \cdot I_y)} (1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.1$$



$$y'(0) = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 1.0, 1.1$$


 $y'(0) = 1.000, 1.001, 1.002, \dots, 1.057$

 $y'(0) = 1.057$

Hier ist zur Berechnung *Mathematica* verwendet worden. Programm siehe unten.

```
Remove["Global`*"]
```

```
(* Initialisierung *)
```

```
xL = 5; R = 0.1; r = 0.01; Iy = Pi/4 (R^4 - r^4);
```

```
eE = 210000 *1/(1/1000^2); F = 5 10^6;
```

```
M[y_] := F y;
```

```
ys0=1; i=1;
```

```
solution=
```

```
NDSolve[{y''[x] + F y[x]/(eE Iy) (1+(y'[x])^2)^(3/2) == 0,
```

```
y[0] == 0, y'[0] == ys0 },y,{x,0,1.2 xL}];
```

```
Endwert=(y[x]/.solution)/.x->xL;
```

```
If[Endwert[[1]] > 0, steuerung = 1, If[Endwert[[1]] < 0,
```

```
steuerung = -1, steuerung = 0]];
```

```
h=steuerung;
```

```
pl[i]=Plot[y[x]/.solution,{x,0,1.2 xL},DisplayFunction->Identity];
```

```
Print[{i,h,steuerung,Endwert " = y[xL]",ys0}];
```

```
(* Loop *)
```

```
While[(h-steuerung) == 0 ,
```

```
Print["Vor ",{i,h,steuerung,Endwert " = y[xL]",ys0/N}];
```

```
ys0=1+i/1000;
```

```
i++;
```

```
h=steuerung;
```

```
solution=
```

```
NDSolve[{y''[x] + F y[x]/(eE Iy) (1+(y'[x])^2)^(3/2) == 0,
```

```
y[0] == 0, y'[0] == ys0 },y,{x,0,1.2 xL}];
```

```
Endwert=(y[x]/.solution)/.x->xL;
```

```
If[Endwert[[1]] > 0, steuerung = 1, If[Endwert[[1]] < 0,
```

```
steuerung = -1, steuerung = 0]];
```

```
pl[i]=Plot[y[x]/.solution,{x,0,1.2 xL},DisplayFunction->Identity];
```

```
Print["Nach ",{i,h,steuerung,Endwert " = y[xL]",ys0/N},
```

```
If[(h-steuerung) == 0,""," Umschlagpunkt"]];
```



```
Show[Table[pl[n],{n,1,i}],DisplayFunction->$DisplayFunction];
```

```
Plot[y[x]/.solution,{x,0,1.2 xL}];
```

2.11 Anwendungen

2.11.1 Biegelinie

Mathematica-Output siehe:

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Biegelinie.pdf>

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Biegelinie.nb>

2.11.2 Knickung

Mathematica-Output siehe:

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Knickung.pdf>

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Knickung.nb>

Kapitel • Chapitre 3

Laplace–Transformationen

3.1 Einführung

3.1.1 Übersicht

Bei den Laplace–Transformationen handelt es sich um eine symbolische Methode, die zum Auflösen von Differentialgleichungen grosse Dienste leistet. Mit ihrer Hilfe lassen sich transzendente D'Gl auf algebraische Gleichungen zurückführen und algebraisch lösen. Es gelingt, einen Kalkül aufzubauen, was die Methode äusserst effizient macht.

Den Ursprung der Laplace–Transformationen finden wir schon bei Euler. Benannt sind sie heute aber nach Laplace, der als Zeitgenosse von Euler wie dieser auch in Berlin tätig war. Die Idee wurde von Heaviside³ aufgegriffen. Die Früchte finden wir im heute bekannten und verwendeten Kalkül.

Bezüglich der Literatur sei auf die Ingenieur–Literatur oder die Handbücher über Laplace–Transformationen von Doetsch verwiesen.

3.1.2 Der Trick

Bsp.: Ohne den Kalkül vorerst zu kennen, wollen wir die Methode schrittweise am Beispiel einer D'Gl demonstrieren.

Bsp.:

AWP $y'' - y' - 6y - e^{-x} = 0, \quad x \geq 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(x) = ?$

Idee: : Berechne: $\int_0^\infty e^{-sx} (y'' - y' - 6y - e^{-x}) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot 0 dx = 0 \rightsquigarrow$

1. Sei $F(s) := \int_0^\infty e^{-sx} \cdot y(x) dx$ (Annahme: $\exists_{s \in \mathbb{C}} : F(s)$ existiert)

2. Partielle Integration:

$$\int_0^\infty e^{-sx} \cdot y'(x) dx = e^{-sx} y(x) \Big|_0^\infty - (-s) \cdot \int_0^\infty e^{-sx} \cdot y(x) dx = e^{-sx} y(x) \Big|_0^\infty - (-s) \cdot F(s)$$

Seien : $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} y(x) = 0$ und $\lim_{x \downarrow 0} y(x) = y(0)$ existiert

$$\rightsquigarrow e^{-sx} y(x) \Big|_0^\infty = 0 - e^{-s \cdot 0} y(0) = -y(0) \Rightarrow \int_0^\infty e^{-sx} \cdot y'(x) dx = -y(0) + s \cdot F(s)$$

³Heaviside, 1850–1925

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-s x} y(x) = 0$ bedeutet, dass die Lösungsfunktion $y(x)$ schwächer wächst als $e^{s x}$, was in der Praxis vernünftig ist. s kann ja noch gewählt werden ($\operatorname{Re}(s) > 0$).

3. Sei $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-s x} y'(x) = 0$ ($\int_0^\infty e^{-s x} \cdot y'(x) dx$ soll existieren!)

\leadsto Partielle Integration:

$$\int_0^\infty e^{-s x} \cdot y''(x) dx = e^{-s x} y'(x) \Big|_0^\infty - (-s) \cdot \int_0^\infty e^{-s x} \cdot y'(x) dx = -y'(0) + s \cdot \int_0^\infty e^{-s x} \cdot y'(x) dx$$

$$= -y'(0) + s(-y(0) + s \cdot F(s)) = -y'(0) - s y(0) + s^2 \cdot F(s)$$

$$4. \int_0^\infty e^{-s x} \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-(s+1)x} dx = -\frac{1}{s+1} \cdot e^{-(s+1)x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s+1} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > -1$$

Wende diese Resultate auf die D'G! an:

$$(-y'(0) - s y(0) + s^2 \cdot F(s)) - (-y(0) + s \cdot F(s)) - 6 \cdot F(s) - \frac{1}{s+1} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$\Rightarrow -s + s^2 \cdot F(s) + 1 - s \cdot F(s) - 6 \cdot F(s) = \frac{1}{s+1}$$

Diese Gleichung ist jetzt **algebraisch lösbar!**

$$\Rightarrow F(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2-s-6)} := \int_0^\infty e^{-s x} \cdot y(x) dx$$

Wenn es nun gelingt, aus dieser Gleichung $y(x)$ zu berechnen, ist das **AWP gelöst!**

Dazu ist es ratsam, $F(s)$ in Partialbrüche zu zerlegen:

$$F(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2-s-6)} = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1}$$

Berechnung von $y(x)$ aus $F(s)$:

$$\textbf{Trick:} \quad \int_0^\infty e^{-s x} \cdot e^{\alpha x} dx = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)x} dx = \frac{1}{s-\alpha} \quad \text{für } \operatorname{Re}(\alpha-s) > 0, \operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(s)$$

$$\leadsto F(s) = \int_0^\infty e^{-s x} \cdot y(x) dx = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$= \frac{9}{20} \cdot \int_0^\infty e^{-s x} \cdot e^{3x} dx + \frac{4}{5} \cdot \int_0^\infty e^{-s x} \cdot e^{-2x} dx - \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-s x} \cdot e^{-1x} dx \quad (\alpha = 3, -2, -1)$$

$$\leadsto F(s) = \int_0^\infty e^{-s x} \cdot \left(\frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x} \right) dx = \int_0^\infty e^{-s x} \cdot y(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty e^{-s x} \cdot \left(\frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x} - y(x) \right) dx \equiv 0 \quad \forall s, \quad y(x) \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow y(x) = \frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x}$$

$$\leadsto \textbf{Lösung:} \quad y(x) = \frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x}$$

Durch die Herleitung einer Menge von Regeln, d.h. eines Kalküls, kann eine solche Berechnung enorm abgekürzt werden. Wir werden daher erst Regeln gewinnen müssen, bevor wir die Sache anwenden können.

3.2 Existenz-, Eindeutigkeitsprobleme

3.2.1 Definitionen

Definition:

Sei $s \in \mathbb{C}$

$\mathcal{L}\{f\} := F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$ heisst **Laplace-Transformierte** von $f(t)$.

\mathcal{L} kann als Operator verstanden werden:

$\mathcal{L}: f(t) \mapsto F(s), f \in \{f_i \mid i \in M\}, F \in \{F_i \mid i \in M\}$

f : Urbildfunktion, Originalfunktion

F : Bildfunktion, $s \in \mathbb{C}$

\mathcal{L} : heisst **Laplace-Transformation**.

e^{-st} heisst **Dämpfungsglied**.

Symbol: In der Literatur sind sehr verschiedene Symbole gebräuchlich:

$$\begin{array}{llll} 1) & f(t) & \mapsto & F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\ 2) & f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s) \\ 3) & f(t) & \circ \bullet & F(s) \\ 4) & f(t) & \mapsto & F(s) \\ 5) & f(t) & \sqsubset & F(s) \end{array}$$

Bemerkung:

Neben \mathcal{L} werden wir hier vor allem folgende Symbole benutzen:

$f(t) \circ \bullet F(s), F(s) \bullet \circ f(t)$.

3.2.2 Existenzprobleme

Problem: Wann existiert $F(s)$?

\leadsto Für $f(t)$ müssen wir fordern:

1) $f(t) \cdot e^{-st}$ integrierbar (z.B. f stückweise stetig).

2) $\forall s \in D_{\mathcal{L}} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$

Bemerkung:

$s = \operatorname{Re}(s) + i \operatorname{Im}(s) \Rightarrow e^{-st} = e^{-t \cdot \operatorname{Re}(s)} \cdot (\cos(t \cdot \operatorname{Im}(s)) - i \sin(t \cdot \operatorname{Im}(s)))$

$\leadsto \operatorname{Re}(s) > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t \cdot \operatorname{Re}(s)} = 0$ wie gewünscht!

Satz:**Konvergenzsatz****Vor.:**

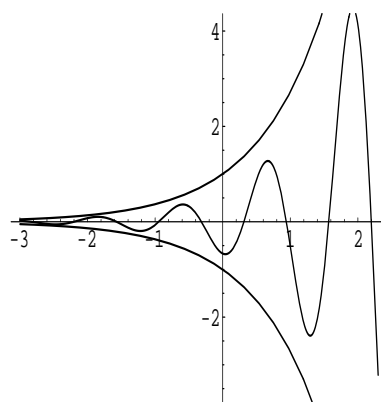
- 1) f stückweise stetig
- 2) f wächst höchstens exponentiell.

Beh.:

- 1) $\forall_s : \operatorname{Re}(s) > \gamma : F(s) \text{ existiert}$
- 2) $\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(s) > \gamma$

Bemerkung:

Über die Umkehrung des Satzes wird nichts gesagt.

**Hinweis zum Beweis:**

$$\begin{aligned}
 \text{Ad 2)} \quad F(s) &= \left| \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-st}| \cdot |f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{Re}(s)} \cdot M \cdot e^{\gamma t} dt = M \cdot \int_0^{\infty} e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t} dt \\
 &= \frac{M \cdot e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t}}{\gamma - \operatorname{Re}(s)} \Big|_0^{\infty} \stackrel{\operatorname{Re}(s) > \gamma}{=} \frac{M}{\gamma - \operatorname{Re}(s)} \cdot (0 - 1) = \frac{M}{\operatorname{Re}(s) - \gamma} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

für $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$ ($\operatorname{Re}(s) - \gamma > 0$)

$$\text{Ad 1)} \quad F(s) = \int_0^{t_0} e^{-st} \cdot f(t) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt = k(t_0) + R(t_0), \quad k(t_0) \in \mathbb{R}$$

$$R(t_0) \leq \int_{t_0}^{\infty} |e^{-st}| \cdot |f(t)| dt \leq M \cdot \int_{t_0}^{\infty} e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t} dt = \frac{M}{\gamma - \operatorname{Re}(s)} \cdot (0 - e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t_0}) < \varepsilon_0$$

für $\gamma - \operatorname{Re}(s) < 0$, $t_0 > k$, $e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t_0} > \varepsilon_1 \rightsquigarrow t_0 > k \Rightarrow R(t_0) < \varepsilon_0$

Beispiele:

1. $f(t) = \text{Polynom in } t \rightsquigarrow F(s) \text{ existiert}$
2. $f(t) = q \cdot e^{k \cdot t} \rightsquigarrow F(s) \text{ existiert}$
3. $f(t) = e^{(t^2)} \rightsquigarrow F(s) \text{ existiert nicht!}$

3.2.3 Eindeutigkeitsprobleme

Eine nutzbringende Anwendung der Laplace-Transformationen auf Differentialgleichungen gelingt nur, falls aus $F(s)$ die Urbildfunktion $f(t)$ wieder eindeutig zurückgewonnen werden kann.

Daher untersuchen wir zuerst die Bijektivität von \mathcal{L} .

Sei $\mathcal{F} = \{f \mid \mathcal{L}\{f\} \text{ ex.}\}$, $\Phi = \{F = \mathcal{L}\{f\} \mid f \in \mathcal{F}\}$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$

\leadsto Es ist: $\mathcal{L} : \mathcal{F} \longrightarrow \Phi$ mit $\mathcal{L} : f \longmapsto F = \mathcal{L}\{f\}$

Definition: Wir nennen zwei Funktionen f_1, f_2 auf D_f **fast identisch**
 $: \Leftrightarrow f_1(t) = f_2(t)$ für fast alle $t \in D_f$

Genau gesprochen dürfen zwei fast identische Funktionen demnach nur auf einer Menge vom „Mass 0“ verschieden sein.

Diese Definition macht daher Sinn, weil eine Veränderung einer Funktion auf einer Menge vom Masse 0 das „Lebesgue'sche Integral“ nicht beeinflusst. $\mathcal{L}\{f\}$ ändert daher bei einer solchen Veränderung nicht. Schon beim Riemannschen Integral ändert der Wert des Integrals nicht, wenn man den Integranden in einem isolierten Punkt abändert, z.B. wenn man den Wert dort verdoppelt.

Definition: Wir nennen einen Operator $\mathcal{O} : f(t) \longmapsto F(s)$ **fast bijektiv**
 $: \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}$ führt immer zu einer fast identischen Originalfunktion zurück.

Satz: Die Laplace-Transformation ist fast bijektiv auf $D_{\mathcal{L}}$.

\leadsto Zwei Rücktransformierte $f_1 = \mathcal{L}^{-1}\{f\}$ und $f_2 = \mathcal{L}^{-1}\{f\}$ sind somit nur auf einer Nullmenge verschieden. Schränkt man demnach \mathcal{F} auf stetige Funktionen auf \mathbb{R}_0^+ ein, so erreicht man Eindeutigkeit.

Korollar: Für stetige Funktionen auf \mathbb{R}_0^+ ist die Laplace-Transformation bijektiv

Hinweis zum Beweis:

1. Es ist nach Konstruktion $\mathcal{L}\{\mathcal{F}\} = \Phi$, d.h. \mathcal{L} ist surjektiv.

2. Sei $f_1 \not\equiv f_2$ und $\mathcal{L}\{f_1\} \equiv \mathcal{L}\{f_2\} \Rightarrow \mathcal{L}\{f_1 - f_2\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot (f_1(t) - f_2(t)) dt$

e^{-st} ist analytisch.

Falls f_1, f_2 auch analytisch sind, so gilt:

$$(f_1(t) - f_2(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \neq 0$$

Später werden wir zeigen: $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Falls die Konvergenz unproblematisch ist, gilt: $\mathcal{L}\{f_1 - f_2\} = \mathcal{L}\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}} =$

$F(s) \equiv 0, \quad s \in \mathbb{C} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0 \dots) \Rightarrow \forall_n: a_n = 0$

\leadsto Widerspruch!

(Fast identische analytische Funktionen sind identisch.)

3. f_1, f_2 nicht analytisch: Argumentiere mit Approximationen durch analytische Funktionen.

4. Wegen $D_f = \mathbb{R}_0^+$ spielt das Verhalten von f auf \mathbb{R}^- keine Rolle.

3.3 Aufbau des Kalküls

3.3.1 Elementare Regeln

1. Beispiel:

$$f(t) = e^{a \cdot t} \Rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot e^{a \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s) \cdot t} dt = \frac{e^{(a-s) \cdot t}}{a-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-s} (\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a-s) \cdot t} - e^0)$$

$$\text{Sei } \operatorname{Re}(a-s) < 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(a) < \operatorname{Re}(s) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a-s) \cdot t} = 0 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}$$

2. Beispiel: $f(t) = c \cdot t^n, \quad n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow F(s) = c \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot t^n dt = -\frac{c}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot t^n \Big|_0^{\infty} + \frac{n \cdot c}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot t^{n-1} dt = \frac{n \cdot c}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot t^{n-1} dt$$

für $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned} \text{Iteration: } \Rightarrow F(s) &= \frac{n(n-1) \cdot c}{s^2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot t^{n-2} dt = \dots = \frac{n! \cdot c}{s^n} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot t^{n-n} dt = \\ &= \frac{n! \cdot c}{s^n} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} dt = \frac{n! \cdot c}{s^n \cdot (-s)} e^{-s \cdot t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{n! \cdot c}{s^{n+1}} \Rightarrow F(s) = \frac{n! \cdot c}{s^{n+1}} \text{ für } \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

3. Beispiel: $f(t) = \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)\} = F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = -\frac{1}{s} e^{-s \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) dt \\ &= \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) dt = \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\cos(\omega \cdot t)\} = 0 + \frac{\omega}{s} \left(-\frac{1}{s} e^{-s \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \Big|_0^{\infty} - \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) dt \right) \\ &= \frac{\omega}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} F(s) \right) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} F(s) \Rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{s^2}} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \text{ für } \operatorname{Re}(s) > 0 \\ \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)\} &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\cos(\omega \cdot t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos(\omega \cdot t)\} = \frac{s \omega}{\omega(s^2 + \omega^2)} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ &\text{für } \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

Damit kennen wir einige Transformationen elementarer Funktionen. Die Transformationen vieler anderer gebräuchlicher Funktionen lassen sich mit Hilfe von Regeln aus diesen Elementartransformationen ableiten.

Regeln:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & e^{a \cdot t} \circ \bullet \frac{1}{s-a} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a) \\
 (2) \quad & c \cdot t^n \circ \bullet \frac{n! \cdot c}{s^{n+1}} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0 \\
 (3) \quad & \sin(\omega \cdot t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0 \\
 (4) \quad & \cos(\omega \cdot t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0
 \end{aligned}$$

Korollar:

$$\begin{aligned}
 (2') \quad & c \circ \bullet \frac{c}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0 \\
 (2'') \quad & 0 \circ \bullet 0 \quad (\text{Spezialfall}) \\
 (2''') \quad & t \circ \bullet \frac{1}{s^2} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0
 \end{aligned}$$

3.3.2 Linearitätsregeln

Aus der Linearität des Integraloperators folgt sofort die Linearität der Laplace-Transformation.

Satz: **Vor.:**

$$f_1 \circ \bullet F_1, \quad f_2 \circ \bullet F_2, \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

Beh.:

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \circ \bullet \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 \quad \text{resp.} \\
 & \mathcal{L}\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\} = \lambda_1 \mathcal{L}\{f_1\} + \lambda_2 \mathcal{L}\{f_2\}
 \end{aligned}$$

Konsequenz:

$$f(t) = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \circ \bullet \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2 - 1}$$

Regel: (4) $\sinh(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2 - 1} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\alpha) = 1$

3.3.3 Streckung im Urbildbereich

$$\tau := \lambda t, \quad \lambda > 0$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathcal{L}\{f(\lambda t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(\lambda t) dt = \int_0^\infty e^{-s \frac{\tau}{\lambda}} \cdot f(\tau) \frac{d\tau}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-(\frac{s}{\lambda})\tau} \cdot f(\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right) \\
 \Rightarrow f(\lambda t) &\circ \bullet \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

Regel: **Vor.:**

$$f(t) \circ \bullet F(s), \quad \lambda > 0$$

Beh.:

$$f(\lambda t) \circ \bullet \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

Bsp.: $\sinh(8t) \circ \bullet \frac{1}{8} \frac{64}{s^2 - 64} = \frac{8}{s^2 - 64}$

3.3.4 Differentiationsregel

Regel:

Vor.:

$$f(t) \circ\!\!\!\bullet F(s)$$

Beh.:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f'(t) \circ\!\!\!\bullet s \cdot F(s) - f(0^+), \\ & f(0^+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t) \\ (2) \quad & f''(t) \circ\!\!\!\bullet s^2 \cdot F(s) - s f(0^+) - f'(0^+) \\ & \vdots \\ (n) \quad & f^{(n)}(t) \circ\!\!\!\bullet s^n \cdot F(s) - s^{(n-1)} f(0^+) - \\ & s^{(n-2)} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \end{aligned}$$

Zum Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot f'(t) dt = e^{-st} \cdot f(t) \Big|_0^\infty + s \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \cdot f(t) - \lim_{t \downarrow 0} e^{-st} \cdot f(t) + s \cdot F(s) \\ &= 0 - e^0 \cdot f(0^+) + s \cdot F(s) \end{aligned}$$

Ebenso für: $f'', \dots, f^{(n)}(t)$.

Symbol: $f(0)$ existiert $\leadsto f(0^+) := f(0)$, sonst $f(0^+) := \lim_{t \downarrow 0} f(t)$.

$$\begin{aligned} \text{Bsp.:} \quad & f'(t) = \cos(\omega t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right), \quad f(t) = \sin(\omega t) \circ\!\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \Rightarrow \quad & f'(t) = \cos(\omega t) \circ\!\!\!\bullet s \cdot \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{1}{\omega} \sin(\omega \cdot 0^+) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 0 = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

3.3.5 Anwendung auf eine D'Gl

$$\text{AWP : } y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Sei $y(t) \circ\!\!\!\bullet Y(s)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & y'' + \omega^2 y = 0 \circ\!\!\!\bullet s^2 Y(s) - y(0^+) \cdot s - y'(0^+) + \omega^2 Y(s) = s^2 Y(s) - 1 \cdot s - 0 + \omega^2 Y(s) = 0 \\ & \text{(wegen } 0 \circ\!\!\!\bullet 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(s)(s^2 + \omega^2) = s, \quad Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \bullet\!\!\!\circ y(t) = \cos(\omega t)$$

\leadsto **Lösung:** $y(t) = \cos(\omega t)$

3.3.6 Integrationsregel

Als Umkehrung der Differentiationsregel erhalten wir die Integrationsregel:

$$\text{Sei } g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \circ\!\!\!\bullet G(s), \quad f(t) \circ\!\!\!\bullet F(s) \leadsto G(s) = ?$$

$$\leadsto g'(t) = f(t) \bullet\!\!\!\circ F(s) \wedge g'(t) = f(t) \bullet\!\!\!\circ s \cdot G(s) - g(0^+) = s \cdot G(s) \Rightarrow F(s) = s \cdot G(s)$$

Regel:**Vor.:**

$$f(t) \circ \bullet F(s)$$

Beh.:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{F(s)}{s}$$

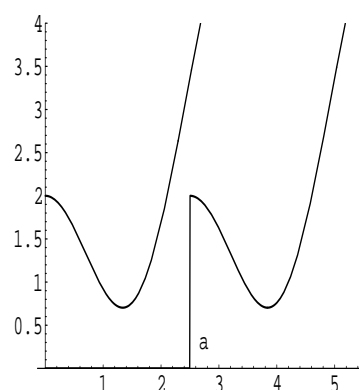
Bsp.: (Integralgleichung)

$$\begin{aligned} \int_0^t y(\tau) d\tau &= y(t) + 1 \circ \bullet \frac{Y(s)}{s} = Y(s) + \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) \left(\frac{1-s}{s} \right) = \frac{1}{s} \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{1}{1-s} = \frac{-1}{s-1} \bullet \circ y(t) = -e^t \rightsquigarrow \textbf{Lösung: } y(t) = -e^t \end{aligned}$$

3.3.7 Verschiebungssätze

A Verschobene Originalfunktion:

$$f(t) \mapsto \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ f(t-a) & t > a > 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\tilde{f}(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \tilde{f}(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} \cdot \tilde{f}(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} \cdot f(t-a) dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} \cdot f(\tau) d\tau \\ &= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau = e^{-sa} \cdot F(s) \end{aligned}$$

Regel:**Vor.:**

$$f(t) \circ \bullet F(s), \quad \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ f(t-a) & t > a > 0 \end{cases}$$

Beh.:

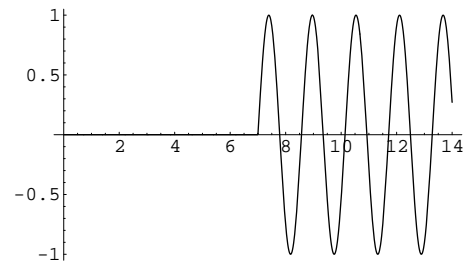
$$\tilde{f}(t) \circ \bullet e^{-sa} \cdot F(s)$$

Bsp.:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 7 \\ \sin(4 \cdot (t - 7)) & t > 7 \end{cases}$$

$$\sin(4 \cdot t) \circ \bullet \frac{4}{s^2 + 16}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(t) \circ \bullet e^{-s \cdot 7} \cdot \frac{4}{s^2 + 16}$$



B Verschobene Bildfunktion:

\leadsto Exponentielle Dämpfung

$$\begin{aligned} \text{Sei } \mathcal{L}\{e^{c \cdot t} \cdot f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot e^{c \cdot t} \cdot f(t) dt = \int_0^\infty e^{(c-s) \cdot t} \cdot f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-c) \cdot t} \cdot f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\tilde{s} \cdot t} \cdot f(t) dt = F(\tilde{s}) = F(s-c) \quad \text{für } \operatorname{Re}(s-c) > 0 \end{aligned}$$

Regel: Vor.: $f(t) \circ \bullet F(s), \quad c \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(s-c) > 0, \quad s \in \mathbb{C}$

Beh.: $e^{c \cdot t} \cdot f(t) \circ \bullet F(s-c)$

Bsp.: $e^{c \cdot t} \cdot f(t) = e^{c \cdot t} \cdot \sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{(s-c)^2 + \omega^2}$

3.3.8 Multiplikationsregel

(Auch Differentiationsregel der Bildfunktion)

Sei f eine vernünftige Funktion, z.B. stetig::

$$\begin{aligned} -\frac{dF(s)}{ds} &= -\frac{d}{ds} \left(\int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot f(t) dt \right) = -\int_0^\infty \frac{d e^{-s \cdot t}}{ds} \cdot f(t) dt = -\int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot (-t) \cdot f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot (t \cdot f(t)) dt = \mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} \end{aligned}$$

Regel: Vor.: $f(t) \circ \bullet F(s), \quad f \text{ zulässig}$

Beh.: $t^n \cdot f(t) \circ \bullet (-1)^n \cdot \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

Korollar:**Vor.:**

$$f_n(t) \circ \bullet F_n(s), f_n \text{ zulässig}$$

Beh.:

$$\sum_{n=0}^N f_n(t) \cdot t^n \circ \bullet \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot \frac{d^n F_n(s)}{d s^n}$$

Beispiele:

$$(1) \quad t \cdot \sin(t) \circ \bullet - \frac{d \frac{1}{s^2+1}}{d s} = \frac{2 s}{(s^2+1)^2}$$

$$(2) \quad t^n \cdot e^{a \cdot t} \circ \bullet (-1)^n \frac{d^n \frac{1}{s-a}}{d s^n} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Analog zur Multiplikationsregel gibt es auch eine Divisionsregel:

3.3.9 DivisionsregelBetrachte: $f(t) \circ \bullet F(s)$,

$$\int_s^\infty F(\tau) d\tau = \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\tau t} \cdot f(t) dt \right) d\tau = \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\tau t} \cdot f(t) d\tau \right) dt = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t} e^{-\tau t} \cdot f(t) \Big|_{\tau=s}^{\tau=\infty} \right) dt$$

$$\text{Sei } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{e^{-\tau t} \cdot f(t)}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \int_s^\infty F(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-\tau s} \cdot \frac{f(t)}{t} dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \text{ falls } \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ existiert}$$

Regel:**Vor.:**

$$f(t) \circ \bullet F(s), \\ \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ existiert}$$

Beh.:

$$\frac{f(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty F(\tau) d\tau$$

$$\text{Bsp.: } f(t) = \sin(t) \circ \bullet F(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

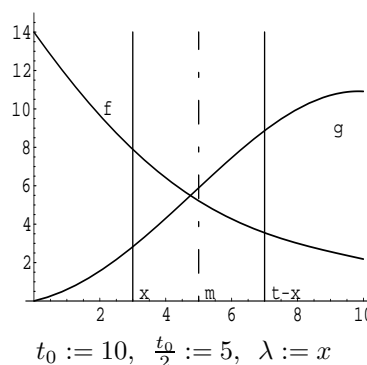
$$\Rightarrow \frac{\sin(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty \frac{1}{\tau^2+1} d\tau = \arctan(\tau) \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

3.3.10 Faltung**Definition:**

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(\lambda) \cdot g(t-\lambda) d\lambda \text{ heisst } \mathbf{Faltung}^4 \text{ von } f \text{ und } g.$$

⁴Von Emilie Borel, 1871 – 1956

Sei das Koordinatensystem auf dem Rand eines Blattes Papier aufgetragen. Die Senkrechte m auf die t -Achse gehe durch $\frac{t_0}{2}$. Falls man bei fixem t_0 das Papier mit dem Graphen längs m faltet, so liegen die Funktionswerte $g(t_0 - \lambda)$ und von $f(\lambda)$ auf derselben Ordinate.



Regel:

Vor.:

$$f(t) \circ \bullet F(s), \quad g(t) \circ \bullet G(s)$$

Beh.:

$$f(t) * g(t) \circ \bullet F(s) \cdot G(s)$$

Bemerkung:

1. Diese Regel ermöglicht eine Rücktransformation von Produkten.

2. **Achtung:**

$$f(t) \equiv g(t) \equiv 1 \circ \bullet F(s) \equiv G(s) \equiv \frac{1}{s}, \quad F(s) \cdot G(s) \equiv \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) \cdot g(t) = 1 \circ \bullet \frac{1}{s}$$

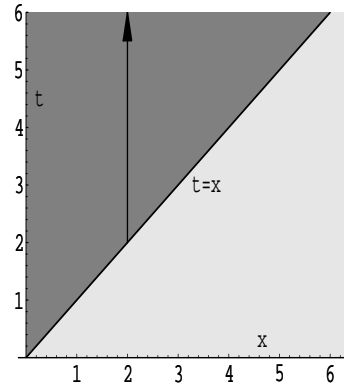
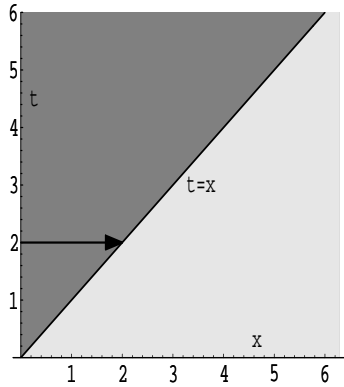
$$f(t) \cdot g(t) \neq t \circ \bullet F(s) \equiv G(s) \equiv \frac{1}{s^2}$$

Zum Beweis:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(\lambda) \cdot g(t - \lambda) d\lambda \right) dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\lambda) \cdot g(t - \lambda) d\lambda dt \rightsquigarrow 0 \leq \lambda \leq t \rightsquigarrow D$$

Satz von Fubini: \rightsquigarrow Möglichkeiten:

- 1) Erst über λ von 0 bis t integrieren und anschliessend über t — oder:
- 2) Erst über t von λ bis ∞ integrieren und anschliessend über λ .



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathcal{L}\{f * g\} &= \int_0^\infty \int_\lambda^\infty e^{-st} f(\lambda) \cdot g(t-\lambda) dt d\lambda = \int_0^\infty f(\lambda) \cdot \left(\int_\lambda^\infty e^{-st} \cdot g(t-\lambda) dt \right) d\lambda \\
 &= \int_0^\infty f(\lambda) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+\lambda)} \cdot g(\tau) d\tau \right) d\lambda = \int_0^\infty f(\lambda) \cdot e^{-\lambda s} \cdot \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} \cdot g(\tau) d\tau \right) d\lambda = \int_0^\infty f(\lambda) \cdot e^{-\lambda s} \cdot G(s) d\lambda \\
 &= G(s) \cdot \int_0^\infty f(\lambda) \cdot e^{-\lambda s} d\lambda = G(s) \cdot F(s)
 \end{aligned}$$



Bsp.: Bekannt: $\sin(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2+1}$

Problem: $\frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s^2+1)^2} \bullet \circ ?$

Mit Faltung:

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} \bullet \circ \sin(t) * \sin(t) = \int_0^t \sin(\lambda) \cdot \sin(t-\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} (\sin(t) - t \cdot \cos(t))$$

Bemerkung:

Fast überall identische zulässige Funktionen haben fast überall identische Faltungen. Die Transformaten der Faltungsprodukte sind identisch.

Symbol: Um eine fast bijektive Transformation besonders zu kennzeichnen, benutzen wir die Symbole $\circ \bullet$, $\bullet \circ$. Für fast identisch schreiben wir \simeq

Eine Betrachtung:

1. $f * g \circ \bullet F \cdot G = G \cdot F \bullet \circ g * f \Rightarrow f * g \simeq g * f$
2. $(f * g) * h \circ \bullet \mathcal{L}\{f * g\} \cdot H = (F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H) \bullet \circ f * (g * h) \Rightarrow (f * g) * h \simeq f * (g * h)$
3. $f * (g + h) \circ \bullet F \cdot \mathcal{L}\{f + h\} = F \cdot (G + H) = F \cdot G + F \cdot H \bullet \circ f * g + f * h \Rightarrow f * (g + h) \simeq f * g + f * h$

Satz:

Im Sinne von „fast identisch“ gilt für das Faltungsprodukt:

1. $f * g \simeq g * f$ (Kommutativität)
2. $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$ (Assoziativität)
3. $f * (g + h) \simeq f * g + f * h$ (Distributivität)

Bsp.: Integralgleichung:

$$t^2 + \int_0^t y(\lambda) \cdot \sin(t - \lambda) d\lambda = y(t) \circ \bullet \frac{2}{s^3} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = Y(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{s^2 + 1}{s^2} = 2 \frac{s^2 + 1}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5} \bullet \circ y(t) \simeq t^2 + \frac{t^4}{12}$$

(Für die Eindeutigkeit von y kann man z.B. Stetigkeit verlangen...)

3.3.11 Periodische Funktionen

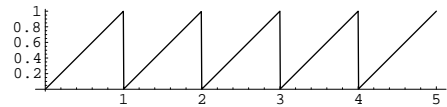
Periodische Funktionen sind vor allem in der Elektrotechnik häufig anzutreffen...

Bsp.:

$$f(t) = f(t + nT), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt = \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) dt +$$

$$+ \int_T^{2T} e^{-st} \cdot f(t) dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} \cdot f(t) dt + \dots$$



Allgemeiner Summand: $t := \tau + nT$

$$\tau = t - nT \Rightarrow \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} \cdot f(t) dt = \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} \cdot f(\tau + nT) d\tau = e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau =$$

$$= (e^{-sT})^n \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau := \rho(s)^n \cdot \varphi(s)$$

$$\Rightarrow F(s) = \varphi(s) \cdot (1 + \rho(s) + \rho(s)^2 + \rho(s)^3 + \dots) = \varphi(s) \cdot \frac{1}{1 - \rho(s)} \quad \text{für } |\rho(s)| < 1$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{1 - \rho(s)} \cdot \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau \quad \text{für } |e^{-sT}| = e^{-\operatorname{Re}(s)T} < 1, \text{ d. h. } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Regel:

Vor.:

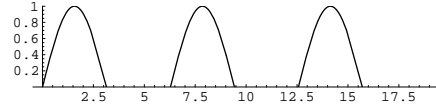
$f(t)$ T -periodisch,
 $t \geq 0, f(t) \circ \bullet F(s), \operatorname{Re}(s) > 0$
 $\rho(s) = e^{-sT}$

Beh.:

$$F(s) = \frac{1}{1 - \rho(s)} \cdot \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau$$

Bsp.:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi] \\ 0 & t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$



$$f(t) = f(t + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-s\tau} \cdot \sin(\tau) d\tau = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{e^{-st}(-s \sin(t) - \cos(t))}{s^2 + 1} \Big|_{t=0}^{t=\pi} \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(1 + e^{-\pi s}) \cdot \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}} = \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(s^2 + 1)} \end{aligned}$$

3.3.12 Anfangs- und Endwerte

Wir wollen hier den Zusammenhang von $f(t)$ und $F(s)$ für $s \rightarrow \infty$ und $s \downarrow 0$ studieren.

Sei $s \in \mathbb{C}$ zulässig für die Existenz von $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Ebenso existiere $\mathcal{L}\{f'(t)\}$.

Sei $\langle s_n \rangle$ eine beliebige zulässige Folge mit $s_n \rightarrow \infty$. Falls für alle solche $\langle s_n \rangle$ gilt: $e^{-s_n \cdot t} \cdot f'(t)$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, \infty]$, so darf die nachfolgende Grenzwertrelation gliedweise integriert werden:

$$0 = 0 \cdot f'(t) = e^{-\infty} \cdot f'(t) = e^{-t \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} s_n)} \cdot f'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-s_n \cdot t} \cdot f'(t)$$

Das wenden wir auf die Differentiationsregel an:

$$\begin{aligned} s_n \cdot F(s_n) &= \int_0^\infty e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot F(s_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \right) = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \\ &= \int_0^\infty e^{-\infty} \cdot f'(t) dt + f(0^+) = \int_0^\infty 0 \cdot f'(t) dt + f(0^+) = 0 + f(0^+) = f(0^+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t) \end{aligned}$$

Unter denselben Voraussetzungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) &= \lim_{s_n \downarrow 0} \left(\int_0^\infty e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \right) = \int_0^\infty \lim_{s_n \downarrow 0} e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) = \int_0^\infty e^0 \cdot f'(t) dt + f(0^+) \\ &= \int_0^\infty f'(t) dt + f(0^+) = f(t) \Big|_0^\infty + f(0^+) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+) + f(0^+) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \end{aligned}$$

Regel:

Vor.:

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existiert

$s, s_n \in \mathbb{C}$ zulässig

Die verwendeten Grenzwerte existieren

$\forall \langle s_n \rangle, s_n \rightarrow \infty : e^{-s_n \cdot t} \cdot f'(t)$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, \infty]$

Beh.:

$$(1) \quad \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$(2) \quad \lim_{s_n \rightarrow \infty} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{t \downarrow 0} f(t)$$

Konsequenz: Wenn man das Verhalten einer Lösung $y(t)$ einer D'Gl für grosse t abschätzen will und $Y(s)$ berechnet werden kann, so macht diese Regel die Rücktransformation $Y \bullet \circ y$ unnötig. Die Erfahrung zeigt, dass oft gerade diese Rücktransformation Probleme bringt.

Beispiele:

Wir wissen: $e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$ für $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$.

Sei $a = 1 \Rightarrow f(t) = e^t \circ \bullet \frac{1}{s-1}$

$$1. \lim_{s_n \rightarrow \infty} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{s_n \rightarrow \infty} s_n \cdot \frac{1}{s_n - 1} = \lim_{s_n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{s_n}} = 1 = e^0 = \lim_{t \downarrow 0} e^t \quad \text{☺}$$

$$2. \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot \frac{1}{s_n - 1} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty \neq 0 \Rightarrow ?? \quad \text{☹}$$

Wieso stimmt im zweiten Beispiel die Sache nicht? — Ist die Regel trotz aller Logik falsch?

Erklärung:

$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$ bedeutet hier $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(1)$. Dann bilden wir später $\lim_{s \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n)$. Damit gerät aber s_n in einen nicht zulässigen Bereich. Eine Voraussetzung ist verletzt, und die Regel ist hier gar nicht anwendbar! Man sieht hier eindrücklich, wie wichtig die Beachtung von Voraussetzungen sind. . .

$$3. \text{ Sei } a = -1 \Rightarrow f(t) = e^{-t} \circ \bullet \frac{1}{s+1}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(-1), \quad 0 = \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \not\leq -1$$

Die oben verletzte Voraussetzung ist hier also erfüllt.

$$\leadsto \lim_{s \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{s \downarrow 0} s_n \cdot \frac{1}{s_n + 1} = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad \text{☺}$$

3.3.13 Transformation einiger rationaler Funktionen

Formeln

$$\text{Seien} \quad \Phi := \frac{C - B \cdot p}{\omega}, \quad \omega := \sqrt{q - p^2}$$

Ohne Herleitung ist nachfolgend eine Auswahl von Rücktransformationen aufgelistet. Der Leser kann die Formeln kontrollieren durch Transformation der rechten Seite. Man kann sich die Sache allerdings auch einfach machen, indem man mit Hilfe eines Computeralgebra-Programms (z.B. Mathematica) die Laplace-Integrale der rechten Seite rechnet. . .

Regeln:

$$1. \frac{Bs + C}{s^2 + 2ps + q} \circ \bullet e^{-p \cdot t} (\Phi \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t))$$

2. $\frac{Bs+C}{(s^2+2ps+q)^2} \circ \bullet e^{-p \cdot t} \left(\left(\frac{B \cdot t}{2\omega} + \frac{\Phi}{2\omega^2} \right) \Phi \sin(\omega t) - \frac{\Phi}{2\omega^2} \cdot t \cdot \cos(\omega t) \right)$
3. $\frac{Bs+C}{(s^2+2ps+q)^3} \circ \bullet \frac{e^{-p \cdot t}}{8\omega^3} \cdot \sin(\omega t) \cdot (B \cdot t + \Phi \cdot \left(\frac{3}{\omega} - \omega^2 \cdot t - (B \cdot \omega \cdot t^2 + 3\Phi \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(\omega t) \right))$

Bemerkung:

Die Erfahrung zeigt, dass bei D'Gl $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ häufig rational wird. Auch führt die Transformation einer linearen D'Gl mit konstanten Koeffizienten (AWP) immer auf einen Ausdruck der Form $Y(s) \cdot P(s) = F(s) + Q(s)$, $P(s), Q(s)$ Polynome. Damit muss $\frac{Q(s)}{P(s)}$ rücktransformiert werden.

Wir kennen bereits die Rücktransformationen folgender Ausdrücke:

$$\frac{c}{s^n}, \quad \frac{c}{(s-a)^n}, \quad \frac{\omega \cdot c}{s^2 + \omega^2}, \quad \frac{s \cdot c}{s^2 + \omega^2} \text{ u.s.w.}$$

Daher kann man mit der **Linearitätsregel** und der **Partialbruchzerlegung** von $\frac{Q(s)}{P(s)}$ einigermassen auskommen. Allgemein zeigt sich, dass das schwierigere Problem immer in der Rücktransformation $y(s) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ liegt.

Beispiel

$$\text{AWP :} \quad E(y) \equiv a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

$$E(y) \circ \bullet a(s^2 Y - s y_0 - y'_0) + b(s Y - y_0) + c Y = F(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{a s^2 + b s + c} + \frac{a \cdot s \cdot y_0 + a \cdot y'_0 + b \cdot y_0}{a s^2 + b s + c}$$

Die Erfahrung zeigt, dass F häufig rational ist.

Für die Lösung von linearen D'Gl mit konstanten Koeffizienten ist es somit wichtig, die Rücktransformation von „Basisbrüchen“ zu beherrschen, die bei der Partialbruchzerlegung entstehen.

Methoden zur Rücktransformation

1. Einsatz von Computeralgebra-Programmen (z.B. Mathematica).
2. Laplace-Transformations-Tabellen (Lexika).
3. Verwendung der Regeln (vgl. oben).
4. Umformungen, z.B. mit Partialbruchzerlegung, um auf bekannte Transformierte zu gelangen.
5. Verwendung des Faltungssatzes.
6. Explizite Berechnung, vgl. unten.

Explizite Berechnung

Mit Hilfe von Kenntnissen in Funktionentheorie gelingt es mit Hilfe des Residuensatzes die Rücktransformierte explizit zu berechnen. (Analog wie bei der Fouriertransformation, Integral von Mellin-Fourier, C : Browich-Kurve.)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} F(s) ds$$

3.4 Musterbeispiele

3.4.1 Rücktransformationen

$$1. F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} = \frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -1 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\} + 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s-3}\right\} = -e^{-t} + 4e^{3t}$$

$$2. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} + \frac{5}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= 4e^{2t} - 3 \cos 4t + \frac{5}{2} \sin(2t)$$

$$3. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 \cdot \frac{2}{2}}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2} e^t \cdot \sin(2t)$$

$$4. \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}s} \cdot \frac{s}{s^2+4}\right\} = \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \frac{\pi}{3} \\ \cos(2t - \frac{2\pi}{3}) & t > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$5. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{(s-2)^2+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s-2)}{(s-2)^2+16}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{(s-2)^2+16}\right\}$$

$$= 6e^{2t} \cos 4t + 2e^{2t} \sin(4t) = 2 \cdot e^{2t} (3 \cos(4t) + \sin(4t))$$

$$6. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 \cdot \frac{\omega}{\omega}}{s(s^2+\omega^2)}\right\} = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega \tau) d\tau = -\frac{1}{\omega^2} \cos(\omega \tau) \Big|_0^t = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))$$

$$7. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-t}$$

3.4.2 Lösen von D'Gl

$$1. \text{ AWP : } E(y) \equiv y' - 7y = e^{7t}, \quad y(0) = 0$$

$$\text{Lösung: } E(y) \circ \bullet s \cdot Y(s) - 0 - 7Y(s) = \frac{1}{s-7} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-7)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-7)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{s-7}\right)\right\} = t \cdot e^{7t}$$

$$2. \text{ AWP : } E(y) \equiv y' + y = \sin(t), \quad y(0) = 1$$

Lösung:

$$E(y) \circ \bullet s \cdot Y(s) - 1 + Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+2}{(s+1)(s^2+1)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t) = 1.5 e^{-t} - 0.5 \cos(t) + 0.5 \sin(t)$$

$$3. \text{ AWP : } E(y) \equiv y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 \cdot e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2$$

Lösung: $E(y) \circ \bullet H(Y) =$

$$\begin{aligned} & s^3 \cdot Y(s) - s^2 \cdot y(0^+) - s \cdot y'(0^+) - y''(0^+) - 3(s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0^+) - y'(0^+)) + 3(s \cdot Y(s) - y(0^+)) - Y(s) \\ &= \frac{2}{(s-1)^3} \Rightarrow (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y(s) - s^2 + 2 + 2s - 3 = \frac{s^2 + 2}{(s+1)} \\ &\Rightarrow Y(s) = \frac{(s^2 - 3s + 1)(s-1)^3 + 2}{(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)(s-1)^3} = \frac{(s^2 - 3s + 1)(s-1)^3 + 2}{(s-1)^6} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{(s-1)^6} - \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{2t^5 \cdot e^t}{5!} - \frac{t^2 \cdot e^t}{2} - t \cdot e^t + e^t \end{aligned}$$

3.4.3 Differentialgleichungen 2. Ordnung

In der Physik oder der Elektrotechnik hat man häufig Probleme der folgenden Art:

$$\text{AWP : } E(y) \equiv a y'' + b y' + c y = f(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad a, b, c = \text{const.}, \quad f(t) \text{ Funktion oder Distribution}$$

Wir definieren:

Definition: $f(t)$ heisst **Anregerfunktion** oder **Inputfunktion**
 $y(t)$ heisst **Antwortfunktion** oder **Outputfunktion**
 a, b, c heissen **Systemparameter**

Allgemein gilt: $(t = t_0)$

$$E(y) \circ \bullet a(s^2 Y - s y_0 - y'_0) + b(s Y - y_0) + c Y = F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(s)(a s^2 + b s + c) &= F(s) + y_0(a s + b) + a y'_0 \\ \Rightarrow Y(s) = Y_{inhom}(s) &= \underbrace{\frac{F(s)}{a s^2 + b s + c}}_{=Y_p(s)} + \underbrace{y_0 \frac{a s + b}{a s^2 + b s + c} + y'_0 \frac{a}{a s^2 + b s + c}}_{=Y_{hom}(s)} \end{aligned}$$

Spezialfälle:

1. $f(t) \equiv 0 \Rightarrow Y = Y_{hom}, \quad a y'' + b y + c y = 0 \rightsquigarrow$ Homogene D'Gl, Anfangsbedingungen nicht zwingend homogen.
2. $y_0 = y'_0 = 0, \quad f(t) \not\equiv 0 \Rightarrow Y = Y_p \rightsquigarrow$ Inhomogene D'Gl.
3. $y_0 = y'_0 = 0, \quad f(t) \equiv 0 \Rightarrow Y(s) \equiv 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0 \rightsquigarrow$ Homogene D'Gl.

Definition: $p(s) = a s^2 + b s + c$ heisst **charakteristisches Polynom der D'Gl**

$Y_{inhom}(s) \bullet \circ y_{inhom}(t) =$ **erzwungene Antwort**

$Y_{hom}(s) \bullet \circ y_{hom}(t) =$ **freie Antwort**

Bsp.:

$$\text{AWP} \quad E(y) \equiv y'' + y = \sin(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad \circ \bullet \quad s^2 Y - 1 + Y = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{s^2 + 1} = Y_p + Y_{hom} \quad \bullet \circ \quad y(t) = \underbrace{-\frac{1}{2}(\sin(t) + t \cos(t))}_{y_p(t)} + \underbrace{\sin(t)}_{y_{hom}(t)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{1}{2} t \cdot \cos(t)$$

3.4.4 Anwendung auf Systeme von D'Gl

Statt nur eine einzige D'Gl zu transformieren, kann man auch gleich mehrere, d.h. ein System transformieren. Ebenso lässt sich dann eine D'Gl höherer Ordnung auch dadurch lösen, dass man sie in ein System verwandelt und dieses transformiert.

1. Beispiel:

$$\begin{aligned} x''(t) - y(t) &= 0 \\ 9 \cdot x'(t) - y'(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 6, \quad \rightsquigarrow E(x, y): \text{AWP, System}$$

$$\text{Transformiere: } x(t) \circ \bullet X(s), \quad y(t) \circ \bullet Y(s)$$

$$\rightsquigarrow E(x, y) \circ \bullet \quad \begin{aligned} s^2 \cdot X(s) - s - Y(s) &= 0 \\ 9(s \cdot X(s) - 1) - s \cdot Y(s) + 6 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s^2 \cdot X(s) - Y(s) &= s \\ 9s \cdot X(s) - s \cdot Y(s) &= 3 \end{aligned}$$

Lösung nach Cramer:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 3 & -s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 & -1 \\ 9s & -s \end{vmatrix}} = \frac{-s^2 + 3}{-s^3 + 9s} = \frac{-s^2 + 3}{s(3+s)(3-s)} = \frac{1}{3s} + \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{3(s-3)}$$

$$\bullet \circ x(t) = \frac{1}{3} (1 + e^{3t} + e^{-3t})$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2 & s \\ 9s & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 & -1 \\ 9s & -s \end{vmatrix}} = \frac{3s^2 - 9s^2}{-s^3 + 9s} = -\frac{6s}{9 - s^2} = 6 \frac{s}{s^2 - 9} \quad \bullet \circ y(t) = 6 \cosh(3t) = 3(e^{3t} + e^{-3t})$$

2. Beispiel:

Beispiel mit gekoppelten Pendeln siehe Anhang Seite 296.

3.4.5 Anwendung der Faltung

Wir betrachten das folgende AWP:

$$E(y) \equiv a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

$$E(y) \circ \bullet a s^2 Y(s) + b s Y(s) + c Y(t) = F(s) + a (s y_0 + y'_0) + b = F(s) + R(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{F(s) + R(s)}{a s^2 + b s + c} = \frac{F(s) + R(s)}{P(s)} = F(s) \cdot \frac{1}{P(s)} + R(s) \cdot \frac{1}{P(s)}$$

$P(s)$ ist ein Polynom 2. Grades (**charakteristisches Polynom**), $R(s)$ ein Polynom 1. Grades.

\leadsto Die Rücktransformation von $\frac{R(s)}{P(s)}$ und von $\frac{1}{P(s)}$ ist nach der behandelten Theorie möglich. Es bleibt das Problem der Rücktransformation von $\frac{F(s)}{P(s)}$.

$$\text{Seien : } \frac{1}{P(s)} = G(s) \bullet \circ g(t) \Rightarrow \frac{F(s)}{P(s)} = F(s) \cdot \frac{1}{P(s)} = F(s) \cdot G(s) \bullet \circ f(t) * g(t)$$

Speziell für $y_0 = y'_0$ ist dann $R(s) = 0$. Damit gilt der Satz:

Satz:

Vor.:

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t), \quad y_0 = y'_0 = 0$$

$$\frac{1}{a s^2 + b s + c} \bullet \circ g(t)$$

Beh.:

$$y(t) = f(t) * g(t)$$

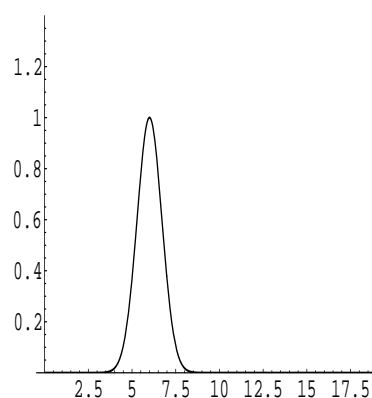
Bemerkung:

Dieser Satz ist auch bekannt als **Prinzip von Duhamel**.

3.5 Distributionen

3.5.1 Idee, Dirac–Stoss

Z.B. in der Mechanik hat man manchmal die Situation, dass auf eine Masse m während sehr kurzer Zeit eine sehr grosse Kraft wirkt.



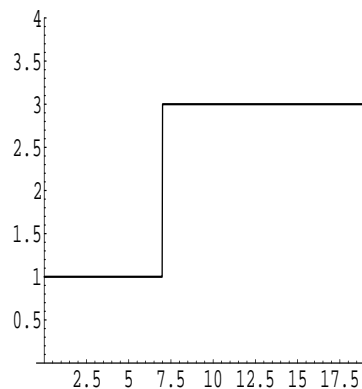
Bekanntlich gilt: $F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \ddot{s} = m \cdot \dot{v}(t)$

Der aufgenommene Impuls von m ist dann:

$$\Delta P = m \cdot v(t_1) - m \cdot v(0) = \int_0^{t_1} m \cdot \dot{v}(t) dt = \int_0^{t_1} F(t) dt$$

Das entspricht dem Inhalt der Fläche unter der Kurve im F - t -Diagramm. (Kraftstoss).

Andererseits hat man in der Elektrotechnik oft die Situation, dass z.B. die Spannung plötzlich sprunghaft ansteigt, z.B. bei einem Einschaltvorgang.



Problem: Wie geht man mathematisch mit diesem Verhalten um?

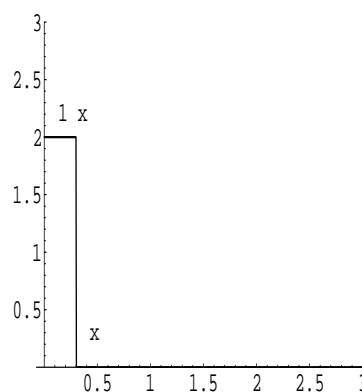
Den mathematischen Zugang dazu liefert die recht anspruchsvolle **Theorie der Distributionen**.

Hier wollen wir nur das Beispiel einer ganz einfachen Distribution studieren, nämlich die Dirac-Funktion. Dazu gehen wir von der Vorstellung eines Kraftstosses besonderer Art aus:

Sei

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & t \notin [0, \varepsilon] \end{cases}$$

$$\leadsto A = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$$



$$\text{Es gilt: } \int_0^\infty f_\varepsilon(t) dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty f_\varepsilon(t) dt = 1$$

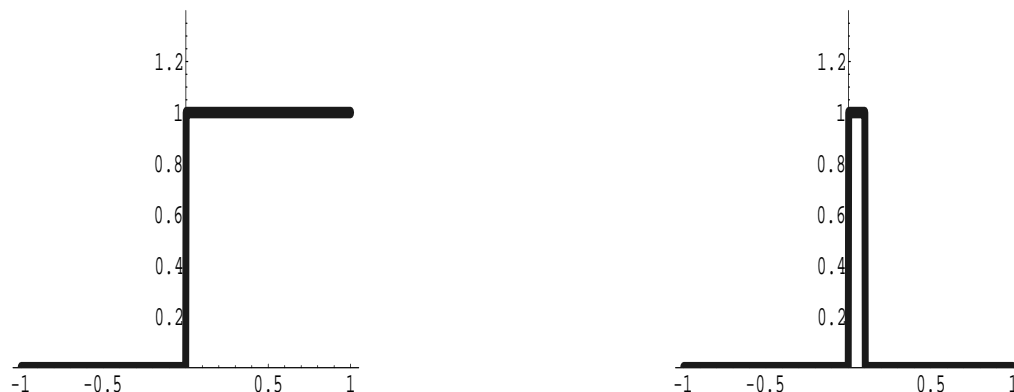
Ohne gross auf mathematische Strenge Rücksicht zu nehmen, können wir daher auf eher heuristische Art definieren:

Definition: $f_0(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon(t) := \delta(t)$ heisst **Dirac-Funktion**

$\delta(t)$ gehört zur Klasse der **Distributionen**. Man kann $\delta(t)$ als „verallgemeinerte Funktion auffassen“.

Bemerkung:

$\delta(t)$ kann auch heuristisch als „Ableitung“ der Sprungfunktion $h(t)$ für $\Delta t \rightarrow 0$ aufgefasst werden (vgl. Skizze).



Bemerkung:

Hier haben wir die Delta-Funktion auf eine mathematisch gesehen saloppe, nur für die Fachhochschule gedachte Art eingeführt. Die einwandfreien, in der Fachliteratur üblichen Darstellungen decken sich damit nicht unbedingt. Eine Bemerkung dazu findet der Leser im Anhang. (Siehe Seite 279.)

3.5.2 Die Transformierte der Dirac-Funktion

Ohne die mathematischen Details bei Limesvertauschungen u.s.w. untersucht zu haben, kann man wohl doch folgende Herleitung akzeptieren:

$$\begin{aligned} \delta(t) \circ \bullet \int_0^\infty e^{-st} \delta(t) dt &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} \cdot f_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon e^{-st} \cdot \frac{1}{\varepsilon} dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot e^{-st} \cdot \frac{-1}{s} \Big|_0^\varepsilon = \frac{-1}{s} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (e^{-s\varepsilon} - e^0) \stackrel{\text{Bernoulli}}{=} \frac{-1}{s} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1} \cdot (-s \cdot e^{-s\varepsilon}) = \frac{-1}{s} \cdot (-s) \cdot 1 = 1 \\ &\quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

Regel: $\delta(t) \circ \bullet \Delta(s) = 1$

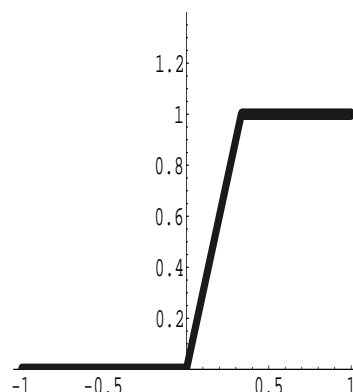
Bemerkung:

Rein formal ergibt sich daraus nach der Differentiationsregel für die Sprungfunktion $h(t)$:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Sei $h'(t) = \delta(t) \Rightarrow \delta(t) \circ \bullet s \cdot \mathcal{L}\{h(t)\} - h(0^+) = s \cdot H(s) - 0 = \Delta(s) = 1, \quad H(s) = \frac{1}{s}$

$h(t)$ ist als Grenzwert ($\varepsilon \downarrow 0$) des Geradenabschnittes zwischen $(0, 0)$ und $(\varepsilon, 1)$ aufzufassen, was zu $h(0^+) = 0$ führt.



Das Resultat stimmt überein mit: $h(t) \circ \bullet \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \, dt = \frac{1}{s}$

Wie man sieht, haben $h(t)$ und $f(t) = 1$ dieselbe Transformierte.

Formal können wir jetzt auch die Transformierte des vorläufig formalen Ausdrucks $\delta'(t) := \lambda(t)$ bestimmen:

$$\delta'(t) := \lambda(t) \circ \bullet \Lambda(s) = s$$

So wird offensichtlich, dass schliesslich auch Polynome als Laplace-Transformierte auftreten können, wenn man den hier eingeschlagenen Weg weiter verfolgt.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f(t) \cdot \delta(t) &= f(t) \cdot 0 = 0 = f(0) \cdot 0 = f(0) \delta(t) \quad \text{für } t \neq 0 \\ &\Rightarrow \int_0^\infty f(t) \cdot \delta(t) \, dt = \int_0^\infty f(0) \cdot \delta(t) \, dt = f(0) \int_0^\infty \delta(t) \, dt = f(0) \cdot 1 = f(0) \end{aligned}$$

Regel: (Ausblendeeigenschaft)

$$\int_0^\infty f(t) \delta(t) \, dt = f(0)$$

3.5.3 Anwendung auf ein AWP

3.5.4 Stoss zur Zeit 0

AWP $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \delta(t), \quad y_0 = y'_0 = 0$

Bekannt: $\frac{1}{as^2 + bs + c} \circ \bullet g(t), \quad 1 \bullet \circ f(t) = \delta(t)$

\leadsto **Lösung:** $y(t) = f(t) * g(t) = \delta(t) * g(t) = \int_0^t \delta(\lambda) g(t - \lambda) \, d\lambda$

Es gilt:

$$\delta(\lambda) \cdot g(t - \lambda) = \begin{cases} 0 = 0 \cdot g(t) = 0 = \delta(\lambda) \cdot g(t) & \lambda \neq 0 \\ \delta(0) \cdot g(t) & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = f(t) * g(t) = g(t) \cdot \int_0^t \delta(\lambda) d\lambda = g(t) \cdot 1 = g(t) \Rightarrow y(t) = g(t)$$

Regel: **Vor.:** $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \delta(t), \quad y_0 = y'_0 = 0$

Beh.: $y(t) = g(t)$

3.5.5 Stoss zur Zeit t_0

Stoss zur Zeit $t = t_0$ der Grösse 1: $\delta(t) \circ \bullet 1$

$$\Rightarrow \delta(t - t_0) \circ \bullet \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - t_0) dt \stackrel{t-t_0=\tau}{=} \int_{-t_0}^\infty e^{-s(\tau+t_0)} \delta(\tau) d\tau = e^{-st_0} \int_{-t_0}^\infty e^{-s\tau} \delta(\tau) d\tau = e^{-st_0} \cdot 1$$

für $t_0 > 0$

Regel: **Vor.:** $t_0 \geq 0$

Beh.: $\delta(t - t_0) \circ \bullet e^{-st_0}$

Beispiele:

1. $E(y) \equiv y'' + y = \sum_{k=0}^\infty \delta(t - k \cdot \pi) = \delta(t) + \delta(t - \pi) + \delta(t - 2\pi) + \dots, \quad y(0) = y'(0) = 0$

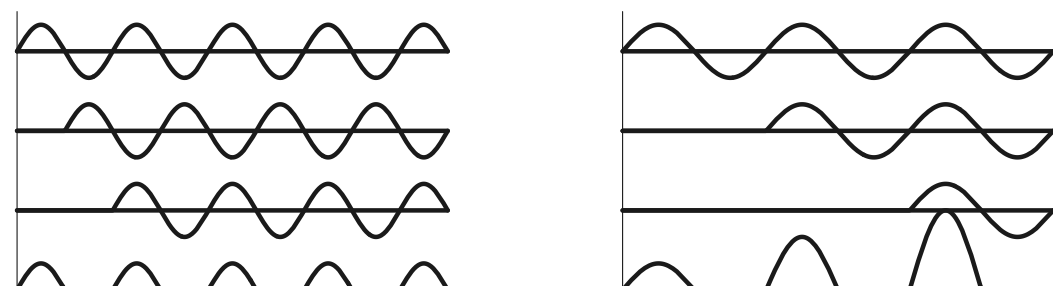
$$E(y) \circ \bullet s^2 Y + Y = 1 + e^{-s\pi} + e^{-2s\pi} + e^{-3s\pi} + \dots \rightsquigarrow \text{geometrische Reihe mit } q = e^{-s\pi}$$

$$Re(s) > 0 \Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{1+s^2} + \frac{e^{-s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-2s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-3s\pi}}{1+s^2} + \dots \bullet \circ y(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq \pi \\ \sin(t - \pi), & t > \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t - 2\pi), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 3\pi \\ \sin(t - 3\pi), & t > 3\pi \end{pmatrix} + \dots$$

$$\Rightarrow y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq \pi \\ -\sin(t), & t > \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 3\pi \\ -\sin(t), & t > 3\pi \end{pmatrix} + \dots$$

Aussehen:



2. $E(y) \equiv y'' + y = \sum_{k=0}^\infty \delta(t - k \cdot 2\pi) = \delta(t) + \delta(t - 2\pi) + \delta(t - 4\pi) + \dots, \quad y(0) = y'(0) = 0$

$$E(y) \circ \bullet s^2 Y + Y = 1 + e^{-2s\pi} + e^{-4s\pi} + e^{-6s\pi} + \dots \rightsquigarrow \text{geometrische Reihe mit } q = e^{-2s\pi}$$

$$Re(s) > 0 \Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{1+s^2} + \frac{e^{-2s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-4s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-6s\pi}}{1+s^2} + \dots \bullet \circ y(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t-2\pi), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 4\pi \\ \sin(t-4\pi), & t > 4\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 6\pi \\ \sin(t-6\pi), & t > 6\pi \end{pmatrix} + \dots$$

$$\Rightarrow y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 4\pi \\ \sin(t), & t > 4\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 6\pi \\ \sin(t), & t > 6\pi \end{pmatrix} + \dots$$

$$\rightsquigarrow y(t) = (n+1) \sin(t) \text{ für } t \in [2n\pi, 2(n+1)\pi]$$

\rightsquigarrow Amplitude wächst mit n .

3. Harmonischer Oszillator mit Dämpfung und Impulsänderung:

$$E(y) \equiv y'' + 2y' + y = 3\delta(t-1) + e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{3e^{-s}}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} \bullet \circ y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ 3 \cdot (t-1) \cdot e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases} + \frac{1}{2} e^{-t} \cdot t^2$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ e^{-t} (3 \cdot e^{(t-1)} + \frac{1}{2} t^2) & t > 1 \end{cases}$$

3.6 Probleme aus der Praxis

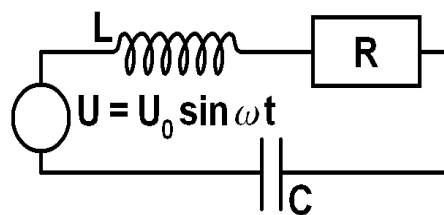
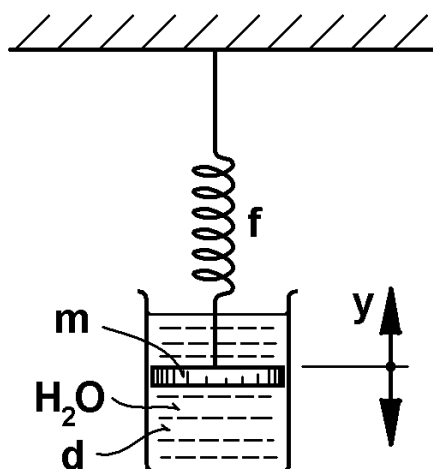
3.6.1 Schwingungen und Oszillatoren

Schwingungen treffen wir z.B. bei Federn, Pendeln, RCL-Schwingkreisen, Wirbelstromdämpfung, Molekülschwingungen, Torsionsschwingungen u.s.w..

1. Beispiel:

Annahme:

Dämpfungskraft \sim Geschwindigkeit. \dot{y} , Proportionalitätskonstante d (Dämpfungskonstante)



Mit dem Federgesetz ergibt sich dann:

$$m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + f \cdot y = 0, \quad f = \text{Federkonstante}$$

$$\text{Sei } 2\rho = \frac{d}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m} \Rightarrow \ddot{y} + 2\rho \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$$

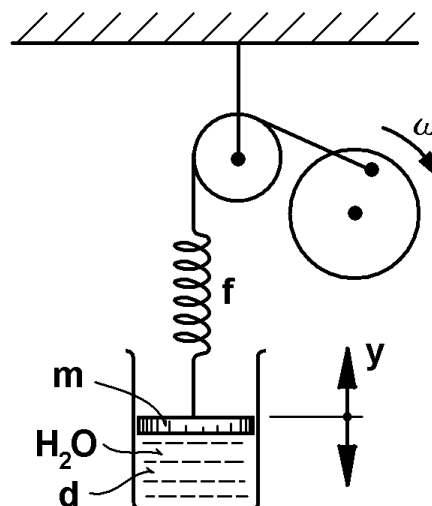
Die Erfahrung zeigt, dass man mit Vorteil die folgenden Fälle getrennt behandelt (Diskriminante!):

1. $\omega_0^2 - \rho^2 > 0$: **Schwache** Dämpfung
2. $\omega_0^2 - \rho^2 = 0$: **Kritische** Dämpfung
3. $\omega_0^2 - \rho^2 < 0$: **Starke** Dämpfung

2. Beispiel:

Falls zusätzlich eine Anregerkraft F wirkt, etwa über einen Exzenter, so erhält man die folgende D'Gl:

$$F(t) = k \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow$$



$$E(y) \equiv \ddot{y} + 2\rho \dot{y} + \omega_0^2 y = k \cdot \sin(\omega t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Aus physikalischen Gründen kann man vermuten:

$$y(t) = A \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi)$$

Das Studium des Verhaltens der Lösung abhängig von den speziellen Parametern (Resonanzverhalten u.s.w.) ist Gegenstand eines kleinen Mathematik-Labor Projekts (z.B. mit Mathematica). Daher wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

3.6.2 Stabilitätsverhalten von Lösungen

Problem: Regt man ein System, das sich in Ruhe befindet, von aussen kurz an, so erwartet man, dass das System nach einer gewissen Zeit wieder dem Ruhezustand zustrebt. Falls das nicht so geschieht, so zeigt das System ein labiles oder ein instabiles Verhalten analog zu Gleichgewichtszuständen in der Statik. Diesen Sprachgebrauch übernehmen wir von der Statik. Bevor wir praktische Probleme behandeln können, müssen wir aber noch das Problem der Bedeutung der „Anregung“ klären.

Bsp.:

$$\text{System} \rightsquigarrow \text{D'Gl:} \quad a y'' + b y' + c y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

„**System in Ruhe**“ kann nun zwei Bedeutungen haben:

1. $f(t) \equiv 0$ (keine äussere Anregung)

$$\Rightarrow Y = \frac{a \cdot s \cdot y_0 + a \cdot y'_0 + b \cdot y_0}{a \cdot s^2 + b \cdot s + c} \bullet \circ y(t)$$

2. $y_0 = y'_0, \quad f(t) = \delta(t)$ (oder ein vergleichbarer Stoss)

$$\rightsquigarrow f(t) = 0 \text{ für } t > 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{a \cdot s^2 + b \cdot s + c} \bullet \circ y(t)$$

Man erkennt sofort, dass der Fall (2) für Y ein Spezialfall des Falles (1) ist:

$$y_0 = 0, \quad a \cdot y'_0 = 1, \quad y'_0 = \frac{1}{a}$$

Entsprechendes gilt für D'Gl höherer Ordnung.

Unter einer „kurzen Anregung“ können wir demnach einen Dirac-Stoss vorstellen — oder auch Anfangsbedingungen, die einem solchen Stoss entsprechen.

Die Lösungsfunktion $y(t)$ eines derart kurz angeregten Systems ergibt sich demnach als Rücktransformierte einer rationalen Funktion $Y(s) = \frac{p_m(s)}{q_n(s)}$

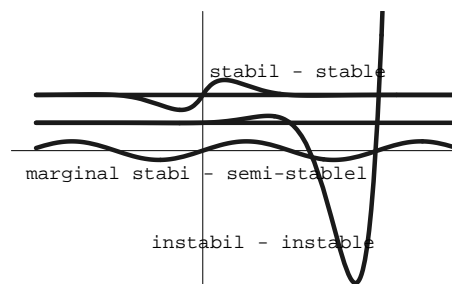
Nun können wir den Begriff der Stabilität genauer erklären:

Definition:

Eine Lösung einer D'Gl eines kurz angeregten Systems heisst:

1. **stabil** $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = c, \quad |y(t)| < k \in \mathbb{R}$
2. **marginal stabil (halbstabil)**
 $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : y(t) \in [c_1, c_2], \quad |y(t)| < k \in \mathbb{R}$
3. **instabil** in allen andern Fällen

Die Menge der stabilen Funktionen sind eine Teilmenge der halbstabilen.



Beispiele:

$$1. \frac{c}{(s+a)^n} \bullet \circ \frac{(-1)^{n-1} c}{(n-1)!} e^{-at} \cdot t^{n-1} \rightsquigarrow$$

$$(a) \text{ stabil, } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1} c}{(n-1)!} e^{-at} \cdot t^{n-1} = 0 \text{ für } \operatorname{Re}(a) > 0$$

$$(b) \text{ instabil für } (\operatorname{Re}(a) < 0) \vee (a = 0 \wedge n > 1) \text{ u.s.w}$$

$$2. \frac{1}{s^2+1} \bullet \circ \sin(t) \rightsquigarrow \text{ marginal stabil}$$

Bemerkung:

$$(a) \text{ Sei } y(t) \text{ stückweise stetig und marginal stabil resp. ganz stabil. } \Rightarrow y(t) \text{ beschränkt auf } \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt = Y(s) \text{ existiert für } \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$(b) \text{ Vgl. Beispiele in der Literatur, z.B. Glyn James, Advanced Modern Engineering Math., p.185 ff.}$$

$$3. E(y) \equiv y'' + 9y = \cos(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} E(y) \circ \bullet s^2 Y - s + 9Y &= \frac{s}{s^2+4} \\ \Rightarrow Y &= \frac{s^3+5s}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{4}{5} \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{5} \frac{s}{s^2+4} \bullet \circ y(t) = \frac{4}{5} \cos(3t) + \frac{1}{5} \cos(2t) \\ &\rightsquigarrow \text{ Ständige Anregung.} \end{aligned}$$

$$4. E(y) \equiv y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} E(y) \circ \bullet s^2 Y - s + 9Y &= 0 \Rightarrow Y = \frac{s}{(s^2+9)} \bullet \circ y(t) = \cos(3t) \\ &\rightsquigarrow y(t) \text{ marginal stabil.} \end{aligned}$$

3.6.3 Stabilitätskriterium

Ein System nennen wir bekanntlich **stabil**, wenn die Impulsantwort auf den Stoss $\delta(t)$ bei $t = 0$ mit der Zeit wieder zur Ruhe kommt. Bei linearen D'Gl mit konstanten Koeffizienten bedeutet das:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = \delta(t) \quad \circ \bullet \quad a_n s^n Y + a_{n-1} s^{n-1} Y + \dots + a_0 Y = 1$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{1}{a_n (s - s_1) \dots (s - s_n)} = \frac{1}{a_n} \left(\frac{A_1}{s - s_1} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n} \right)$$

(im Falle lauter verschiedener Nullstellen s_i)

$$Y \bullet \circ y(t) = \frac{1}{a_n} (A_1 e^{s_1 t} + \dots + A_n e^{s_n t}), \quad A_k, s_k \in \mathbb{C}$$

Im Falle zusammenfallender Nullstellen entstehen noch Terme folgender Form: $A_k t^j \cdot e^{s_k t}$

Nun streben aber alle Terme $e^{s_i t}$ und $t^j \cdot e^{s_k t}$ mit $t \rightarrow \infty$ gegen 0, wenn $\operatorname{Re}(s_i) < 0$ resp. $\operatorname{Re}(s_k) < 0$ gilt. Das System kommt zur Ruhe: $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Satz:

Stabilitätskriterium

Vor.:

s_k Nullstelle des charakteristischen Polynoms
 $\forall_{k=1}^n \operatorname{Re}(s_k) < 0$

Beh.:

$y(t)$ stabil

Achtung: Der Grenzwertsatz $\lim_{s \downarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ ist gemäss Voraussetzungen nur dann problemlos anwendbar, wenn $y(t)$ nicht exponentiell wächst. Kennt man nur $Y(s)$ und nicht $y(t)$, so ist eine Untersuchung der Nennernullstellen s_k für die Entscheidung der Stabilität empfehlenswert.

3.6.4 Randwertprobleme

Bsp.:

$$E(x) \equiv t \cdot y'' + 2y' + ty = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0 \quad (\text{Randwerte})$$

Hier fehlt $y'(0)$. Dafür ist $y(\pi) = 0$ gegeben.

Methode: Rechne wie gewohnt mit einem Parameter $y'(0) = \lambda$. Wähle anschliessend λ so, dass $y(\pi) = 0$ erfüllt ist.

Multiplikationsregel:

$$y'' \circ \bullet s^2 Y - s \cdot 1 - \lambda \Rightarrow t \cdot y'' \circ \bullet - 2sY - s^2 \cdot \frac{dY}{ds} + 1$$

$$2y' \circ \bullet 2(sY - 1), \quad t \cdot y \circ \bullet - \frac{dY}{ds} = -Y'$$

$$\Rightarrow E(x) \circ \bullet Y'(-s^2 - 1) + Y(-2s + 2s) + 1 - 2 = Y'(-s^2 - 1) - 1 = 0 \Rightarrow Y' = -\frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \int Y'(s) ds = \int -\frac{1}{s^2 + 1} ds = -\arctan(s) + C, \quad C = \text{const.} = ?$$

Es muss gelten: $\lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} Y(s) = \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt = 0$

(wobei gilt: $t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$)

Hinweis: $1 = y(0) = \lim_{t \downarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} Y(s) = \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} -\arctan(s) + C = -\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s), \quad \int_s^\infty \frac{1}{1 + \sigma^2} d\sigma = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = Y(s) \circ \bullet ?$$

$$\Rightarrow Y(s) = -\int_s^\infty Y'(\sigma) d\sigma = -\int_s^\infty \frac{-1}{1 + \sigma^2} d\sigma, \quad Y'(s) = \frac{dY}{ds} = \frac{d \frac{\pi}{2} - \arctan(s)}{ds} = -\frac{1}{1 + s^2}$$

$$\Rightarrow Y'(s) = \frac{-1}{1 + s^2} \bullet \circ -\sin(t) = -t \cdot y(t) \Rightarrow Y(s) \bullet \circ \frac{\sin(t)}{t}$$

Interessanterweise tritt in $y(t)$ jetzt λ nicht mehr auf! Doch wir haben Glück: $y(t)$ erfüllt die Randbedingung $y(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$. Wegen der Regel von Bernoulli ist auch die andere Randbedingung erfüllt: $y(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \Rightarrow y(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ ist Lösung!

3.7 LTI-Systeme

3.7.1 Grundlagen

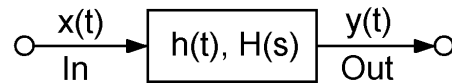
Bedeutung: LTI-Systeme: Lineare zeitinvariante Übertragungssysteme, wichtig in der Signal- und Rundfunktechnik.

Wir betrachten den folgenden Typus:

$x(t)$: Eingangssignal

$y(t)$: Ausgangssignal

$H(s)$: Übertragungsfunktion



Wir wollen hier nur Funktionen mit der folgenden Eigenschaft betrachten:

$$y(t) \circ \bullet Y(s) = H(s) \cdot X(s) \bullet \circ h(t) * x(t) = y(t), \quad H(s) \bullet \circ h(t), \quad X(s) \bullet \circ x(t)$$

Zur Zeit $t = 0$ herrscht der **Nullzustand** (Zero state).

Sei weiter das System dergestalt, dass $y(t)$ und $x(t)$ durch eine lineare D'Gl mit konstanten Koeffizienten zusammenhängen. Dazu seien die Randbedingungen homogen.

$$\leadsto \text{Sei } E(x, y) \equiv x(t) = \alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_0 y, \quad y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

\leadsto AWP, Nullzustand homogen.

Dann gilt: $E(x, y) \circ \bullet X(s) = \alpha_n s^n Y + \dots + \alpha_1 s Y + \alpha_0 Y$

$$\leadsto X(s) = P(s) \cdot Y(s) \quad \text{mit} \quad P(s) = \alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0,$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{P(s)} := H(s) \cdot X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{P(s)}, \quad H(s) \cdot P(s) = 1$$

Rücktransformation:

$$\alpha_n s^n H(s) + \dots + \alpha_1 s H(s) + \alpha_0 H(s) = H(s) \cdot P(s) = 1 \bullet \circ \delta(t) = \alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y$$

mit $h(0) = \dots = h^{(n-1)}(0) = 0$

Bedeutung von $h(t)$ Die Rücktransformierte $h(t)$ der Übertragungsfunktion ist demnach die Antwort des Systems auf das Eingangssignal $\delta(t)$ (Dirac-Stoss).

Andere Interpretation von $h(t)$:

$$H(s) \cdot P(s) - 1 = \alpha_n s^n H(s) - 1 + \alpha_{n-1} s^{n-1} H(s) + \dots + \alpha_1 s H(s) + \alpha_0 H(s)$$

$$= \alpha_n (s^n H(s) - \frac{1}{a_n}) + \alpha_{n-1} s^{n-1} H(s) + \dots + \alpha_1 s H(s) + \alpha_0 H(s) = 0 \bullet \circ \alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0,$$

$$h(0) = h'(0) = \dots = h^{(n-2)}(0) = 0, \quad h^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}$$

Wegen der ersten Interpretation definieren wir:

Definition: $h(t)$ heisst **Impulsantwort**

\leadsto Übertragungsfunktion $\bullet \circ$ Impulsantwort

3.7.2 Beispiele, Systemverknüpfungen

Tiefpassfilter

Bsp.:

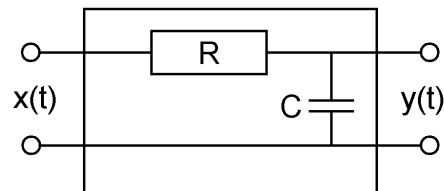
Es gilt:

$$R \cdot \dot{y} + \frac{y}{C} = \frac{x}{C}$$

RBed homogen

$$\leadsto R \cdot C \cdot \dot{y} + y = x \bullet \circ (R \cdot C \cdot s + 1) Y = X$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{R \cdot C \cdot s + 1} \bullet \circ \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = h(t) \leadsto \text{stabil}$$



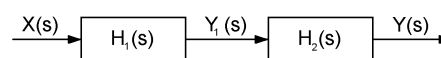
Ungedämpfter Schwingkreis

$$\ddot{y} + \omega^2 y = x(t) \bullet \circ s^2 Y + \omega^2 Y = X \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \bullet \circ \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$$

\leadsto marginal stabil

Reihenschaltung

$$\begin{aligned}
 Y_1(s) &= H_1(s) \cdot X(s), \\
 Y(s) = Y_2(s) &= H_2(s) \cdot Y_1(s) \\
 \Rightarrow Y(s) &= H_2(s) \cdot H_1(s) \cdot X(s)
 \end{aligned}$$

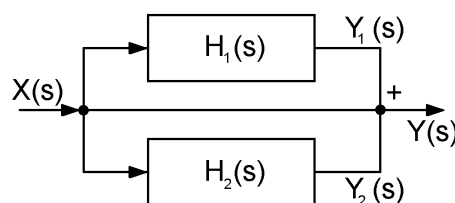
**Regel:**

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

Parallelschaltung

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad \circ \bullet Y_1(s) + Y_2(s)$$

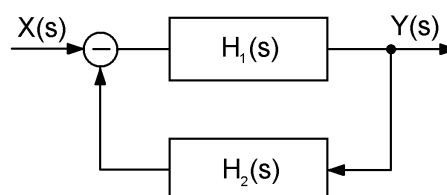
$$\begin{aligned}
 Y_1(s) &= H_1(s) \cdot X(s), \\
 Y_2(s) &= H_2(s) \cdot X(s) \\
 \Rightarrow Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) \\
 &= H_1(s) \cdot X(s) + H_2(s) \cdot X(s) \\
 &= (H_1(s) + H_2(s)) \cdot X(s) \\
 &= H(s) \cdot X(s)
 \end{aligned}$$

**Regel:**

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

Rückführschaltung

$$\begin{aligned}
 Y &= H \cdot X, \quad Y_2 = H_2 \cdot Y \\
 \Rightarrow H_1 \cdot X - H_1 \cdot H_2 \cdot X \\
 \Rightarrow H \cdot X &= H_1 \cdot X - H_1 \cdot H_2 \cdot H \cdot X \\
 \Rightarrow H &= \frac{H_1}{1 + H_1 \cdot H_2}
 \end{aligned}$$

**Regel:**

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1 \cdot H_2(s)}$$

Reihe von Tiefpassfiltern

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{1}{1 + sRC}, \quad H_2 = H_1 \\
 \Rightarrow H &= H_1 \cdot H_2 = \left(\frac{1}{1 + sRC} \right)^2 \\
 \leadsto & \text{Impulsantwort:}
 \end{aligned}$$

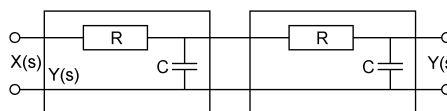
$$h(t) = \frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Bemerkung:

1. Ein lineares System ist stabil, wenn für die Impulsantwort resp. die Stossantwort gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

2. Oft werden in der Literatur zur Laplace-Transformation verwandte Transformationen verwendet:



(a) **Laplace–Carson–Transformation:**

$$\text{Def.:} \quad F_C(s) = F(s) \cdot s$$

$F(s) \cdot s$ tritt im Anfangs- resp. im Endwertsatz auf.

$$\text{Z.B.} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = \lim_{t \downarrow 0} f(t)$$

(b) **2-seitige Laplace–Transformation:**

$$\text{Def.:} \quad F_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot f(t) dt$$

Da wir nur Funktionen mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ betrachten, ändert sich mit dieser Transformation bei uns nichts. Man erhält aber damit eine Schreibweise, die analog zur Fouriertransformation ist.

Kapitel • Chapitre 4

Fourierreihen

4.1 Einführung

4.1.1 Verwendung

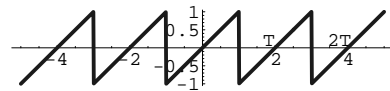
Fourierreihen werden vielerorts in Wissenschaft und Technik zur Analyse und Beschreibung periodischer Vorgänge verwendet. Ein wichtiges Beispiel ist die Signalübertragung.

4.1.2 Periodische Funktionen

Definition:

$f(t)$ heisst T -periodisch

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : f(t) = f(t + T)$$



T heisst **Periodenlänge**

Problem: $f(t_0) = f(t_0 + T) \leadsto$ Man hätte gern $T = 2\pi$

Substitution: $t' := t \cdot \frac{2\pi}{T}, \quad t := t' \cdot \frac{T}{2\pi}$

Setze: $f(t) = f(t' \cdot \frac{T}{2\pi}) := f_1(t')$

$$\Rightarrow f_1(t') = f(t) = f(t+T) = f(t' \cdot \frac{T}{2\pi} + T \cdot \frac{2\pi}{2\pi}) = f((t' + 2\pi) \cdot \frac{T}{2\pi}) = f_1(t' + 2\pi) \Rightarrow f_1(t') = f_1(t' + 2\pi)$$

Lemma: **Vor.:** $f(t) = f(t + T), \quad t := t' \cdot \frac{T}{2\pi}, \quad f(t) = f_1(t')$

Beh.: $f_1(t') = f_1(t' + 2\pi)$

f_1 ist also 2π -periodisch. Daher kann man o.B.d.A.⁵ $T = 2\pi$ setzen.

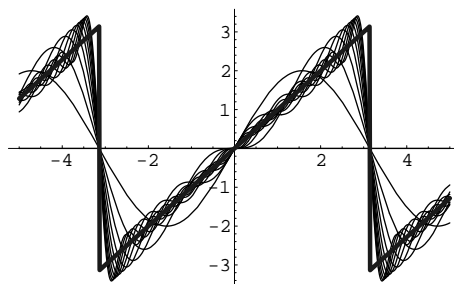
⁵Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

4.1.3 Trigonometrische Reihen

Definition: **Trigonometrische Reihen** sind Ausdrücke der folgenden Art:

1. $f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + \dots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$
2. $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$
3. $2 \left(\sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \dots \right) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(k t)$

Konvergiert eine solche Reihe?



Lemma:

Vor.:

Trig. Reihe konv. für $t = t_0$

Beh.:

Trig. Reihe konv. für $t = t_0 + T$ resp. $t = t_0 + 2\pi$

Lemma:

Trigonometrische Reihen sind T resp. 2π -periodisch.

Bemerkung:

Im Folgenden betrachten wir trigonometrische Reihen, die „technisch vernünftig“ sind, d.h. stückweise stetig, über eine Periode integrierbar etc..

4.2 Fourierreihen und Fourieranalyse

Bemerkung:

Statt Fourieranalyse sagt man auch **harmonische Analyse** (vgl. nächstes Kapitel).

Konvention: Sei o.B.d.A.: $\forall_{t \in \mathbb{R}} : f(t) = f(t + 2\pi), \quad T = 2\pi$

4.2.1 Das Darstellungsproblem

Fourierpolynome

Definition:

$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$ heisst **Fourierpolynom** vom **Grade** n .

Problem: Eine gegebene periodische Funktion f soll möglichst gut durch Fourierpolynome approximiert werden. Gesucht sind **Kriterien für gute Approximation**.

Idee: Suche Approximationen f_n mit **minimaler Fehlerquadratsumme** (MFQS):

$$\leadsto \int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right) \right)^2 dt = \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) \rightarrow \text{Min}$$

φ ist eine quadratische Funktion mit $2n+1$ Variablen. Setzt man die partiellen Ableitungen 0 (Bedingung für Minimum), so erhält man ein lineares Gleichungssystem, das sich eindeutig lösen lässt. Es zeigt sich, dass das so gefundene Minimum eine ideale Approximation darstellt.

Formeln von Euler

Problem: Berechnung der Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ (Variablen von φ)

In der nachfolgenden Berechnung verwenden wir die **Orthogonalitätsrelationen** (Integral als Skalarprodukt):

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt) \cdot \sin(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k-m) \cdot t) - \cos((k+m) \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq m, \\ \pi & k = m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt) \cdot \cos(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin((k-m) \cdot t) + \sin((k+m) \cdot t) dt = 0 \quad \forall_{k,m \in \mathbb{Z}}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt) \cdot \cos(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k-m) \cdot t) + \cos((k+m) \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq m, \\ \pi & k = m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

Hinweis z.B. zur zweiten dieser Formeln:

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = (\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)) + (\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)) = 2 \sin(\alpha) \cos(\beta)$$

Damit wird die nachfolgende Herleitung möglich:

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a_k} (f - f_n)^2 dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} f_n dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \cos(kt) dt = 0 \quad (\text{Min.}) \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} f \cdot \cos(kt) dt = \int_0^{2\pi} f_n \cdot \cos(kt) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)) \right) \cdot \cos(kt) dt \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kt) dt}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^n (a_k \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(kt) dt)}_{=\pi, \quad k=m} + \underbrace{b_k \int_0^{2\pi} \sin(mt) \cos(kt) dt}_{=0} = a_k \cdot \pi \\ &\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \cos(kt) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b_k} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial b_k} (f - f_n)^2 dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{\partial}{\partial b_k} f_n dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \sin(kt) dt = 0 \text{ (Min.)} \\
&\Rightarrow \int_0^{2\pi} f \cdot \sin(kt) dt = \int_0^{2\pi} f_n \cdot \sin(kt) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)) \right) \cdot \sin(kt) dt \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kt) dt}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^n (a_k \int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(kt) dt)}_{=0} + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(kt) dt}_{=\pi, \quad k=m} = b_k \cdot \pi \\
&\Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \sin(kt) dt \\
3. \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a_0} (f - f_n)^2 dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{\partial}{\partial a_0} f_n dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{1}{2} dt = 0 \\
&\leadsto \int_0^{2\pi} f dt = \int_0^{2\pi} f_n dt = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^n (a_k \int_0^{2\pi} \cos(kt) dt + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kt) dt) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot 2\pi + 0 + 0 = a_0 \cdot \pi \\
&\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\
&\leadsto a_0 = \text{Mittelwert von } f \text{ über } [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Somit kennen wir die Formeln von Euler für die idealste Approximation (MFQS):

Satz:

Vor.:

f 2π -periodisch und vernünftig

Beh.:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt
\end{aligned}$$

Definition:

a_0, a_k, b_k heissen **reelle Fourierkoeffizienten**
 f_n heisst **n -te Approximation**

Bemerkung:

1. a_0, a_k, b_k hängen nicht von n ab!
2. Wenn wir n vergrössern, so wird die Approximation besser, falls die neu hinzukommenden Fourierkoeffizienten $\neq 0$ sind. (Ansonst hätte man ja eine bessere Approximation mit neuen Koeffizienten $= 0$.)

4.2.2 Das Konvergenzproblem

Fourierreihen

Definition: Sei $\tilde{f}(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) := f_\infty(t)$
 \tilde{f} heisst **Fourierreihe** von f .

Problem:

Wann gilt für ein gegebenes $f(t)$ in $[0, 2\pi]$ punktweise die nachfolgende Beziehung?

$$\forall_t : f(t) = \tilde{f}(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f_\infty(t)$$

Annahme:

Die Funktionenfolge $\langle f_n \rangle$ konvergiere gleichmässig (*UNIFORM*) in $[0, 2\pi]$ gegen $\tilde{f}(t)$. Bei gleichmässiger Konvergenz darf man unendliche Summen gliedweise integrieren. Die Fourierkoeffizienten sind daher nach den Eulerschen Formeln berechenbar.

Untersuchung:

Sei f stetig in $[0, 2\pi]$.

f_n war so definiert, dass $\int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dt$ minimal war (MFQS). Wegen der gleichmässigen Konvergenz kann man somit herleiten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} (f - f_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t)^2 dt, \quad \varphi(t) = f(t) - \tilde{f}(t)$$

Wegen der gleichmässigen Konvergenz ist mit $f(t)$ auch $\tilde{f}(t)$ stetig, also auch $f(t) - \tilde{f}(t) = \varphi(t)$.

Würde nun $\int_0^{2\pi} \varphi(t)^2 dt \neq 0$ gelten, so wäre die stetige Funktion $\varphi(t) \not\equiv 0$ in $[0, 2\pi]$. Man könnte daher $\varphi(t)$ in $[0, 2\pi]$ durch Fourierpolynome $\varphi_n(t) \not\equiv 0$ approximieren.

Für die MFQS würde das dann bedeuten:

$$\int_0^{2\pi} (\varphi - \varphi_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f} - \varphi_n)^2 dt < \int_0^{2\pi} \varphi^2(t) dt = \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} (f - (\tilde{f} + \varphi_n))^2 dt < \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt$$

$(\tilde{f} + \varphi_n)$ würde daher f besser approximieren als \tilde{f} alleine. Somit wäre dann \tilde{f} nicht mehr die beste Approximation, die MFQS wäre somit nicht minimal.

\leadsto Widerspruch!

Lemma:**Vor.:**

f stetig($[0, 2\pi]$), f periodisch, $T = 2\pi$
 $\langle f_n \rangle \in \mathcal{UNIFCONV}([0, 2\pi])$

Beh.:

$$\int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt = 0, \tilde{f} \in \text{stetig}([0, 2\pi])$$

Konsequenz: $f \text{ stetig}([0, 2\pi]), \langle f_n \rangle \in \mathcal{UNIFCONV}([0, 2\pi]) \Rightarrow \forall_{t \in [0, 2\pi]} f(t) = \tilde{f}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$

Es entsteht somit die Frage: Wann konvergiert $\langle f_n \rangle$ gleichmässig in $[0, 2\pi]$?

Satz von Dirichlet**Betrachtung:**

Gleichmässig konvergente Reihen darf man vor oder nach dem Summieren differenzieren, was allerdings nur Sinn macht, wenn die Glieder diff'bar sind und die Reihe der Ableitungen auch konvergiert. Weiter ist eine auf einem abgeschlossenen Intervall konvergente Reihe von stetigen Funktionen auch gleichmässig konvergent.

Fourierpolynome sind nun trivialerweise diff'bar. Daher muss im Falle der Konvergenz in $[0, 2\pi]$ gelten: $f'_n \rightarrow \tilde{f}'$. Für $f = \tilde{f}$ ist somit die Diff'barkeit von f notwendig.

Da hinreichende Bedingungen viel schwieriger zu behandeln sind als notwendige, wollen wir zuerst einen einfacheren Fall besprechen:

Satz:**Vor.:**

f 2π -periodisch
 f 2 mal stetig diff'bar in $[0, 2\pi]$

Beh.:

Die Fourierreihe \tilde{f} von f konvergiert gleichmässig und absolut.

Zum Beweis:

Verwende $\cos(0) = \cos(k \cdot 2\pi), f'(0) = f'(k \cdot 2\pi)$.

$$\begin{aligned} \text{Z.B. } a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt = \frac{f(t)}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \sin(kt) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) \cdot \sin(kt) dt \\ &= 0 + \frac{1}{k\pi} f'(t) \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos(kt) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} f''(t) \cdot \cos(kt) dt = -\frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} f''(t) \cdot \cos(kt) dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |a_k| \leq \frac{1}{k^2 \pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| \cdot |\cos(kt)| dt \leq \frac{1}{k^2 \pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| dt = \frac{1}{k^2 \pi} k_1 \Rightarrow |a_k| \leq \frac{1}{k^2 \pi} k_1 \quad \forall k$$

Ebenso: $|b_k| \leq \frac{1}{k^2 \pi} k_2 \quad \forall k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right| &\leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| |\cos(kt)| + |b_k| |\sin(kt)|) \leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \\ &\leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2 \pi} k_1 + \frac{1}{k^2 \pi} k_2 \right) = \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2 \pi} \underbrace{(k_1 + k_2)}_{=c} \right) = \left| \frac{a_0}{2} \right| + c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pi} \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pi}$ ist eine konvergente p -Reihe mit $p = 2$.

Falls die Fourierkoeffizienten durch ihre Absolutwerte ersetzt werden, erhält man dieselbe Majorante, was die absolute Konvergenz zeigt. ☺

Aus obigem Satz und dem letzten Lemma erhält man sofort:

Korollar:

Vor.:

f 2π -periodisch
 f 2 mal stetig diff'bar in $[0, 2\pi]$

Beh.:

- (1) $f(t) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$
- (2) a_0, a_k, b_k berechenbar nach Euler

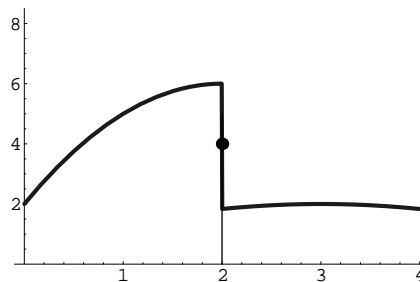
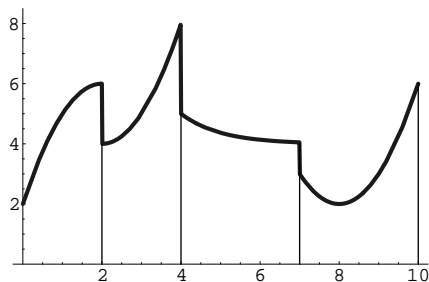
Diese bisher gewonnenen Resultate lassen sich noch ausdehnen. So erhält man den **Konvergenzsatz von Dirichlet** für stückweise glatte resp. **normale** Funktionen. Bezüglich des Beweises sei auf die Literatur verwiesen.

Definition:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ nennen wir **stückweise glatt** auf einem Intervall, wenn sie dort fast überall stetig diff'bar ist, ausser ev. in isolierten Ausnahmepunkten nicht. In diesen existiert aber der rechts- und linksseitige Limes der Funktion und der Ableitung.

Entsprechend definieren wir für Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$.

Illustration:



Satz:

von Dirichlet

Vor.:

f stückweise glatt in $[0, 2\pi]$

$$\tilde{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

Beh.:

1. $\tilde{f} = f(t)$ in allen Stetigkeitspunkten von f
2. In den Sprungstellen ξ konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel der Funktionsgrenzwerte:

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2} (f(\xi^+) + f(\xi^-))$$

Bemerkungen:

1. Damit ist die Klasse der Funktionen, die sich in eine konvergente Fourierreihe entwickeln lassen, keineswegs ausgeschöpft. Z.B. Weierstrass hat eine Funktion angegeben, die überall stetig ist, nirgends diff'bar ist, jedoch in eine konvergente Fourierreihe entwickelt werden kann.
2. (a) In der **harmonischen Analyse** geht es darum, zu einer gegebenen Funktion die Fourierkoeffizienten zu bestimmen, d.h. die Fourierentwicklung durchzuführen.

(b) In der **harmonischen Synthese** stellt man sich das Problem, die Funktion zu finden, deren Fourierkoeffizienten (genannt das **Spektrum**) gegeben sind.

4.2.3 Folgerungen und Konsequenzen

Korollar:**Vor.:**

Seien

 $a, b \in \mathbb{R}, f \text{ diff'bar}, f' \text{ beschränkt}([a, b])$ **Beh.:**

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cdot \cos(k \cdot t) dt = 0$$

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cdot \sin(k \cdot t) dt = 0$$

Zum Beweis:

Z.B. (1):

$$\begin{aligned} \leadsto \left| \int_a^b f(t) \cdot \sin(k \cdot t) dt \right| &= \left| -\frac{1}{k} f(t) \cos(k t) \Big|_a^b + \frac{1}{k} \int_a^b f(t)' \cdot \cos(k \cdot t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{k} (|f(a)| |\cos(k a)| + |f(b)| |\cos(k b)|) + \frac{1}{k} \int_a^b |f(t)'| \cdot |\cos(k \cdot t)| dt \leq \frac{1}{k} (|f(a)| + |f(b)|) + \frac{1}{k} \int_a^b |f(t)'| dt \\ &= \frac{1}{k} \cdot (f(a) + f(b) + C) \rightarrow 0 \text{ mit } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Nun studieren wir einige Tricks zur Gewinnung neuer Fourierreihen aus gegebenen Fourierreihen durch Integration und Differentiation:

Korollar:**Vor.:**Die Fourierreihe $\tilde{f}(t)$ konvergiere gleichmässig im Intervall I .**Beh.:**

$\tilde{f}(t)$ lässt sich gliedweise integrieren. Zur Bestimmung der Integrationskonstante ist eine Nebenbedingung notwendig. Das Resultat ist wieder eine Fourierreihe, falls $a_0 = 0$ gilt.

Korollar:**Vor.:**

Die Fourierreihe $\tilde{f}(t)$ sowie ihre Ableitung $\tilde{f}'(t)$ konvergieren gleichmässig im Intervall I .

Beh.:

$\tilde{f}'(t)$ lässt sich durch gliedweise Differentiation von $\tilde{f}(t)$ gewinnen.

Dass die Reihe der Ableitungen der Glieder nicht notwendigerweise konvergieren muss, zeigt das folgende **Beispiel:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k} = \tilde{f}(t) \text{ conv}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k} = \tilde{f}(t) = -\ln(2 \cdot \sin(\frac{t}{2})), \quad 0 < t < 2\pi, \text{ siehe}^7.$$

Durch gliedweise Differentiation ergibt sich:

$$\tilde{f}'(t) \stackrel{?}{=} -\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kt) \rightsquigarrow \text{Es gilt aber: } g(t, n) = \sum_{k=1}^n \sin(kt) = \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{\cos((n + \frac{1}{2}) \cdot t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$$

\rightsquigarrow **Problem:** $\cos((n + \frac{1}{2}) \cdot t)$ ist nicht konvergent für $n \rightarrow \infty$.

Weiter gilt z.B.⁷:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k} = \frac{\pi - t}{2}, \quad 0 < t < 2\pi \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin(kt) = \frac{r \sin(t)}{1 - 2r \cos(t) + r^2}, \quad |r| < 1$$

Beispiele:

$$(1) \quad f(t) = \begin{cases} t & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - t & t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}, \quad f(t) = \tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1^2} - \frac{\sin(3t)}{3^2} + \frac{\sin(5t)}{5^2} - \frac{\sin(7t)}{7^2} \pm \dots \right)$$

$$(2) \quad f(t) = \begin{cases} +1 & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}, \quad f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(t)}{1} - \frac{\cos(3t)}{3} + \frac{\cos(5t)}{5} - \frac{\cos(7t)}{7^2} \pm \dots \right)$$

In Beispiel 2 treffen wir eine Sprungstelle, daher „ \sim “.

4.2.4 Sinus- und Cosinusreihen

1. (a) **Gerade Funktionen:** $f(t) = f(-t)$

Man erhält hier:

⁷Vgl.: Meyberg–Vachenauer, Höhere Math. 2, p.313

$$\begin{aligned}
\pi \cdot b_k &= \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt \stackrel{t'=-t}{=} (-1) \cdot \int_{t=-\pi}^{t=\pi} \underbrace{f(-t')} \cdot \underbrace{\sin(k(-t'))}_{=-\sin(kt')} dt' \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cdot \sin(k(t')) dt' = - \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cdot \sin(k(t')) dt' \stackrel{t'=t}{=} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = -\pi \cdot b_k \\
\Rightarrow \pi \cdot b_k &= -\pi \cdot b_k \Rightarrow \forall_k: b_k = 0 \Rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)
\end{aligned}$$

2. (b) **Ungerade Funktionen:** $f(t) = -f(-t)$

Eine analoge Rechnung wie in (a) zeigt hier: $\forall_k: a_k = 0 \Rightarrow \tilde{f}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt)$

Definition:

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt)$ heisst **Sinusreihe**.

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$ heisst **Cosinusreihe**.

Korollar:

Vor.:

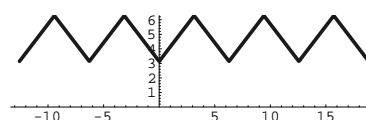
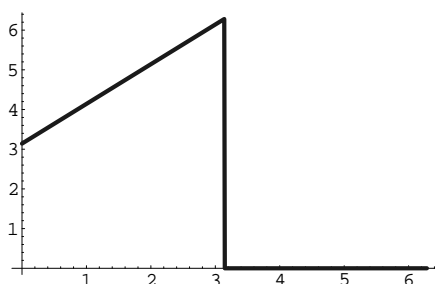
$f(t)$ ist in eine Fourierreihe $\tilde{f}(t)$ entwickelbar.

Beh.:

- (1) $f(t)$ gerade
 $\Rightarrow \tilde{f}(t)$ Cosinusreihe
- (2) $f(t)$ ungerade
 $\Rightarrow \tilde{f}(t)$ Sinusreihe

Beispiele:

Die untenstehende Funktion $f(t) = t + \pi$ ist auf $[0, \pi]$ durch eine Cosinusreihe darzustellen. Dazu erweitern wir die Funktion zu einer geraden, 2π -periodischen Funktion auf \mathbb{R} und entwickeln diese in eine Fourierreihe \leadsto Cosinusreihe.



$$\tilde{f}(t) = \frac{3\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

Anwendung: Entwicklung von Signalen über endlichen Intervallen in einfache Fourierreihen, d.h. Sinus- oder Cosinusreihen. Die Signalübermittlung reduziert sich dann auf die Übermittlung einer Folge von

Fourierkoeffizienten, die man je nach riskiertem Fehler früher oder später abbricht.

4.2.5 Eulersche Formeln, Periode T

$$\text{Sei} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t))$$

Für die Koeffizienten gilt dann:

$$\begin{aligned} \text{Regel:} \quad \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \cos(\omega k t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \sin(\omega k t) dt \end{aligned}$$

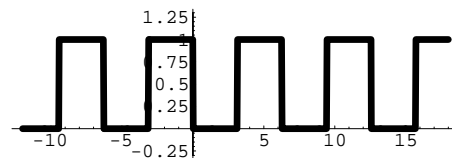
4.3 Harmonische Analyse und Fourieranalyse

4.3.1 Beispiele

1. Beispiel:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \pi \\ 1 & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

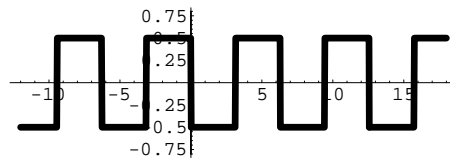
$$\Rightarrow T = 2\pi$$



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad f(t) &= f_1(t) + 0.5 \\ \Rightarrow f_1(t) &= f(t) - 0.5 \end{aligned}$$

$$\leadsto f_1(t), f_1(t) \cdot \cos(kt) \text{ ungerade}$$



$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(t) + 0.5) \cdot \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} f_1(t) \cdot \cos(kt) dt}_{=0} + \frac{1}{\pi} \cdot 0.5 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(kt) dt}_{=0} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 1 \cdot \sin(kt) dt =$$

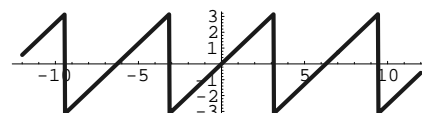
$$= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos(kt) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{k\pi} \cdot (\cos(k\pi) - \cos(2k\pi)) = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ -\frac{2}{k\pi} & k = 2n-1 \end{cases}$$

$$\leadsto \text{Sinusreihe: } f(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$$

2. Beispiel:

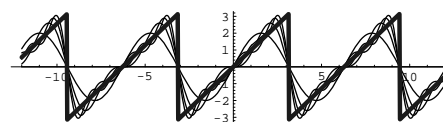
$$f(t) = t \text{ für } t \in (-\pi, \pi], \quad T = 2\pi$$

$\leadsto f$ ungerade (abgesehen von den Sprungstellen)



$$\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \sin(kt) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{k} t \cos(kt) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{-1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) dt = -\frac{1}{k\pi} (\pi \cdot (-1)^k - (-\pi)(-1)^k) = -\frac{1}{k\pi} \pi \cdot (-1)^k \cdot 2 \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$



$$\tilde{f}(t) = 2 \left(\sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \dots \right)$$

Eine Konsequenz für die Berechnung von π :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) (= t|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}) = 2 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \frac{\pi}{2}\right) - \dots \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot (+1) - \dots \right)$$

Formel:
$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

Bemerkung:

Die Konvergenz dieser Reihe für π ist nicht besonders gut. Wir werden später mit andern Fourierreihen besser konvergente Reihen für π finden.

3. Beispiel:

$$f_1(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad T = 2\pi$$

Nach Euler-Formeln oder Tabelle

$$\leadsto \tilde{f}_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right)$$

Gesucht ist die Fourierreihe der folgenden verwandten Funktion:

$$f_2(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi), \quad T = 2\pi$$

Die Reihe von f_2 kann man nicht durch gliedweise Integration aus der Fourierreihe von f_1 gewinnen, denn f_1 und f_2 sind beide gerade. Die Integration macht aber aus einer geraden Funktion (Cosinusreihe) eine Sinusreihe. Hingegen gelingt die Berechnung mit Hilfe des Resultates von Beispiel 2. Dort hat man eine geeignete ungerade Funktion:

$$\begin{aligned} \int x \, dx &= \frac{x^2}{2} + C_0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \int x \, dx - C_0 = \int x \, dx + C \quad \text{Aus Bsp. 2} \\ &\leadsto a_k \cos(kx) = 2 \cdot \int -(-1)^k \cdot 2 \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) \, dx + C_k = (-1)^k \cdot 4 \cdot \frac{1}{k^2} \cos(kx) + C_k \\ &\Rightarrow \tilde{f}_2(x) = -\frac{4 \cdot \cos(1x)}{1^2} + \frac{4 \cdot \cos(2x)}{2^2} - \frac{4 \cdot \cos(3x)}{3^2} + \frac{4 \cdot \cos(4x)}{4^2} - \dots + C \\ &\Rightarrow \frac{a_0}{2} = C, \quad a_1 = -\frac{4}{1^2}, \quad a_2 = +\frac{4}{2^2}, \quad a_3 = -\frac{4}{3^2}, \quad a_4 = +\frac{4}{4^2} \dots \end{aligned}$$

$C = \frac{a_0}{2}$ muss gesondert berechnet werden.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi^3 = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow f_2(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos(1x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2} + \dots \right)$$

Bemerkung:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos(1 \cdot 0)}{1^2} - \frac{\cos(2 \cdot 0)}{2^2} + \frac{\cos(3 \cdot 0)}{3^2} - \frac{\cos(4 \cdot 0)}{4^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

Formel:

$$\pi = \sqrt{12 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right)}$$

4.3.2 Lineare Kombinationen

Gleichmässig konvergente Reihen lassen sich bekanntlich gliedweise addieren u.s.w.. Daher gilt:

Satz:

Vor.:

$$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

f und g besitzen gleichmässig konvergente Fourierreihen:

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

$$g(t) \sim \tilde{g}(t) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^* \cos(kt) + b_k^* \sin(kt))$$

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \sim \frac{A_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* \cos(kt) + B_k^* \sin(kt))$$

Beh.:

$$\begin{aligned} A_k &= \lambda a_k + \mu a_k^* & k &= 0, 1, 2, \dots \\ B_k &= \lambda b_k + \mu b_k^* & k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Anwendung: Sei $T = 2\pi$

\leadsto Mit Hilfe des Satzes kann man nun die Reihe von $f(t) = t^2 + t$ aus den Reihen von $f_1(t) = t$ und $f_2(t) = t^2$ durch gliedweise Addition berechnen.

Dabei ist zu beachten:

Wenn eine Fourierreihe auf einem abgeschlossenen Intervall konvergiert, so konvergiert sie gleichmässig.

Bsp.: Reihen von $1, t, t^2, \dots, t^n, t \in [-\pi, \pi], t = 2\pi$

\leadsto Reihe von $1 + t + t^2 + \dots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}, t \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

4.3.3 Parsevalsche Gleichung

4.3.4 Die Formel

Im Folgenden seien die Reihen absolut und gleichmässig konvergent. Mit solchen Reihen kann man bekanntlich Arithmetik betreiben wie mit endlichen Reihen.

Wir verwenden (siehe Orthogonalitätsrelationen):

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 dt &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot T, \quad \int_0^T \cos^2(k\omega t) dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T \sin^2(k\omega t) dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T \sin(k_1\omega t) \cdot \sin(k_2\omega t) dt = 0, \\ \int_0^T \sin(k_1\omega t) \cdot \cos(k_2\omega t) dt &= 0, \quad \dots \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{a_0}{2} + \sum_0^\infty (a_k \cos(k t) + b_k \sin(k t))\right)^2 dt = \frac{1}{T} \left(T \cdot \frac{a_0^2}{4} + \frac{T}{2} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{T}{2} (a_2^2 + b_2^2) + \dots\right)$$

Denn beim Integrieren liefern nur die folgenden Terme einen Beitrag:

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2, (a_k \cos(\omega k t))^2, (b_k \sin(\omega k t))^2 \quad \leadsto \quad \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2)$$

Damit diese Gleichung gelten kann, muss natürlich $\sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2)$ endlich sein.

Satz: Parsevalsche Gleichung**Vor.:**

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} (a_k \cos(k t) + b_k \sin(k t))$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \text{ endlich}$$

Beh.:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

4.3.5 Anwendung

Integrale der Form $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt$ findet man häufig, wenn es z.B. um Energie geht.

Z.B. $\bar{E}_{kin} = \frac{1}{T} \cdot m \cdot \int_0^T v(t)^2 dt$ oder

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = R \cdot I^2(t) \quad (U = R \cdot I), \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

$$\leadsto W = \int_0^T P(t) dt = R \cdot \int_0^T I^2(t) dt, \quad \bar{P} = \frac{1}{T} \cdot R \cdot \int_0^T I^2(t) dt$$

Sei die Fourierreihe von I gegeben durch:

$$I(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} (a_k \cos(k t) + b_k \sin(k t))$$

$$\Rightarrow \bar{P} = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \cdot R \cdot \left(T \cdot \left(\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) \right) = R \cdot \left(\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

Weiter: $U_{eff} = \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T U(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \dots, \quad I_{eff} = \dots$

Bsp.:

$$f_2(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi], \quad T = 2\pi, \quad \Rightarrow f_2(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos(1x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2} + \dots \right)$$

$$\leadsto \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f_2^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{5} \cdot \pi^5 \cdot 2 = \frac{\pi^4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \left(\frac{\pi^2}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^2}{k^4}$$

$$\leadsto \frac{\pi^4}{5} = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^2}{k^4}, \quad \frac{\pi^4}{5} - \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 = \frac{4\pi^4}{45} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^2}{k^4} = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \Rightarrow \pi = \sqrt[4]{\frac{8 \cdot 45}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}}$$

Formel:

$$\pi = \sqrt[4]{90 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}} \approx \sqrt[4]{90 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4}}$$

\leadsto Z.B. für $n = 100$ erhält man eine Genauigkeit von 7 Stellen:

$$\pi \approx \underline{\underline{3.141592654}}, \quad \pi_{10} \approx \underline{\underline{3.141592415}}, \quad n = 100$$

4.4 Komplexe Darstellung von Fourierreihen

4.4.1 Komplexe Fourierkoeffizienten

Sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Benutze: $\cos(\omega k t) = \frac{e^{i\omega k t} + e^{-i\omega k t}}{2}, \quad \sin(\omega k t) = \frac{e^{i\omega k t} - e^{-i\omega k t}}{2i} = \frac{-i e^{i\omega k t} + i e^{-i\omega k t}}{2}$

$$\leadsto \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t),$$

$$q_k(t) = a_k \cdot \frac{e^{i\omega k t} + e^{-i\omega k t}}{2} + b_k \cdot \frac{-i e^{i\omega k t} + i e^{-i\omega k t}}{2} = \frac{1}{2} (a_k - i b_k) e^{i\omega k t} + \frac{1}{2} (a_k + i b_k) e^{-i\omega k t} \\ := c_k \cdot e^{i\omega k t} + \bar{c}_k \cdot e^{-i\omega k t}$$

Zur Vereinfachung definieren wir:

Definition:

$$c_{-k} := \bar{c}_k, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

\leadsto **komplexe Fourierkoeffizienten**

$$\leadsto \tilde{f}(t) \text{ komplex geschrieben: } \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega k t}$$

4.4.2 Berechnung der Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - i b_k) = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T f(t) (\cos(\omega k t) - i \sin(\omega k t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega k t} dt$$

$$c_{-k} = \bar{c}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-(-i\omega k t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega (-k) t} dt$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T f(t) e^{-i\omega \cdot 0 \cdot t} dt$$

Daher gilt für alle k die Formel:

Formel:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega k t} dt$$

Konsequenz:

$$|c_k|^2 = c_k \cdot \bar{c}_k = \frac{1}{2} (a_k - i b_k) \cdot \frac{1}{2} (a_k + i b_k) = \frac{1}{4} (a_k^2 + b_k^2) := \frac{A_k^2}{4} \Rightarrow A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2 \cdot |c_k|$$

In der komplexen Schreibweise gewinnen die Fourierreihen an Übersichtlichkeit. Die Darstellung wird kompakter.

Z.B. sieht dann die Parsevalsche Gleichung in der komplexen Schreibweise wie folgt aus:

$$|c_k|^2 = \frac{A_k^2}{4} = \frac{1}{4} (a_k^2 + b_k^2) \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \omega_k t} \right)^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

4.4.3 Beispiel — Exemple

Geg.:

$f(t)$, Fundamentalintervall $I = [a, b]$, Periode $T = b - a$.

1. Beispiel: $f(t) = t$, $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $T = 1$:

Mathematica-Programm:

```
<< Calculus`FourierTransform`;
f[t_] := t;
FourierTrigSeries[f[t], t, 10]
```

Output:

```

$$\frac{\sin(2\pi t)}{\pi} - \frac{\sin(4\pi t)}{2\pi} + \frac{\sin(6\pi t)}{3\pi} - \frac{\sin(8\pi t)}{4\pi} + \frac{\sin(10\pi t)}{5\pi} - \frac{\sin(12\pi t)}{6\pi} + \frac{\sin(14\pi t)}{7\pi} - \frac{\sin(16\pi t)}{8\pi} + \frac{\sin(18\pi t)}{9\pi} - \frac{\sin(20\pi t)}{10\pi}$$

```

Mathematica-Programm:

```
FourierSinCoefficient[f[t], t, 10]
```

Output:

```

$$-\frac{1}{10\pi}$$

```

Mathematica-Programm:

```
FourierCosCoefficient[f[t], t, 10]
```

Output:

```
| 0 |
```

Komplexe Schreibweise:

Mathematica-Programm:

```
| FourierSeries[f[t], t, 10] |
```

Output:

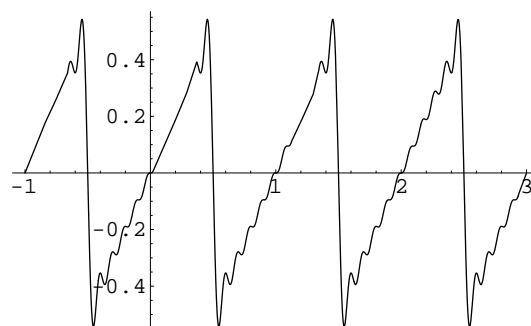
```
| 
$$\frac{ie^{-2i\pi t}}{2\pi} - \frac{ie^{2i\pi t}}{2\pi} - \frac{ie^{-4i\pi t}}{4\pi} + \frac{ie^{4i\pi t}}{4\pi} + \frac{ie^{-6i\pi t}}{6\pi} - \frac{ie^{6i\pi t}}{6\pi} - \frac{ie^{-8i\pi t}}{8\pi} + \frac{ie^{8i\pi t}}{8\pi} + \frac{ie^{-10i\pi t}}{10\pi} - \frac{ie^{10i\pi t}}{10\pi} - \frac{ie^{-12i\pi t}}{12\pi} +$$
  


$$\frac{ie^{12i\pi t}}{12\pi} + \frac{ie^{-14i\pi t}}{14\pi} - \frac{ie^{14i\pi t}}{14\pi} - \frac{ie^{-16i\pi t}}{16\pi} + \frac{ie^{16i\pi t}}{16\pi} + \frac{ie^{-18i\pi t}}{18\pi} - \frac{ie^{18i\pi t}}{18\pi} - \frac{ie^{-20i\pi t}}{20\pi} + \frac{ie^{20i\pi t}}{20\pi}$$
 |
```

Mathematica-Programm:

```
| Plot[Evaluate[FourierTrigSeries[f[t], t, 10]], {t, -1, 3}]; |
```

Bild

**2. Beispiel:** $f(t) = t$, $I = [-\pi, \pi]$, $T = 2\pi$:**Mathematica-Programm:**

```
| << Calculus'FourierTransform';  
f[t_] := t;  
f1[u_] = 2Pi FourierTrigSeries[f[t], t, 10] /. t -> u/(2Pi) // Expand;  
Print[f1[u]]; |
```

Output:

```
| 
$$2 \sin(u) - \sin(2u) + \frac{2}{3} \sin(3u) - \frac{1}{2} \sin(4u) + \frac{2}{5} \sin(5u) - \frac{1}{3} \sin(6u) + \frac{2}{7} \sin(7u) - \frac{1}{4} \sin(8u) +$$
  


$$\frac{2}{9} \sin(9u) - \frac{1}{5} \sin(10u)$$
 |
```

Mathematica-Programm:

```
2Pi(FourierSeries[f[t], t, 10] /. t -> u/(2Pi)) // Expand
```

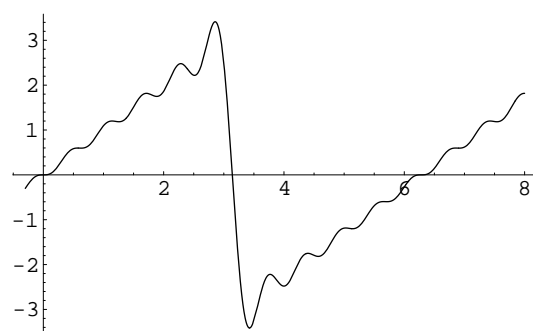
Komplexe Schreibweise:

Output:

$$ie^{-iu} - ie^{iu} - \frac{1}{2}ie^{-2iu} + \frac{1}{2}ie^{2iu} + \frac{1}{3}ie^{-3iu} - \frac{1}{3}ie^{3iu} - \frac{1}{4}ie^{-4iu} + \frac{1}{4}ie^{4iu} + \frac{1}{5}ie^{-5iu} - \frac{1}{5}ie^{5iu} - \frac{1}{6}ie^{-6iu} + \frac{1}{6}ie^{6iu} + \frac{1}{7}ie^{-7iu} - \frac{1}{7}ie^{7iu} - \frac{1}{8}ie^{-8iu} + \frac{1}{8}ie^{8iu} + \frac{1}{9}ie^{-9iu} - \frac{1}{9}ie^{9iu} - \frac{1}{10}ie^{-10iu} + \frac{1}{10}ie^{10iu}$$

Mathematica-Programm:

```
Plot[f1[u], {u, -0.3, 8}];
```



Bild

4.4.4 Amplitudenspektrum, Phasenspektrum

Die Begriffe **Amplitudenspektrum** und **Phasenspektrum** treten bei Fourierreihen in komplexer Darstellung auf. Um einen Zugang zu dieser Sache zu bekommen, betrachten wir sogenannte **Zeigerdiagramme**:

Idee:

Betrachte die bijektive Abbildung:

$$\Phi : \underbrace{a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)}_{\in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}} \mapsto z_k = \underbrace{a_k \cos(\omega k t) + i b_k \sin(\omega k t)}_{\in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Definition:

$a_k \cos(\omega k t) + i b_k \sin(\omega k t)$ nennen wir **Zeiger**

Andererseits können wir $(a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t))$ als Vektor über der folgenden Basis auffassen:

$$B = \{\cos(\omega k t), \sin(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\} := \{\cos(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

Entsprechend ist ein Zeiger ein Vektor über der Basis B_i : $B_i = \{\cos(\omega k t), \underline{i} \sin(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Ebenso wird $\tilde{f}(t)$ ein summierter Vektor über B , der bei der Abbildung Φ in einen entsprechenden Zeiger oder einen Vektor über B_i übergeht.

Man hat hier somit einen Vektorraumisomorphismus, d.h. die Information über $f(t)$ ändert auf der Bildseite nicht. Man darf also ohne weiteres mit den Zeigern arbeiten.

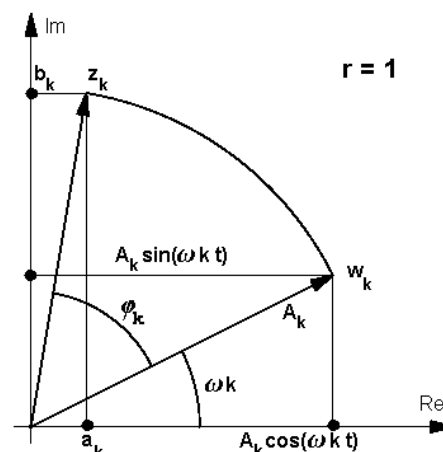
Beachte:

$$w_k := A_k \cdot e^{i \omega k t} \mapsto z_k = r (a_k + i b_k)$$

$$w_k = A_k \cdot e^{i \omega k t} = A_k \cos(\omega k t) + i A_k \sin(\omega k t)$$

$$\begin{aligned} z_k &= r (a_k + i b_k) \\ &= A_k (\cos(\omega k t + \varphi_k) + i \sin(\omega k t + \varphi_k)) \\ &= A_k \cdot e^{i(\omega k t + \varphi_k)} = r \sqrt{a_k^2 + b_k^2} e^{i(\omega k t + \varphi_k)}, \\ A_k &= r_k = r \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2 \cdot |c_k| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_k &= r (a_k + i b_k) = r \sqrt{a_k^2 + b_k^2} e^{i(\omega k t + \varphi_k)} \\ &= A_k e^{i \omega k t} e^{i \varphi_k} = w_k e^{i \varphi_k}, \quad w_k = z_k \cdot e^{-i \varphi_k} \end{aligned}$$



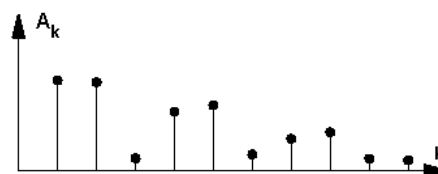
Konsequenz: z_k kann sowohl durch (a_k, b_k) wie auch durch (A_k, φ_k, t) beschrieben werden.

Anwendung: In der Elektrophysik werden Strom und Spannung mit Vorteil durch Zeiger z_k (komplexe Funktion) dargestellt. Addiert man solche Spannungen und Ströme, so erhält man komplexe Fourierreihen der folgenden Form ($r = 1$):

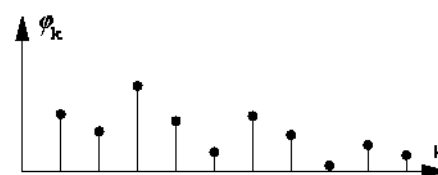
$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \frac{a_0}{2} + i \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + i b_k) = \frac{z_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i(\omega k t + \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cdot e^{i \varphi_k}) e^{i \omega k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (w_k) e^{i \omega k t} \end{aligned}$$

Hier verwenden wir die folgende Begriffe:

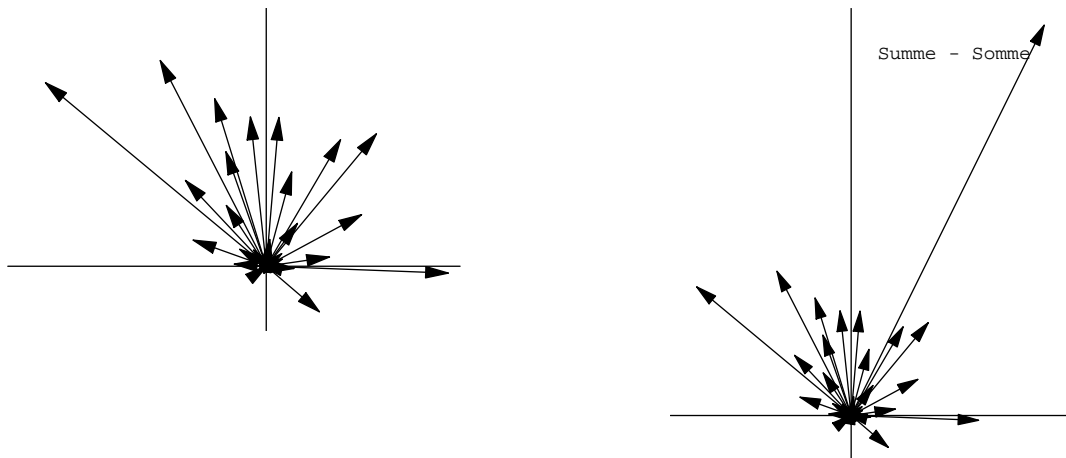
A_k heisst **Amplitude**, $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ heisst **Amplitudenspektrum**.



φ_k heisst **Phasen**, $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ heisst **Phasenspektrum**.



Bsp.:



4.4.5 Reelle Interpretation der Spektren

Sei $\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t))$

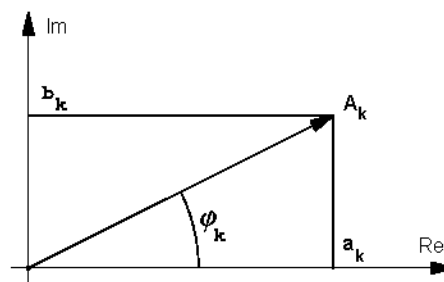
Für $t = 0$ ergibt sich die folgende Situation:

$$a_k + i b_k = A_k \underbrace{e^{i \omega k t}}_{e^0=1} \cdot \underbrace{e^{i \varphi_k}}_{\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k)}$$

Sei :

$$\begin{aligned} a_k &:= A_k \cos(\varphi_k) \\ b_k &:= A_k \sin(\varphi_k) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ A_0 &= \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

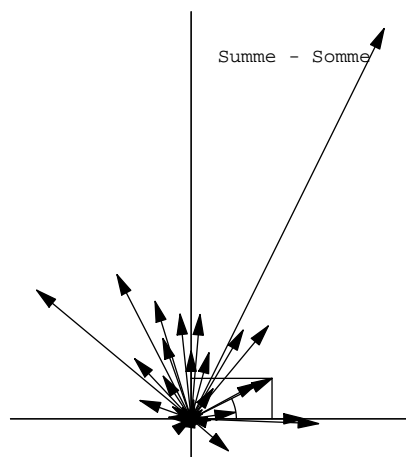


$$\{(a_k, b_k)\} \text{ kartes.} \mapsto \{(A_k, \varphi_k)\} \text{ polar}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \tilde{f}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\varphi_k) \cos(\omega k t) + A_k \sin(\varphi_k) \sin(\omega k t)) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\cos(\varphi_k) \cos(\omega k t) + \sin(\varphi_k) \sin(\omega k t)) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega k t - \underbrace{\varphi_k}_{+\varphi_k^-}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\varphi_k) \cos(\omega k t) + A_k \sin(\varphi_k) \sin(\omega k t)) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\varphi_k^- + \omega k t)$$

Hier haben wir das **Koeffizientenspektrum** $\{a_0, a_k, b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ sowie das **Amplituden- und Phasenspektrum** $\{A_k, \varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.



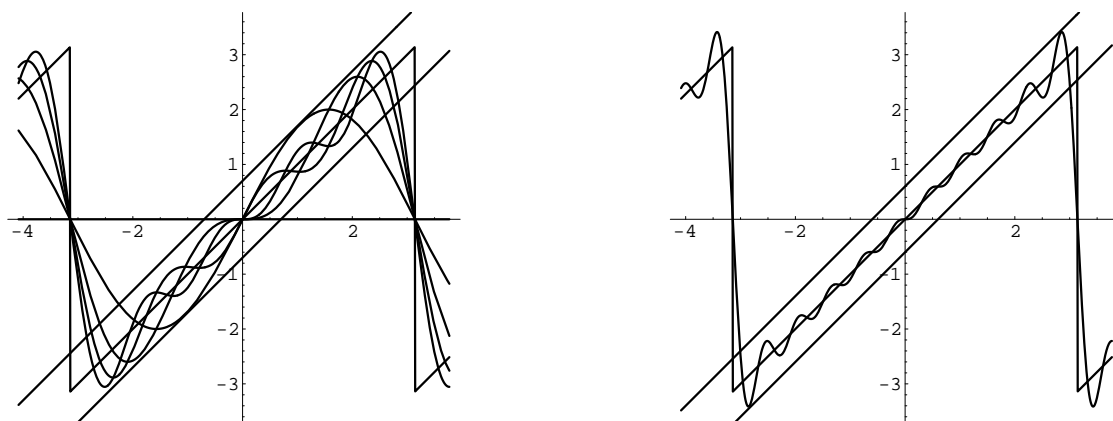
Damit ergibt sich eine alternative Darstellungsart der Fourierreihen im Reellen als Sinusreihe mit indexabhängiger Phasenverschiebung.

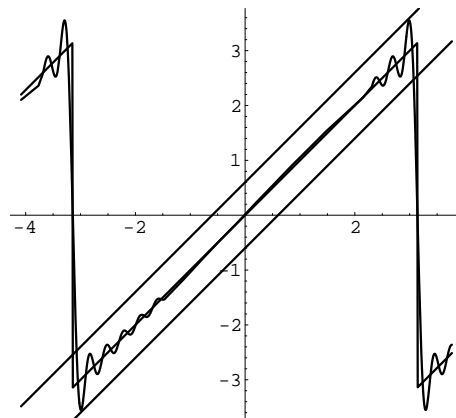
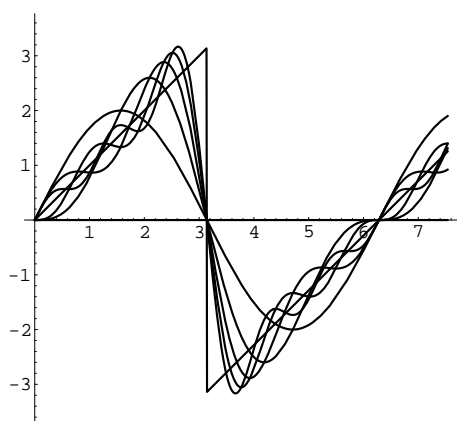
4.4.6 Das Phänomen von Gibbs

Wir betrachten die Funktion

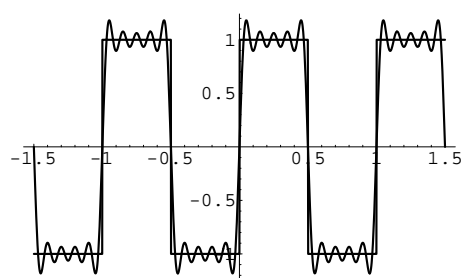
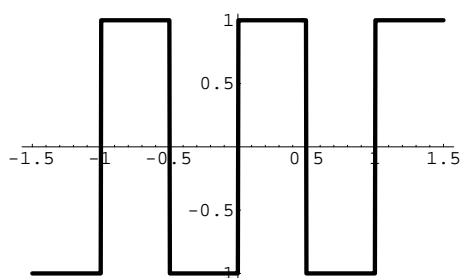
$$f(t) = t, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad f(t + 2n\pi) = f(t), \quad n \in \mathbb{Z}$$

An der Sprungstelle beobachtet man das folgende Phänomen:

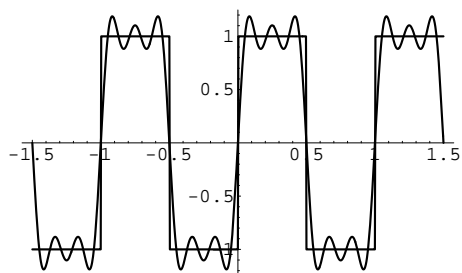




Wenn man eine Funktion mit Sprungstellen, z.B. eine Sägezahnfunktion, durch eine Fourierreihe annähert, so tritt an den Sprungstellen eine Überhöhung, der sogenannte „overshoot“ auf (im letzten Beispiel ca. 18 %). Diese Beobachtung nennen wir das **Gibbssche Phänomen**. Stellt eine Funktion z.B. die elektrische Spannung dar, so tritt bei der Fouriersynthese an der Sprungstelle eine etwas höhere Spannung auf, an die man je nach Fall denken sollte...



...



4.4.7 Beispiele

1. Anwendungen in der Signalübertragung.
2. Anwendungen zur Lösung von Differentialgleichungen, siehe z.B. Seite 220, Wärmeleitgleichung.
3. U.s.w.

4.5 Diskrete Fouriertransformation

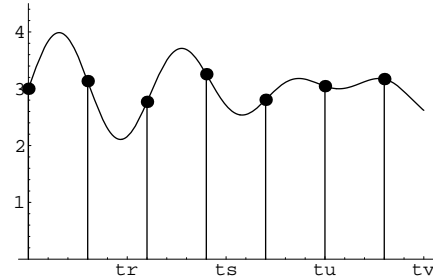
4.5.1 DFT und Fouriersynthese

Theorie

In der Praxis hat man oft Messreihen $\{(t_k, y_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Gesucht ist eine möglichst passende periodische Funktion mit bekannter Periode durch die Punkte (t_k, y_k) .

Seien $[a, b] = [0, 2\pi]$:
 $T = 2\pi$, $a = 0 = t_0$, $b = 2\pi = t_n$
 (Das lässt sich so einrichten.)

Sei $t_{k+1} - t_k = \frac{2\pi}{n} = h \forall k$
 \leadsto Äquidistante Messungen.



Verwende die Trapezregel (numerische Integration). Nach ihr gilt bekanntlich:

$$\int_a^b g(t) dt = \frac{h}{2} (g(a) + g(b)) + h \sum_{k=1}^{n-1} g(a+k \cdot h) + R = \frac{h}{2} (g(t_0) + g(t_n)) + h \sum_{k=1}^{n-1} g(t_k) + R, \quad |R| \leq \frac{h^2}{8} \int_a^b |g''(t)| dt$$

Um diese Formel anwenden zu können, braucht man nur die Messpunkte $\{(t_k, y_k = f(t_k))\}$ zu kennen. Dann können wir mit Hilfe der Messpunkte die Fourierkoeffizienten numerisch annähern:

$$c_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot e^{-i s t} dt \approx \tilde{c}_s := \frac{h}{2\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cdot e^{-i s \frac{2\pi k}{n}} = \frac{2\pi}{n \cdot 2\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot e^{-i s \frac{2\pi k}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot e^{-i s t_k}$$

Dabei war $f(a) = f(t_0)$ (Periodizität). $f(b) = f(a)$ ist verrechnet worden.

Analog schliesst man für die reellen Fourierkoeffizienten a_k und b_k . Dabei muss man die Exponentialfunktion durch cos und sin ersetzen.

Falls die Periodendauer T ist statt 2π , so erhält man folgende Formel:

$$c_s \approx \tilde{c}_s := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cdot e^{-i \cdot s \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t_k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot e^{-i \cdot s \cdot \omega \cdot t_k}, \quad t_k = \frac{k \cdot T}{n}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung fassen wir die Fourierkoeffizienten sowie die Messwerte u.s.w. als Vektoren in \mathbb{C}^n auf:

$$\vec{y}^{(n)} := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} := \vec{f}^{(n)} := \begin{pmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \vec{\tilde{c}}^{(n)} := \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\text{Sei weiter: } r := e^{-i \frac{2\pi}{n}} \Rightarrow \tilde{c}_s = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot r^{s k}, \quad \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \omega k t} \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \tilde{c}_k e^{i \omega k t}$$

Daraus ersieht man, dass der Vektor $\vec{c}^{(n)}$ aus $\vec{y}^{(n)}$ durch Multiplikation mit folgender Matrix W entsteht:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & \dots & \dots & r^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)}$$

Definition: $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ mit $\vec{y}^{(n)} \mapsto \vec{c}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)}$ heisst **diskrete Fouriertransformation**

Symbol: $DFT(\vec{y}^{(n)}) := \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)} = \sqrt{n} \cdot \vec{c}^{(n)}, \quad DFT^{-1}(\vec{c}^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \vec{y}^{(n)}$

Eigenschaften:

1. $W^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \bar{W}, \quad \sqrt{n} \cdot W^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \bar{W}, \quad \bar{W} \text{ konj.}$
 $n \cdot W^{-1} = \bar{W}, \quad (\bar{W})^{-1} = \frac{1}{n} \cdot W$
2. $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot W$ ist unitär $\leadsto |\det(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot W)| = 1$
3. $\vec{y}^{(n)} = \bar{W} \cdot \vec{c}^{(n)}$

Zum Beweis:

Ad (1) (1) lässt sich direkt nachrechnen.
 (Dabei sind Kenntnisse über komplexe Einheitswurzeln $r := e^{-i \frac{2\pi}{n}}$ nützlich.)

Ad (2) $1 = \det(E) = \det(W \cdot W^{-1}) = \det(\frac{W \cdot \bar{W}}{n}) =$
 $\det(\frac{W}{\sqrt{n}}) \cdot \det(\frac{\bar{W}}{\sqrt{n}}) = \det(\frac{W}{\sqrt{n}}) \cdot \overline{\det(\frac{W}{\sqrt{n}})} = |\det(\frac{W}{\sqrt{n}})|^2$

Ad (3) $\vec{c}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)} \Rightarrow n \cdot \vec{c}^{(n)} = W \cdot \vec{y}^{(n)} \Rightarrow \vec{y}^{(n)} = n \cdot W^{-1} \cdot \vec{c}^{(n)} = \frac{n}{n} \cdot \bar{W} \cdot \vec{c}^{(n)} = \bar{W} \cdot \vec{c}^{(n)}$

Folgerung:

Mit Hilfe der c_s in $\vec{c}^{(n)}$ lässt sich nun eine Fourierreihe herstellen, deren Graph durch die Punkte geht, die durch $\vec{y}^{(n)}$ definiert sind. W ist oben konstruiert worden.

\leadsto **Formeln:**

$$T = 2\pi, \quad \omega = 1, \quad \Delta t = \frac{2\pi}{n}, \quad r := e^{-i \frac{2\pi}{n}} = e^{-i \Delta t}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & \dots & \dots & r^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & \dots & \dots & r^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{0 \cdot 0} & r^{0 \cdot 1} & r^{0 \cdot 2} & \dots & r^{0 \cdot (n-1)} \\ r^{1 \cdot 0} & r^{1 \cdot 1} & r^{1 \cdot 2} & \dots & r^{1 \cdot (n-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ r^{(n-1) \cdot 0} & r^{(n-1) \cdot 1} & \dots & \dots & r^{(n-1) \cdot (n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}^{(n)} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \bar{W} \cdot \vec{c}^{(n)}, \quad \vec{c}^{(n)} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \vdots \\ \tilde{c}_s \\ \vdots \\ \tilde{c}_{n-1} \end{pmatrix} = (\bar{W})^{-1} \cdot \vec{y}^{(n)} = \frac{1}{n} W \cdot \vec{y}^{(n)}, \quad \tilde{c}_s = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot r^{s \cdot k}$$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s e^{i \omega s t} \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \tilde{c}_k e^{i \omega k t} = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_k e^{i \omega k t} = \tilde{f}_{(approx DFT)}(t).$$

Bsp.:

Siehe Problem 4:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02.pdf

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02_Loes.pdf

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02_Loes.nb

Anwendung

Eine erste wichtige Anwendung kennen wir vom erwähnten Problem der Messreihen, zu denen eine periodische Funktion gefunden werden soll. Eine andere Anwendung ist die **trigonometrische Interpolation**, z.B. bei Plots. Gegeben sind hier eine Anzahl von Stützstellen. Um dazwischen liegende Funktionswerte abzuschätzen, können wir mit Hilfe der DFT $f(t)$ durch trigonometrische Polynome annähern. So erhält man Fourierpolynome mit den Koeffizienten $c_{-\frac{n}{2}+1}, \dots, c_0, \dots, c_{+\frac{n}{2}+1}$. Mit Hilfe des trigonometrischen Polynoms kann man dann Zwischenwerte berechnen, die man weggelassen hat, z.B. um Daten zu sparen.

Wegen der Periodizität von f und der Formel für \tilde{c}_s gilt: $\tilde{c}_s = \tilde{c}_{s+n}$. Somit sind die Annäherungen \tilde{c} der Koeffizienten als Funktion des Index periodisch.

Problem:

Bei grösseren Messreihen, d.h. bei grossem n , wird der Rechenaufwand enorm, was bei „on line-Übertragungen“ eine Rolle spielt. Bei der Berechnung von $\vec{c}^{(n)}$ sind nur schon im Teil $W \cdot \vec{y}^{(n)}$ alleine n^2 komplexe Multiplikationen auszuführen. Daher lohnt es sich, einen schnelleren Algorithmus zu suchen. Für $n = 2^m$ gelingt dies durch die **schnelle Fouriertransformation (FFT, Fast Fourier Transformation)**.

Beispiel — Exemple

Ges.: Kurve durch Punkte, welche mittels $f(t)$ generiert worden sind.

$$f(t) = e^{\cos(t)} + \sin^2(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Mathematica-Programm:

```
Remove["Global`*"]
f[t_] := E^Cos[t] + Sin[t]^2;
n1 = 8; n = 2 * n1; w = 2 Pi/n;
{x[k_], y[k_]} = {k 2 Pi/n, f[k 2 Pi/n]};
p[k_] := {x[k], y[k]};
Table[p[k] // N, {k, 0, n - 1}] // TableForm
```

Koordinaten:

Output:

x	y
0.0000000000000000	2.718281828459045
0.39269908169872414	2.6654907808137103
0.7853981633974483	2.5281149816474726
1.1780972450961724	2.3197671913503832
1.5707963267948966	2.0000000000000000
1.9634954084936207	1.5355821639438108
2.356194490192345	0.9930686913952398
2.748893571891069	0.5434225780502063
3.141592653589793	0.36787944117144233
3.5342917352885173	0.5434225780502061
3.9269908169872414	0.9930686913952398
4.319689898685965	1.5355821639438099
4.71238898038469	2.0000000000000000
5.105088062083414	2.3197671913503832
5.497787143782138	2.5281149816474726
5.890486225480862	2.6654907808137107

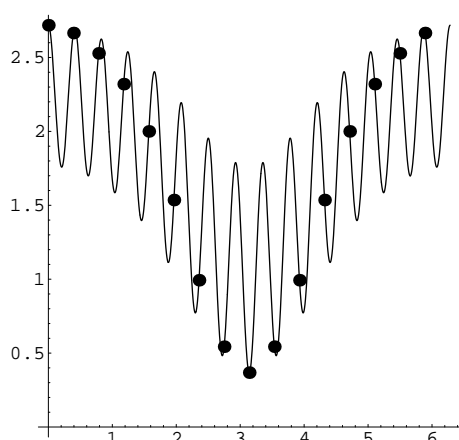
Kurven:

Mathematica-Programm:

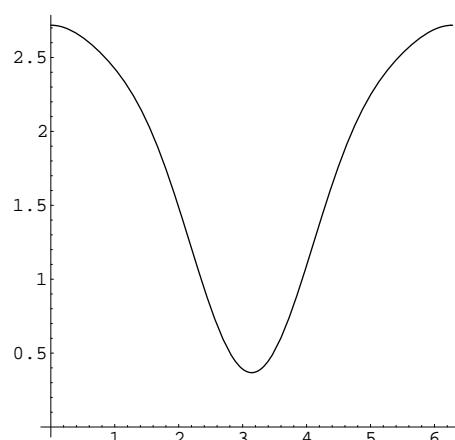
```

epi = Prepend[Map[Point, Table[p[k], {k, 0, n - 1}], PointSize[0.03]];
r = E^(-I 2 Pi/n);
c[s_] := 1/n Sum[y[k] r^(s k), {k, 0, n - 1}];
fS[t_] := Sum[c[k] E^(I k t), {k, 0, n - 1}];
fSsym[t_] := Sum[c[k] E^(I k t), {k, -n/2, n - 1 - n/2}];
Plot[Re[fS[t]], {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50, Epilog -> epi,
  AspectRatio -> 1];
Plot[Re[fSsym[t]], {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50, AspectRatio -> 1];
Plot[Im[fSsym[t]], {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50, AspectRatio -> 1];
Plot[{f[t], Re[fSsym[t]]}, {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50,
  Epilog -> epi, AspectRatio -> 1];

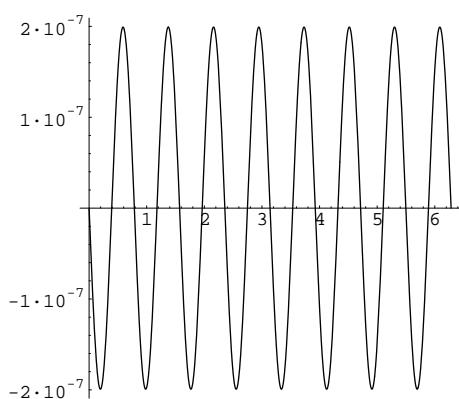
```



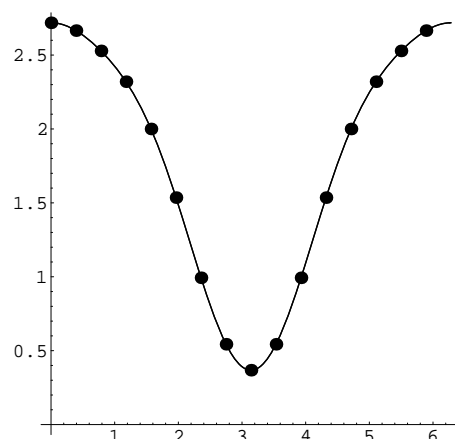
Summationsindex $0 \leq k \leq n - 1$: Passt schlecht.



Summationsindex $-\frac{n}{2} \leq k \leq n - 1 - \frac{n}{2}$: Passt besser.



Summation des auftretenden Imaginäranteils (Teil des Approximationsfehlers).



Plot der ursprünglichen Funktion, überlagert die Approximation und die berechneten Punkte (Abweichung hier nicht sichtbar).

4.5.2 FFT

Wir wollen versuchen, die Idee der FFT anhand einer speziellen Situation zu erarbeiten.

Sei $n = 2 \cdot p$, $r = e^{-i \frac{2\pi}{n}} \Rightarrow r^n = e^{-i \frac{2\pi}{n} \cdot n} = e^{-i 2\pi} = 1 \Rightarrow r^p = r^{\frac{n}{2}} = r^{-i\pi} = -1$

Sei $\vec{\gamma}^{(n)} = W \cdot \vec{f}^{(n)} = W \cdot \vec{y}^{(n)}$, $\vec{\gamma}^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$, $f_k = y_k$, $r^p = -1$, $\Rightarrow \vec{\gamma}^{(n)} = n \cdot \vec{c}^{(n)}$

$$\begin{aligned} \leadsto \gamma_{2s} &= \sum_{k=0}^{n-1} r^{2sk} \cdot f_k = \sum_{k=0}^{p-1} r^{2sk} \cdot f_k + \underbrace{\sum_{k=p}^{n-1} r^{2sk} \cdot f_k}_{\sum_{k=0}^{p-1} r^{2s(k+p)} \cdot f_{k+p}} = \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (r^{2sk} \cdot f_k + \underbrace{r^{2s(p+k)}}_{r^{2sk} \cdot r^{2sp}} \cdot f_{p+k}) = \sum_{k=0}^{p-1} (r^2)^{sk} (f_k + \underbrace{r^{2sp}}_{(r^p)^{2s} = ((-1)^2)^s = 1} \cdot f_{p+k}) = \sum_{k=0}^{p-1} (r^2)^{sk} (f_k + f_{p+k}) \end{aligned}$$

Somit liegt hier eine DFT der Ordnung p vor für $(f_k + f_{p+k})$, $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

Weiter gilt: $\gamma_{2s+1} = \sum_{k=0}^{p-1} (r^{(2s+1)k} \cdot f_k + r^{(2s+1)(p+k)} \cdot f_{p+k}) = \sum_{k=0}^{p-1} (r^2)^{sk} (f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$

Am Ende ist wieder $r^p = -1$ benutzt worden.

Das ist wieder eine DFT für $(f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$, und zwar der Ordnung $n = p$.

Trick: Damit haben wir die DFT der Ordnung $n = 2p$ zerlegt in 2 DFT der Ordnung p . Statt $n^2 = 4p^2$ Multiplikationen hat man nur noch $p^2 + p^2 = 2p^2$ Multiplikationen. Dazu kommen weitere p Additionen und auch Multiplikationen um z.B. $(f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$ zu bilden. Somit wächst der Gewinn quadratisch mit p , der Verlust aber nur linear. Der Gewinn ist also von höherer Ordnung.

Nun gelangen wir wie folgt zur FFT:

Iteration:

Ist nun $n = 2p = 4p_1$, so tritt p_1 an die Stelle von p vorhin, und mit den beiden oben beschriebenen DFT kann man nochmals gleich verfahren. Ist allgemein $n = 2^m$, so lässt sich die DFT in 2^m Teile aufspalten.

Ist $\mu(n)$ die Anzahl Multiplikationen, die dann noch bleiben, so gilt nach dem eben Gesagten:

$$\mu(2) = 0, \quad \mu(2p) = 2 \cdot \mu(p) + p \leadsto \mu(n) = \frac{n}{2} \cdot \ln\left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow \underbrace{\mu(n)}_{FFT} << \underbrace{n^2}_{DFT}$$

Bsp.: Sei $n = 8$

$$\vec{\gamma}^{(8)} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_2 \\ \gamma_4 \\ \gamma_6 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_5 \\ \gamma_7 \end{pmatrix} = \tilde{W}_8 \cdot \vec{f}^{(8)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r^2 & r^4 & r^6 & 1 & r^2 & r^4 & r^6 \\ 1 & r^4 & 1 & r^4 & 1 & r^4 & 1 & r^4 \\ 1 & r^6 & r^4 & r^2 & 1 & r^6 & r^4 & r^2 \\ \hline 1 & r^2 & r^4 & r^6 & 1 & r^2 & r^4 & r^6 \\ 1 & r^3 & r^6 & r & r^4 & r^7 & r^2 & r^5 \\ 1 & r^5 & r^2 & r^7 & r^4 & r & r^6 & r^3 \\ 1 & r^7 & r^6 & r^5 & r^4 & r^3 & r^2 & r \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

Dabei lässt sich $\tilde{W} = \tilde{W}_8$ wie folgt noch aufspalten:

$$\tilde{W}_8 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^2 & r^4 & r^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^4 & 1 & r^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^6 & r^4 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r^2 & r^4 & r^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r^4 & 1 & r^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r^6 & r^4 & r^2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & r^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & r^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & r^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^3 & 0 & 0 & 0 & r^7 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \tilde{W}_4 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{W}_4 \end{array} \right) \cdot D_8 \rightsquigarrow \tilde{W}_8 \text{ ist faktorisiert!}$$

$$\Rightarrow \vec{\tilde{\gamma}}^{(8)} = \tilde{W}_8 \cdot \vec{f}^{(8)} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{W}_4 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{W}_4 \end{array} \right) \cdot D_8 \cdot \vec{f}^{(8)} \quad \rightsquigarrow \quad \text{Sei } \vec{z}^{(8)} := D_8 \cdot \vec{f}^{(8)}$$

$$\rightsquigarrow \vec{z}^{(8)} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_7 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{lcl} z_0 & = & f_0 + f_4 \\ z_1 & = & f_1 + f_5 \\ & \vdots & \vdots \\ z_3 & = & f_3 + f_7 \\ z_4 & = & (f_0 - f_4) \cdot r^0 \\ & \vdots & \vdots \\ z_7 & = & (f_3 - f_7) \cdot r^3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \Rightarrow \vec{\tilde{\gamma}}^{(8)} = \tilde{W}_8 \cdot \vec{f}^{(8)} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \tilde{W}_4 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{W}_4 \end{array} \right)}_{=a} \cdot \underbrace{(D_8 \cdot \vec{f}^{(8)})}_{=b}$$

a: Die Hälfte der Zellen ist mit 0 besetzt: Grosse Reduktion des Aufwandes.

b: $n = 8$ Additionen und $\frac{n}{2} = p = 4$ Multiplikationen.

Iteration:

Mit \tilde{W}_4 verfahren wir gleich wie mit \tilde{W}_8 .

4.6 Fouriertransformation

4.6.1 Fourierintegral

Idee

Sei $f(t)$ eine Funktion, die in eine Fourierreihe entwickelbar ist. Dann gilt:

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \cdot c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(\lambda) \cdot e^{-i\omega_k \lambda} d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot e^{-i\omega_k \lambda} d\lambda$$

Problem:

Was soll nun geschehen, wenn $f(t)$ **nicht periodisch** ist?

Idee:

Lasse T gross und grösser werden. Betrachte dann schliesslich $T \rightarrow \infty$:

$$\leadsto \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

$$\text{Für } \omega \text{ folgt dann: } \omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

\leadsto **Problem:**

Was passiert dann mit der Formel für $\tilde{f}(t)$?

\leadsto Sei $\Delta\Omega$ klein, $\omega = \frac{2\pi}{T} := \Delta\Omega$,
und sei die verwendete Reihe gleichmässig konvergent.

$$\begin{aligned} f(t) \sim \tilde{f}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k t} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot e^{-i\omega k \lambda} d\lambda \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T} k t} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{T} k \lambda} \cdot \frac{2\pi}{T} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\Delta\Omega k t} \cdot e^{-i\Delta\Omega k \lambda} \cdot \Delta\Omega \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{i(t-\lambda) \cdot (k \cdot \Delta\Omega)}}_{:=g(k \cdot \Delta\Omega)} \cdot \Delta\Omega \right) d\lambda \\ &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k \cdot \Delta\Omega) \cdot \Delta\Omega \right) d\lambda \quad \text{mit } \Omega := k \cdot \Delta\Omega \leadsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k \cdot \Delta\Omega) \cdot \Delta\Omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) d\Omega \end{aligned}$$

Hier haben wir eine unendliche Summe als Riemannsche Näherungssumme interpretiert und sind so zu einem uneigentlichen Integral gekommen.

$$\begin{aligned} \leadsto f(t) \sim \tilde{f}(t) &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) d\Omega \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-\lambda) \cdot \Omega} d\Omega \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i t \cdot \Omega} \cdot e^{-i \lambda \cdot \Omega} d\Omega \right) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i \lambda \cdot \Omega} d\lambda \right) \cdot e^{i t \cdot \Omega} d\Omega := \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \cdot e^{i t \cdot \Omega} d\Omega \end{aligned}$$

Definition: $F(\Omega) := \hat{f}(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i \lambda \cdot \Omega} d\lambda$ heisst **Fourier-Integral**
oder **Fourier-Transformierte** resp. **Spektralfunktion** von f .

Bemerkung:

$$1. \text{ Folgerung: } f(t) \sim \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{i t \cdot \Omega} d\Omega$$

2. Es gibt Autoren, die die Fourier-Transformierte von f wie folgt anders definieren:

$$\hat{f}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda \cdot \Omega} d\lambda$$

Dann gilt: $f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega} d\Omega$

$\hat{f}(\Omega)$ und $f(t)$ haben dann eine quasi symmetrische Schreibweise.

3. $\hat{f}(\Omega)$ entstand aus den Fourierkoeffizienten c_k und aus $\Delta\Omega$, also dem Spektrum von $f(t)$, das hier kontinuierlich geworden ist. Daher kommt der Name „Spektralfunktion“ oder „Spektraldichte“. Die Werte Ω mit $\hat{f}(\Omega) \neq 0$ bilden das Spektrum, das für periodische Funktionen diskret war.

4. Damit ergibt sich eine **Interpretation von $\hat{f}(\Omega)$** :

$$\text{Es gilt: } \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot (\cos(t \cdot \Omega) + i \sin(t \cdot \Omega)) d\Omega$$

Somit ist $f(t)$ als **kontinuierliche Superposition** von Schwingungen $\hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega}$ mit der Frequenz Ω und der Amplitude \hat{f} dargestellt.

5. Die Fouriertransformationen und ihre Inverse entsprechen formal der reellen **Laplace-Transformationen** und ihrer Inversen.

$$\hat{f}(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda \cdot \Omega} d\lambda, \quad \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega}) d\Omega$$

6. Damit $\hat{f}(\Omega)$ existiert, muss $f(t)$ für $|t| \rightarrow \infty$ genügend stark gegen 0 gehen.

$$\text{Es gilt: } e^{-i\lambda \cdot \Omega} = \cos(\lambda \cdot \Omega) - i \sin(\lambda \cdot \Omega)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda \cdot \Omega} d\lambda \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot (\cos(\lambda \cdot \Omega) - i \sin(\lambda \cdot \Omega)) d\lambda \right| = \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| \cdot (|\cos(\lambda \cdot \Omega)| + |\sin(\lambda \cdot \Omega)|) d\lambda < \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| \cdot 2 d\lambda = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda \end{aligned}$$

$$\textbf{Konsequenz: } \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda \text{ existiert} \Rightarrow \hat{f}(\Omega) \text{ existiert}$$

Damit können wir den **Fourierschen Integralsatz** formulieren:

Satz:**Vor.:** f stückweise glatt auf \mathbb{R} $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda$ existiert**Beh.:**

$$1. \hat{f}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda \cdot \Omega} d\lambda \text{ existiert } \forall \Omega \in \mathbb{R}$$

2. In den Stetigkeitspunkten von f gilt:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega} d\Omega$$

3. In den Unstetigkeitspunkten ξ von f gilt:

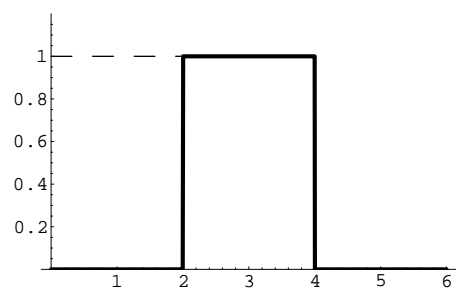
$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2}(f(\xi^+) + f(\xi^-)) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{i\xi \cdot \Omega} d\Omega$$

RegelnDie Parsevalsche Gleichung sieht jetzt für $T \rightarrow \infty$ wie folgt aus:**Korollar:****Parseval**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\Omega)|^2 d\Omega$$

Bsp.:

Da eine Funktion mit Hilfe von Rechtecksfunktionen abgetastet werden kann, wollen wir eine Rechtecksfunktion studieren:



$$\begin{aligned}
\leadsto \hat{f}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-it\cdot\Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} a \cdot e^{-it\cdot\Omega} dt = \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{1}{-i\Omega} \cdot e^{-it\cdot\Omega} \Big|_{t_1}^{t_2} \\
&= -\frac{a}{2\pi i\Omega} (e^{-it_2\cdot\Omega} - e^{-it_1\cdot\Omega}) = -\frac{a}{2\pi i\Omega} e^{-i\Omega \frac{t_1+t_2}{2}} (e^{-i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}} - e^{-i\Omega \frac{t_1-t_2}{2}}) \\
&= -\frac{a}{2\pi i\Omega} e^{-i\Omega \frac{t_1+t_2}{2}} (-e^{-i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}} + e^{+i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}}) \cdot (-1) \\
&= \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \underbrace{\frac{1}{2i} \cdot (e^{i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}} - e^{-i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}})}_{\sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2})} \cdot e^{-i\Omega \frac{t_1+t_2}{2}} = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2}) \cdot \underbrace{e^{-i\Omega \frac{t_2+t_1}{2}}}_{\in \mathbb{C}}
\end{aligned}$$

Für ein symmetrisches Intervall mit $t_1 = -t_0$ und $t_2 = +t_0$ wird $\frac{t_2+t_1}{2} = 0$ und $\frac{t_2-t_1}{2} = t_0$. Damit erhält man:

$$\hat{f}(\Omega) = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2}) \cdot e^{-i\Omega \frac{t_2+t_1}{2}} = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{-i\Omega \cdot 0} = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0)$$

Korollar:

Vor.:

$$f(t) = \begin{cases} a & t \in [t_1, t_2] \\ 0 & t \notin [t_1, t_2] \end{cases}$$

Beh.:

$$\hat{f}(\Omega) = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2}) \cdot e^{-i\Omega \frac{t_2+t_1}{2}}$$

$$t_1 = -t_0, t_2 = +t_0 \Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0)$$

Weiter gilt: $f(t) \sim \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega$

Bei einem symmetrischen Intervall wird dann:

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega, \quad t \in (-t_0, t_0)$$

Speziell:

$$0 \in (-t_0, t_0), \quad f(0) = a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{i\cdot 0 \cdot \Omega} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) d\Omega$$

$$\Rightarrow \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega t_0)}{\Omega} d\Omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega t_0)}{\Omega} d\Omega \quad \text{unabhängig von } t_0$$

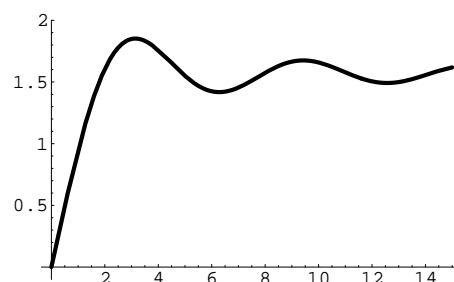
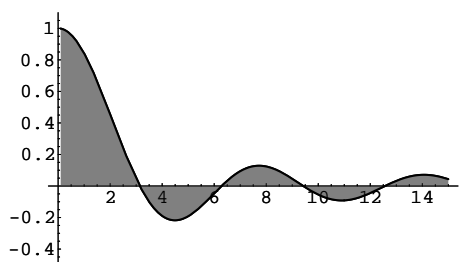
Lemma: $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega t_0)}{\Omega} d\Omega$ unabhängig von t_0

und $\pi = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} d\Omega$.

Definition:

$$Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} d\Omega \text{ heisst } \mathbf{Integralsinus}$$

$Si(x)$ hat die Bedeutung des nebenstehend gezeigten Flächeninhalts.

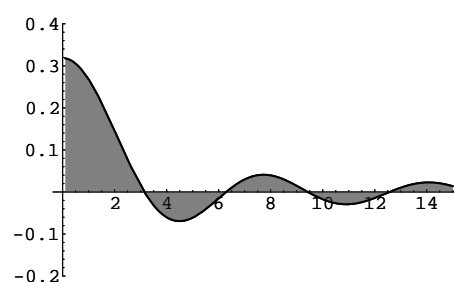
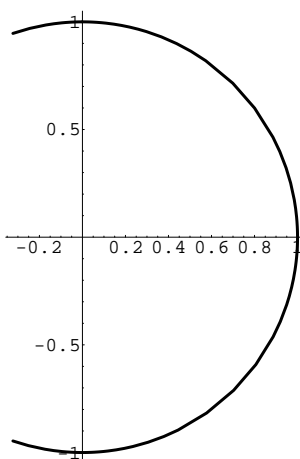


Oben haben wir gezeigt:

Satz:
$$Si(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}$$

Bsp.:

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega t} & t \in [-t_0, t_0] \\ 0 & t \notin [-t_0, t_0] \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \leadsto \hat{f}(\Omega) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} e^{i\omega t} \cdot e^{-i t \cdot \Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} e^{i t \cdot (\omega - \Omega)} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi(\omega - \Omega)} e^{i t \cdot (\omega - \Omega)} \Big|_{-t_0}^{t_0} = \frac{1}{2i\pi(\omega - \Omega)} (e^{i t_0 \cdot (\omega - \Omega)} - e^{-i t_0 \cdot (\omega - \Omega)}) = \frac{1}{\pi(\omega - \Omega)} \sin(t_0 \cdot (\omega - \Omega)) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Bsp.:

Sei $f(t) = \delta(t)$ Dirac-Funktion, Distribution.

$$\leadsto \hat{f}(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} f(t) \cdot e^{-i t \cdot \Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} \delta(t) \cdot e^{-i t \cdot \Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 1 = \frac{1}{2\pi}$$

(Ausblende-Eigenschaft)

Nachfolgend stehen einige elementar beweisbare Regeln. Die Nachprüfung sei dem Leser überlassen.

Sei $a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t) \circ \bullet \widehat{a \cdot f_1(\Omega) + b \cdot f_2(\Omega)}, f'(t) \circ \bullet \widehat{f'(\Omega)}, \dots$

Regeln:

$$1. \text{ Linearität: } \widehat{a \cdot f_1(\Omega) + b \cdot f_2(\Omega)} = a \cdot \hat{f}_1(\Omega) + b \cdot \hat{f}_2(\Omega)$$

$$2. \text{ Differentiationsregel: } \widehat{f'(\Omega)} = i \Omega \hat{f}(\Omega)$$

3. Verschiebung Urbild

$$F(t) := f(a(t-d)) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = \frac{1}{a} \cdot e^{-i \Omega d} \cdot \hat{f}\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

4. Verschiebung Bild

$$F(t) := e^{i t d} \cdot f(t) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = \hat{f}(\Omega - d)$$

5. Faltung 1:

$$F(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot g(t-\lambda) d\lambda := (f * g)(t) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = 2\pi \cdot \hat{f}(\Omega) \cdot \hat{g}(\Omega)$$

6. Faltung 2:

$$F(t) = f(t) \cdot g(t) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = (\hat{f} * \hat{g})(\Omega)$$

7. Iteration:

$$\widehat{(\hat{f})}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot f(-t)$$

8. Integration:

$$F(t) := \int_a^t f(\lambda) d\lambda \text{ erfülle die Voraussetzungen des Fourierschen Integralsatzes}$$

$$\hat{F}(\Omega) = \frac{1}{i \Omega} \cdot \hat{f}(\Omega)$$

9. Distribution:

$$f(t) \equiv 1 \Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \delta(\Omega)$$

Beweis:

Übungen!

4.6.2 b-Band-Beschränktheit, Shannon

Definition:

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ heisst } \mathbf{b\text{-}Band\text{-}beschränkt} \Leftrightarrow \forall_{|\Omega| \geq b} : \hat{f}(\Omega) = 0$$

\leadsto Im Spektrum existieren also keine grösseren Frequenzen, was z.B. in der Akustik der Fall ist.

Bsp.:

$$\text{sinc}(t) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i t \lambda} d\lambda = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Definition:

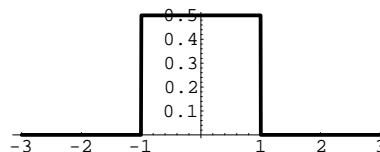
$$\text{sinc}(t) := \text{Sinus cardinalis (Kardinalsinus)}$$

Die Rechnung ergibt:

$$\widehat{\text{sinc}}(\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\Omega| < 1 \\ 0 & |\Omega| > 1 \end{cases}$$

$$|\Omega| = 1 \Rightarrow \widehat{\text{sinc}}(t) = \frac{1}{4}$$

$\widehat{\text{sinc}}(\Omega)$ ist also b-Band-beschränkt.



Satz:

Shannon

Vor.:

$$f \text{ b-Band-beschränkt} \quad h \leq \frac{\pi}{b}$$

Beh.:

1. f ist durch die Werte $f(h \cdot k)$, $k \in \mathbb{Z}$ in allen Stetigkeitspunkten eindeutig bestimmt.
2. $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(h \cdot k) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{h} \cdot (t - h \cdot k)\right)$ (*)
3. $|\Omega| \leq \frac{\pi}{h} \Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(h \cdot k) \cdot e^{-i h k \Omega}$

Definition:

Wir nennen eine Funktion f **fast b-Band-beschränkt**, falls $|\hat{f}(\Omega)|$ klein bleibt für $|\Omega| > b$.

Anwendung:

Der Mensch nimmt Töne über ca. $20 \cdot 10^3$ Hertz nicht wahr. Für Musik genügen also b-Band-beschränkte Funktionen. \leadsto Digitale Tonaufzeichnung, Compact Disk... Hier wählt man für die Abtastfrequenz $\frac{1}{h} \geq \frac{b}{\pi} = 40 \cdot 10^3$ Hz

4.6.3 Lösen von D'Gl mit Fourier-Transformationen

Analog wie bei den Laplace-Transformationen kann man bei D'Gl auch mit Fourier-Transformationen arbeiten.

Bsp.: $E(y) \equiv y'(x) + y(x) = f(x) \quad (\text{D'Gl})$

$$E(y) \circ \bullet i \cdot \Omega \cdot \hat{y}(\Omega) + \hat{y}(\Omega) = \hat{f}(\Omega) \Rightarrow \hat{y}(\Omega) = \frac{\hat{f}(\Omega)}{i \cdot (\Omega + 1)}$$

Rücktransformation: $\leadsto y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\Omega)}{i \cdot (\Omega + 1)} \cdot e^{i x \cdot \Omega} d\Omega$

Speziell: Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \frac{\sin(\Omega)}{\pi \cdot \Omega} \quad (\text{vgl. Seite 123})$$

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega)}{i \cdot (\Omega + 1) \cdot \Omega \cdot \pi} \cdot e^{i x \cdot \Omega} d\Omega = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - e^{-(x+1)} & |x| \leq 1 \\ e^{1-x} - e^{-(x+1)} & |x| > 1 \end{cases} \rightsquigarrow y_p$$

\rightsquigarrow Hier haben wir eine partikuläre Lösung gefunden. Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Addition der homogenen Lösungen:

$$E(y)_{hom} \equiv y'(x) + y(x) = 0 \Rightarrow y_{hom}(x) = c \cdot e^{-x}, \quad y_{inhom}(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = c \cdot e^{-x} + y_p(x)$$

Achtung: Für $c \neq 0$ ist $\int_{-\infty}^{\infty} |y_{inhom}(x)| dx$ nicht mehr endlich, denn $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx = \infty$. D.h. die Fouriertransformierte existiert hier nicht.

Konsequenz: Die Fourier-Transformation liefert nur diejenigen Lösungen der D'Gl, die eine Fourier-Transformierte $\hat{y}(\Omega)$ besitzen. Und diese sind offenbar recht eingeschränkt.

Weiter sind die Transformaten reeller Funktionen, im Unterschied zu den Laplace-Transformationen, i.A. komplexe Funktionen.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad \hat{f}(\Omega) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i t \cdot \Omega} dt, \quad e^{-i t \cdot \Omega} = \cos(t \cdot \Omega) - i \sin(t \cdot \Omega) \\ &\rightsquigarrow \hat{f}(\Omega) \in \mathbb{R} \quad \text{für } f \text{ gerade} \end{aligned}$$

Hinweis:

Für die Fourier-Transformationen existieren Tabellen genauso wie für die Laplace-Transformationen.

Kapitel • Chapitre 5

z-Transformationen

5.1 Einführung

5.1.1 Verwendung

Maschinen, wie z.B. heute übliche Computer (von Neumann-Maschinen), ändern ihren Zustand höchstens immer nur dann, wenn ein neuer Takt beginnt. Man hat es bei ihrer Beschreibung also mit einer Folge von Zuständen zu tun. Mathematisch drückt man das mit diskreten Folgen aus.

Allgemein findet man diese Situation bei der Abtastung diskreter Zeitsignale. Es zeigt sich, dass die Zustandsgleichungen der so geschriebenen Systeme Differenzgleichungen sind. In Analogie zur Behandlung der Differentialgleichungen mit Hilfe von Laplace-Transformationen behandelt man solche Differenzgleichungen mit z-Transformationen. Wie wir später sehen werden, sind z-Transformationen eigentlich nichts anderes als die diskrete Version der Laplace-Transformationen. Daher finden wir die Regeln der Laplace-Transformationen bei den z-Transformationen wieder.

Literatur: Glyn James, Advanced Modern Engineering Mathematics, Addison Wesley.

5.1.2 Gegenstand der Betrachtung

Symbole:

Endliche Folgen: $\{x_k\}_{k=0}^{k=n} := \{x_k\}_0^n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Unendliche Folgen: $\{x_k\}_0^\infty := \{x_k\}_0^n = \{x_0, x_1, x_2, x_3 \dots\}$

Falls auch für $t < 0$ abgetastet wird:

$$\{x_k\}_{-\infty}^\infty := \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3 \dots\}$$

Hinweis:

Unendliche Folgen sind Grenzfälle, die bei getakteten Maschinen nicht vorkommen.

Definition: Ist $x_k = 0$ für $k < 0$, so heisst die Folge $\{x_k\}_{-\infty}^\infty$ **Kausalfolge**.

Sei $f : t \mapsto f(t)$ $f(t_k) := x_k, \quad k \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \{x_k\}_{-\infty}^\infty$ definiert

Sei $H(t) =$ Einheitssprungfunktion:



$$\leadsto f(t) \cdot H(t) = 0, \quad t < 0$$

Lemma: $\{H(t) \cdot x_k\}_{-\infty}^{\infty} =$ Kausalfolge

5.1.3 z-Transformierte

Definition: $\mathcal{Z}\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} := X(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$ heisst **z-Transformierte** von $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$

\mathcal{Z} ist hier ein Operator auf der Menge $\{\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}\}$.

Symbol: $\{x_k\} \circ \bullet X(z)$

Lemma: **Vor.:** $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$ Kausalfolge

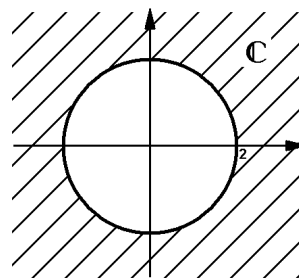
Beh.: $\mathcal{Z}\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = \mathcal{Z}\{x_k\}_0^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$

Bsp.: Sei $x_k = 2^k$ für $k \geq 0$

$$\mathcal{Z}\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k \leadsto \text{Geometrische Reihe}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x_k\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{z}\right)^k}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{z}{z - 2}$$

für $\left|\frac{2}{z}\right| < 1, \quad 2 < |z|$



$$\text{Umgekehrt: } \frac{z}{z-2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \left(1 - \frac{2}{z}\right)^{-1} = 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \dots$$

5.2 Regeln, Calculus

5.2.1 Geometrische Folgen

Nimmt man statt 2 allgemein $a \in \mathbb{C}$, so gilt:

Satz:**Vor.:** $|z| > a, \quad x_k = a^k \text{ für } k \geq 0, \quad \{x_k\} \text{ Kausalfolge}$ **Beh.:**

$$\mathcal{Z}\{x_k\} = \mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$$

$$\text{Bsp.:} \quad \mathcal{Z}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\} = \frac{z}{z - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2z}{2z+1}$$

5.2.2 Differentiation von Transformaten

Durch Differentiation von $\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$ für $|z| > |a|$ lassen sich neue Regeln gewinnen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-a} \right) = \frac{(z-a) - z}{(z-a)^2} = \frac{-a}{(z-a)^2} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^{-k} = - \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a^k \cdot z^{-k-1} \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^k}{z^{k+1}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^k}{z^k} = -\frac{1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{k \cdot a^k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \mathcal{Z}\{a^k\} &= \frac{d}{da} \left(\frac{z}{z-a} \right) = \frac{0 \cdot (z-a) - z \cdot (-1)}{(z-a)^2} = \frac{z}{(z-a)^2} = \frac{d}{da} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^{k-1}}{z^k} = \mathcal{Z}\{k \cdot a^{k-1}\} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^k}{z^k} = -\frac{z}{a} \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\} \Rightarrow \frac{d}{da} \mathcal{Z}\{a^k\} = -\frac{z}{a} \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\} \end{aligned}$$

Regeln:**Vor.:** $|z| > |a|$ **Beh.:**

$$1. \quad \frac{d}{da} \mathcal{Z}\{a^k\} = -\frac{z}{a} \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\}$$

$$2. \quad \mathcal{Z}\{k \cdot a^{k-1}\} = \frac{z}{(z-a)^2}$$

$$3. \quad a = 1 \Rightarrow \mathcal{Z}\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Bemerkung:

$$\mathcal{Z}\{a_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot w^k, \quad w := \frac{1}{z}$$

\leadsto Die z-Transformierte ist eine **Potenzreihe!**

5.2.3 Linearität, Einheitsimpuls

Linearität

Da z-Transformierte also Potenzreihen sind, dürfen wir innerhalb des jeweiligen Konvergenzbereiches die bekannten Rechenregeln anwenden: Gliedweise integrieren, differenzieren, addieren u.s.w.. Daher gilt:

Regel: $\mathcal{Z}\{\lambda a_k + \mu b_k\} = \lambda \mathcal{Z}\{a_k\} + \mu \mathcal{Z}\{b_k\}$
innerhalb des gemeinsamen Konvergenzbereiches.

Bsp.: $\mathcal{Z}\{2k\} = 2 \cdot \mathcal{Z}\{k\} = 2 \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$

5.2.4 Exponential und trigonometrische Folgen

Einheitsimpuls

Wir betrachten nun die Folge:

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\delta_k\} = \frac{1}{z^0} + \frac{0}{z^1} + \frac{0}{z^2} + \frac{0}{z^3} + \dots = 1 \rightsquigarrow$$

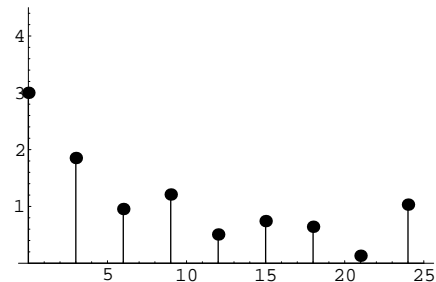
Regel: $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$ heisst **Einheitsimpulssequenz** (kurz: Einheitsimpuls)

Exponentialfolge

Aus der Praxis: Abtasten eines Signals

Sei $\{f(kT) \mid k = 0, 1, 2, \dots\} = \{f(0), f(T), f(2T), f(3T), \dots\} := \{f\{kT\}\}$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{f\{kT\}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(kT)}{z^k}$$



Bsp.: $f(t) = e^{-t} \cdot H(t)$ (Einheitssprung für $t = 0$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{f\{kT\}\} &= \{1, e^{-T}, e^{-2T}, e^{-3T}, \dots\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{f\{kT\}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-kT}}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-T}}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^T \cdot z}\right)^k \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{e^T \cdot z}} = \frac{e^T \cdot z}{e^T \cdot z - 1} = \frac{z}{z - e^{-T}} \quad \text{für } |z| > e^{-T} \end{aligned}$$

Regel: **Vor.:** $\{f\{kT\}\} = \{e^{-kT}\}_0^{\infty}, \quad |z| > e^{-T}$

Beh.: $\{f\{kT\}\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{f\{kT\}\} = \frac{z}{z - e^{-T}}$

Trigonometrische Folgen

1. Beispiel:

$$\begin{aligned} \{\cos(k\omega T)\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\cos(k\omega T)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{ik\omega T} + e^{-ik\omega T}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{Z}\{e^{ik\omega T}\} + \mathcal{Z}\{e^{-ik\omega T}\}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{z - e^{-i\omega T}} + \frac{z}{z - e^{i\omega T}}\right) = \frac{z \cdot (z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \quad \text{für } |z| > 1 \end{aligned}$$

2. Beispiel:

Auf analoge Weise erhalten wir:

$$\{\sin(k \omega T)\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\sin(k \omega T)\} = \frac{z \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \quad \text{für } |z| > 1$$

Regel: Vor.: $|z| > 1$

Beh.:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\cos(k \omega T)\}_0^\infty &= \frac{z \cdot (z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \\ \mathcal{Z}\{\sin(k \omega T)\}_0^\infty &= \frac{z \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \end{aligned}$$

5.2.5 Verschiebungen

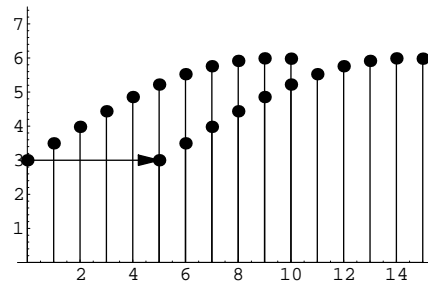
Rechtsverschiebung

Statt „Rechtsverschiebung“ sagen wir auch **Verzögerung**.

Sei

$$\begin{aligned} y_k &= x_{k-k_0}, \quad k \geq k_0 \\ y_k &= 0, \quad k < k_0 \end{aligned}$$

$$x_0 = y_{k_0}$$



$$\leadsto \mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{x_{k-k_0}}{z^k} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^{p+k_0}} = \frac{1}{z^{k_0}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = \frac{1}{z^{k_0}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}\{x_k\}$$

Regel: Vor.:

$$\mathcal{Z}\{x_k\} = \{x_k\}_0^\infty, \quad k < 0 \Rightarrow x_k = 0, \quad \mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)$$

Beh.:

$$\mathcal{Z}\{x_{k-k_0}\} = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}\{x_k\} = \frac{1}{z^{k_0}} X(z)$$

Bsp.: $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0.$

$$\{x_{k-2}\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{x_{k-2}\} = \frac{1}{z^2} \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{2}{z(2z - 1)} \quad \text{für } |z| > \frac{1}{2}$$

Linksverschiebung

Statt „Linksverschiebung“ sagen wir auch **Vorverschiebung**.

Sei $y_k = x_{k+k_0} \leadsto \mathcal{Z}\{y_k\} = ?$

Argumentiere rekursiv:

$$k_0 = 1, \quad y_k = x_{k+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{Z}\{y_k\} &= \left\{\frac{y_k}{z^k}\right\}_0^\infty = \left\{\frac{x_{k+1}}{z^k}\right\}_0^\infty = z \left\{\frac{x_{k+1}}{z^{k+1}}\right\}_0^\infty = z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = z \left(\left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} \right) - x_0 \right) = z \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - z \cdot x_0 \\ &= z \cdot X(z) - z \cdot x_0 = \mathcal{Z}\{x_{k+1}\} \quad (\text{wegen der Rechtsverschiebung}) \end{aligned}$$

$$\leadsto \text{Induktion: } \mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = z^2 \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - z^2 \cdot x_0 - z \cdot x_1$$

$$\leadsto \mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\} = z^{k_0} \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - z^{k_0} \cdot x_0 - z^{k_0-1} \cdot x_1 - \dots - z \cdot x_{k_0-1}$$

Regel:

Vor.:

$$\{x_k\} = \{x_k\}_0^\infty$$

Beh.:

$$\mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\}_0^\infty = z^{k_0} \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - \sum_{n=0}^{k_0-1} z^{k_0-n} \cdot x_n$$

Bemerkung:

Diese Regeln werden bei der Anwendung auf die Differenzengleichungen zentral sein.

5.2.6 Gliedweise Multiplikation mit einer Folge

Multiplikation mit geometrischer Folge

$$\{x_k\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{a^k x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{\frac{z^k}{a^k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{\left(\frac{z}{a}\right)^k} = X\left(\frac{z}{a}\right) \leadsto$$

Regel:

Vor.:

$$\mathcal{Z}\{x_k\} \circ \bullet X(z)$$

Beh.:

$$\mathcal{Z}\{a^k x_k\} \circ \bullet X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Multiplikation mit Potenzfolge

$$\begin{aligned} \text{Sei } n=1 \leadsto \mathcal{Z}\{k x_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k x_k}{z^k} \cdot \frac{z}{z} = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{z^{k+1}} x_k = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^k} \right) x_k \right) = -z \cdot \frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} \right) \\ &= -z \frac{d}{dz} (\mathcal{Z}\{k x_k\}) = \left(-z \frac{d}{dz} \right) (X(z)) \end{aligned}$$

$$\leadsto \text{Induktion: } \mathcal{Z}\{k^n x_k\} = \left(-z \frac{d}{dz} \right)^n (X(z))$$

Regel:

Differentiation der Transformierten

Vor.:

$$\mathcal{Z}\{x_k\} \circ \bullet X(z)$$

Beh.:

$$\{k^n x_k\} \circ \bullet \left(-z \frac{d}{dz} \right)^n (X(z))$$

Bsp.:

$$\begin{array}{rcl}
(-z \frac{d}{dz})(X(z)) & = & (-z \frac{d}{dz})\left(\frac{z}{z-a}\right) = \frac{z}{z-a} \bullet \circ \{a^k\}, \\
(-z \frac{d}{dz})^2(X(z)) & = & (-z \frac{d}{dz})\left(\frac{az}{(a-z)^2}\right) = \frac{2a^3}{(z-a)^3} + \frac{3a^2}{(z-a)^2} + \frac{a}{z-a} \bullet \circ \{k a^k\}, \\
& & \text{u.s.w.} \quad \dots \quad \bullet \circ \{k^2 a^k\} \\
& & \bullet \circ \{k^n a^k\}
\end{array}$$

Konsequenz:

Wie man sofort sieht, lassen sich mit Hilfe dieser Regel Ausdrücke der Form $\frac{1}{(z-\alpha)^n}$ transformieren.

5.2.7 Anfangs- und Endwertsatz

Anfangswertsatz

Es gilt: $\mathcal{Z}\{x_k\} \circ \bullet X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} x_0$

Satz:**Vor.:**

$\{x_k\} = \{x_k\}_0^{\infty}$
(Kausalfolge)

Beh.:

$\lim_{|z| \rightarrow \infty} X(z) = x_0$

Endwertsatz

$$\begin{aligned}
\text{Betrachte: } (1 - \frac{1}{z}) \cdot X(z) &= (1 - \frac{1}{z}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot (\frac{1}{z} - \frac{1}{z^{k+1}}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \\
&= x_0 \cdot \frac{z-1}{z} + x_1 \cdot \frac{z-1}{z^2} + \dots + x_{N_0} \cdot \frac{z-1}{z^{N_0+1}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}}
\end{aligned}$$

$$\text{Es gilt nun: } \lim_{z \rightarrow 1} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} (1 - \frac{1}{z}) \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}}$$

Sei jetzt: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_{\infty} \in \mathbb{C}$ existiert $\leadsto |x_k - x_{\infty}| < \varepsilon$

$\leadsto x_k = x_{\infty} \pm \varepsilon_k$ für $k > N_0$ und $0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon_{N_0}$

$$\Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_{\infty} \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \quad \text{Hier ist:}$$

$$\left| \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| < \varepsilon_{N_0} \cdot \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \left| \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| = \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{z^k} \right| = \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \frac{1}{|1-z|}$$

$$\leq \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \frac{1}{|1-z|}, \text{ denn es gilt: } |1-|z|| = ||1|-|z|| \leq |1-z| \leq |1|+|z|$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| < \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \frac{1}{|1-z|} = \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{1}{z^{N_0+2}} \right| \quad \text{für } |z| > 1$$

$$\leadsto \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = \varepsilon^*(N_0) \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}}, \quad |\varepsilon^*(N_0) \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}}| < \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{1}{z^{N_0+2}} \right|$$

Für $\varepsilon_{N_0} \rightarrow 0$ sowie $z \rightarrow 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| &< \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{1}{z^{N_0+2}} \right| \rightarrow 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} &= \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_{\infty} \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \sim x_{\infty} \cdot \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{z-1}{z^{k+1}} + 0 \end{aligned}$$

Hier wird:

$$\begin{aligned} x_{\infty} \cdot \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{z-1}{z^{k+1}} &= x_{\infty} \cdot \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = x_{\infty} \cdot \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \cdot \frac{1}{1-z} = x_{\infty} \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}} \cdot \frac{1}{1} = x_{\infty} \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}} \\ \Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} &\sim x_{\infty} \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}} + 0 = \frac{x_{\infty}}{z^{N_0+2}} \quad \text{für } |z| > 1 \end{aligned}$$

$$\leadsto \lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{x_{\infty}}{z^{N_0+2}} = x_{\infty} \in \mathbb{C}$$

(falls dieser Limes existiert)

Bemerkung:

Falls $\lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z)$ existiert, so kann dieser Limes nach der Definition des Limes nicht vom Weg abhängig sein, auf dem $z \rightarrow 1$ geht. Für $|z| < 1$, $z \rightarrow 0$ existiert der Limes nicht, wie Trivialbeispiele zeigen:

Bsp.: Sei $z = r \in \mathbb{R}$, $0 < z = r < 1$, $a \neq 0$, $x_k = a = \text{const. } \forall_{k \in \mathbb{N}_0}$

$$\leadsto x_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a, \quad \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{z^k} = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot a \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{z}}$$

mit $\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ und $z = r < 1$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z) \rightarrow \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot a \cdot \frac{1 - \infty}{1 - \frac{1}{z}} = \pm \infty \leadsto \text{Limes existiert nicht!}$$

Daher ist die Voraussetzung „ $X(z)$ existiert“ wesentlich.

Satz:

Vor.:

- (1) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_{\infty}$ existiert
- (2) $\mathcal{Z}\{x_k\} = \{x_k\}_0^{\infty} \circ \bullet X(z)$, $X(z)$ existiert für alle betrachteten z

Beh.:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z)$$

5.2.8 Inverse z-Transformation

Definition

Sei $\{x_k\}_0^\infty \circ \bullet \mathcal{Z}\{x_k\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x_k}{z^k} = X(z)$ und $\{y_k\}_0^\infty \circ \bullet \mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{y_k}{z^k} = Y(z)$

Für $\{x_k\}_0^\infty \neq \{y_k\}_0^\infty$ ist für mindestens ein $k \in \mathbb{N}_0$ $x_k \neq y_k$, d.h. die Potenzreihen $X(z)$ und $Y(z)$ sind in mindestens einem Glied verschieden. Die Transformation ist also injektiv und somit auf den benötigten Mengen bijektiv. \leadsto

Lemma:

Die Menge der z-Transformationen $\{\{x_k\}_0^\infty \circ \bullet \mathcal{Z}\{x_k\}\}$ stiftet eine zwischen der Urbildmenge $\{\{x_k\}_0^\infty\}$ und der Bildmenge $\{\mathcal{Z}\{x_k\}\}$ bijektive Abbildung. D.h. die **inverse Transformation** \mathcal{Z}^{-1} existiert eindeutig.

5.2.9 Auffinden der Inversen

Problem:

In der Praxis hat man oft das folgende Problem zu lösen: Gegeben $X(z)$, gesucht die Inverse $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

Häufig ist $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z), Q(z)$ Polynome in z . Zur Auffindung der Inversen hilft daher oft die **Partialbruchzerlegung!**

Beispiele ohne komplexe Zahlen

1. Beispiel: Geg.: $\{a^k\} \circ \bullet \frac{z}{z-a} \Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{z}{z-a}\} = \{a^k\}$

Z.B. $\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{z}{z-2}\} = \{2^k\}$

2. Beispiel:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{(z-1)(z-2)} = z \frac{1}{(z-1)(z-2)} \stackrel{!}{=} z \left(\frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)} \right) = \frac{z}{(z-2)} - \frac{z}{(z-1)} \\ &\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \{2^k\} - \{1^k\} = \{(2^k - 1)\}_{k=0}^\infty \end{aligned}$$

Ein anderer Weg ergibt sich mit dem Verschiebungssatz:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \stackrel{!}{=} \frac{2}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)} = 2 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z-2)} - \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z-1)} \bullet \circ \{(2 \cdot 2^{k-1} - 1^{k-1})\} = \{(2^k - 1)\}$$

3. Beispiel: $Y(z) = \frac{2z+1}{(z+1)(z-3)}$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{z-3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z+1} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-3} \bullet \circ \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (-1)^{k-1} + \frac{7}{4} \cdot (3)^{k-1}, & k > 0 \\ 0 + 0 = 0, & k = 0 \end{cases}$$

4. Beispiel: $Y(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{(z^3)} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}$

$$1 \bullet \circ \{1, 0, 0, 0, \dots\} \quad \frac{2}{z} \bullet \circ \{0, 2, 0, 0, 0, \dots\} \quad \frac{1}{z^3} \bullet \circ \{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$$

$$\leadsto Y(z) \bullet \circ \{1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$$

5. Beispiel: $G(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \bullet \circ \{(1-e^{-aT})\}, k \geq 0$

Beispiele mit komplexen Nennernullstellen

6. Beispiel:

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}, \quad \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)} = \frac{1}{2ia} \cdot \left(\frac{1}{(z-ia)} - \frac{1}{(z+ia)} \right)$$

$$Y(z) \bullet \circ \frac{1}{2ia} \cdot \{(i^k a^k - (-i)^k a^k)\} = \left\{ \frac{a^k}{2ia} \cdot (i^k - (-i)^k) \right\} = \left\{ \frac{a^k}{a} \cdot \frac{(e^{\frac{i\pi k}{2}} - e^{-\frac{i\pi k}{2}})}{2i} \right\} = \{a^{k-1} \cdot \sin(\frac{k\pi}{2})\}$$

7. Beispiel: $Y(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1},$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z^2 - z + 1} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{(z - e^{\frac{i\pi}{3}})(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} =$$

$$\frac{1}{(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}})(z - e^{\frac{i\pi}{3}})} + \frac{1}{(e^{-\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}})(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} = \frac{1}{(2i \sin(\frac{\pi}{3}))(z - e^{\frac{i\pi}{3}})} + \frac{1}{(-2i \sin(\frac{\pi}{3}))(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} =$$

$$\frac{1}{(2i \frac{\sqrt{3}}{2})(z - e^{\frac{i\pi}{3}})} + \frac{1}{(-2i \frac{\sqrt{3}}{2})(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{(z - e^{\frac{i\pi}{3}})} - \frac{1}{(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} \right)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{z}{(z - e^{\frac{i\pi}{3}})} - \frac{z}{(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} \right) \bullet \circ \left\{ \left(\frac{2}{2i\sqrt{3}} (e^{\frac{ik\pi}{3}} - e^{-\frac{ik\pi}{3}}) \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) \right) \right\}$$

5.3 Praktische Anwendungen

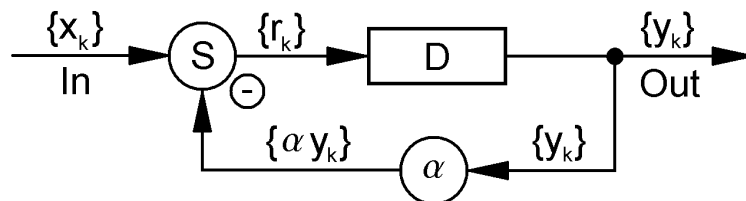
5.3.1 Differenzengleichungen

Z.B. in der **Computertechnik** hat man Systeme mit **diskreten Zuständen**, welche im **Takt** der **Clock** ändern (Taktfrequenz!).

1. Beispiel:

Schema

In	Input	Eingang Signal $\mathcal{Z}\{x_k\}$
S	Subtractor	Macht $r_k = x_k - \alpha y_k$ (Rückspeisung)
D	Delay	Verzögerungsblock, macht $y_{k+1} = r_k$
α	Amplitude α	Macht $y_k \mapsto \alpha y_k$ (Verstärkung)
Out	Output	Ausgang Signal y_k



Bedingungen:

Start: $y_0 = 0$ Eingang: $\{x_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ $k \geq 0$ $\alpha = 0.5$

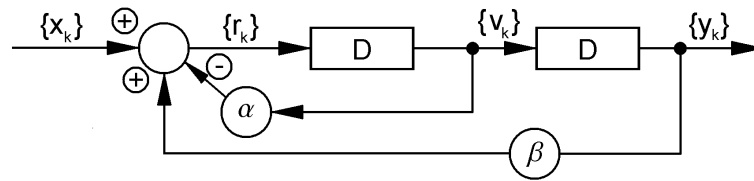
$S \rightsquigarrow r_k = y_{k+1} = x_k - \alpha y_k \rightsquigarrow$ **Differenzengleichung:**

$$E(y) \equiv y_{k+1} + \alpha y_k = x_k$$

Lösung: Auf die Differenzengleichung wenden wir eine z-Transformaion an:

$$\begin{aligned} E(y) \circ \bullet z Y(z) - z y_0 + \alpha Y(z) &= X(z) \Rightarrow z Y(z) - 0 + 0.5 Y(z) = \frac{z}{z-1} \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{X(z)}{z + \alpha} = \frac{z}{(z + 0.5)(z - 1)} = \frac{1}{3(z + 0.5)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z - 1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z + 0.5)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z - 1} \bullet \circ \frac{1}{3} \cdot \{(-\frac{1}{2})^{k-1}\} + \frac{2}{3} \cdot \{1^{k-1}\} \Rightarrow y_k = \{(\frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^{k-1} + \frac{2}{3})\} \end{aligned}$$

Speziell: $y_0 = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^{-1} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$, $y_1 = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^0 + \frac{2}{3} = 1 = x_0$

**2. Beispiel:****Bedingungen:**

Start: $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ Eingang: $\{x_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ $k \geq 0$ $\alpha = 1$, $\beta = 2$

$$\rightsquigarrow y_{k+1} = v_l, \quad y_{k+2} = v_{k+1}, \quad v_{k+1} = r_k \Rightarrow y_{k+2} = r_k = x_k - \alpha v_k + \beta y_k = x_k - \alpha y_{k+1} + \beta y_k$$

\rightsquigarrow Differenzengleichung:

$$E(y) \equiv y_{k+2} + \alpha \cdot y_{k+1} - \beta y_k = x_k, \quad y_{k+2} + y_{k+1} - 2 y_k = x_k$$

Lösung: $E(y) \circ \bullet z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1 + z Y(z) - z y_0 - 2 Y(z) = \frac{z}{z-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z^2 Y(z) - z + z Y(z) - 2 Y(z) &= \frac{z}{z-1} \\ \Rightarrow Y(z) &= \left(\frac{z}{z-1} + z\right) \cdot \frac{1}{z^2 + z - 2} = \frac{z^2}{z-1} \cdot \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)^2} \\ \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{(z+2)(z-1)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{z-1} - \frac{2}{9} \frac{1}{z+2} \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{1}{3} \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{z}{z-1} - \frac{2}{9} \frac{z}{z+2} \bullet \circ \left\{ \left(\frac{1}{3} k + \frac{2}{9} - \frac{2}{9} (-2)^k \right) \right\}_{k=0}^{\infty} \end{aligned}$$

3. Beispiel:

$$E(y) \equiv 8 y_{k+2} - 6 y_{k+1} + y_k = 9, \quad k \geq 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
E(y) &\circ \bullet 8(z^2 Y - z^2 \cdot 1 - z \cdot \frac{3}{2}) - 6(z \cdot Y - z \cdot 1) + Y = 9 \cdot \frac{z}{z-1} \Rightarrow Y \cdot (8z^2 - 6z + 1) = 8z^2 + \frac{24}{2}z - 6z + \frac{9z}{z-1} \\
&\Rightarrow \frac{Y}{z-1} \Rightarrow \frac{Y}{z} = \frac{8z+6}{(4z-1)(2z-1)} + \frac{9z}{(4z-1)(2z-1)(z-1)} = \frac{5}{z-\frac{1}{2}} - \frac{4}{z-\frac{1}{4}} + \frac{6}{z-\frac{1}{4}} - \frac{9}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3}{z-1} \\
&\Rightarrow Y(z) = \frac{2z}{z-\frac{1}{4}} - \frac{4z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3z}{z-1} \bullet \circ \{y_k\} = \{(2 \cdot (\frac{1}{4})^k - 4 \cdot (\frac{1}{2})^k + 3)\}_{k=0}^\infty
\end{aligned}$$

3. Beispiel:

$$E(y) \equiv y_{k+2} + 2y_k = 0, \quad k \geq 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \sqrt{2}, \quad E(y) \circ \bullet z^2 Y - z^2 \cdot 1 - z \cdot \sqrt{2} + 2Y = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Y &= \frac{z^2 + \sqrt{2}z}{z^2 + 2}, \quad \frac{Y}{z} = \frac{z + \sqrt{2}}{z^2 + 2} = \frac{z + \sqrt{2}}{(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})} = \frac{z + \sqrt{2}}{(z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}})(z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}})} \\
&= \frac{1+i}{2i} \cdot \frac{1}{z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} - \frac{1-i}{2i} \cdot \frac{1}{z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}}, \\
Y &= \frac{1+i}{2i} \cdot \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} - \frac{1-i}{2i} \cdot \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}} \bullet \circ \{y_k\}_{k=0}^\infty = \left\{ \frac{1}{2i} \left((1+i) 2^{\frac{k}{2}} e^{i\frac{k\pi}{2}} - (1-i) 2^{\frac{k}{2}} e^{-i\frac{k\pi}{2}} \right) \right\}_{k=0}^\infty \\
&= \left\{ 2^{\frac{k}{2}} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right\}_{k=0}^\infty
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Das letzte Beispiel zeigt, wie man mittels einer Rechnung in \mathbb{C} ein reelles Resultat erzielen kann, dass ohne diesen Umweg über \mathbb{C} kaum zu erzielen wäre.

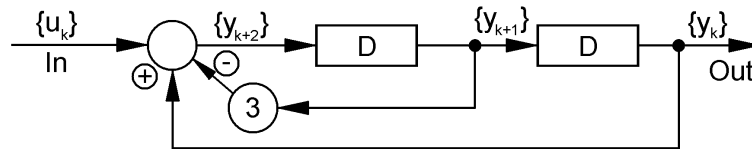
5.3.2 Diskrete lineare Systeme

Diskrete Zeitsysteme

(Statt von **diskreten linearen Systemen** spricht man auch von **diskreten Zeitsystemen**.)

Sei $\{u_k\}$ die Inputfolge und $\{y_k\}$ die Outputfolge eines Systems. Beide Folgen seien Kausalfolgen.

Das System enthalte Verzögerungsblöcke, Subtraktoren (Rückspeisung, auch für die Addition) und Verstärker.



Ein allgemeines Modell eines solchen Systems ist eine **Differenzengleichung der Ordnung n** :

$$E(y, u) \equiv a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + a_{n-2} y_{k+n-2} + \dots + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + b_0 u_k$$

mit $k \geq 0$ (Kausalfolgen), $n \geq m \geq 0$ (Physik), $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ oder $a_i, b_i \in \mathbb{C}$.

Bedingungen: Auch bei den $\{u_k\}$ seien Operationen erlaubt wie bei den $\{y_k\}$ (Zeitverzögerung, Rückspeisung, ...). Beim Start herrsche der Nullzustand (für Zeiten < 0 gibt es keine Werte $\neq 0$).

Definition: Solche Systeme nennen wir **diskrete Zeitsysteme**.

Transformationsverhalten

$$\begin{aligned}
 &\text{Sei } \{y_k\} \circ \bullet X(z), \{u_k\} \circ \bullet U(z) \\
 &\Rightarrow E(y, u) \circ \bullet a_n z^{k+n} \cdot Y + a_{n-1} z^{k+n-1} \cdot Y + a_{n-2} z^{k+n-2} \cdot Y + \dots + a_0 z^k \cdot Y = \\
 &\Rightarrow \underbrace{(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0 z^0) \cdot Y}_{=Q(z) \cdot Y(z)} = \underbrace{(b_m z^{k+m} \cdot Y + b_{m-1} z^{k+m-1} \cdot Y + \dots + b_0 z^k \cdot Y)}_{=P(z) \cdot Y(z)} \\
 &\leadsto Q(z) \cdot Y(z) = P(z) \cdot Y(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot U(z) := G(z) \cdot U(z) \text{ mit } G(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}
 \end{aligned}$$

Definition: $G(z)$ heisst **z-Transferfunktion (Übertragungsfunktion)**.

In dieser Situation können wir zwei verschiedene typische Grundaufgaben formulieren:

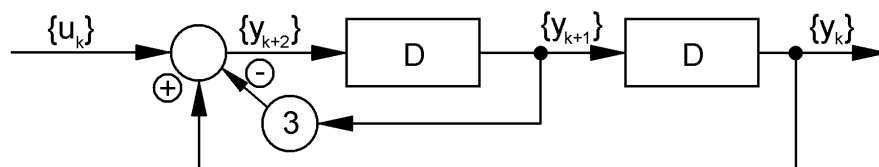
Grundaufgabe 1

Geg.: Differenzgleichung der Ordnung n .

Ges.: Blockdiagramm und Transferfunktion.

Bsp.: $y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k = u_k \Rightarrow y_{k+2} = -3y_{k+1} + y_k + u_k$

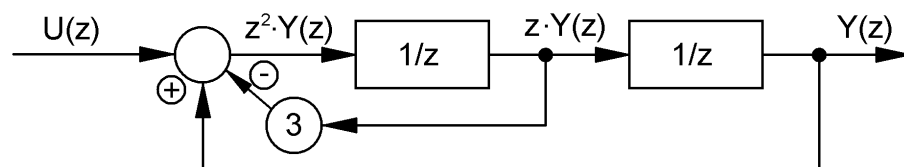
Aus der Differenzgleichung lässt sich zur Zeit k direkt folgendes Diagramm ablesen:



Die Differenzgleichung lässt sich direkt transformieren:

$$\leadsto Y z^2 + 3 Y z - Y = U \Rightarrow (z^2 + 3 z - 1) \cdot Y = U \Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 + 3 z - 1} \text{ (Odnung 2)}$$

Diagramm auf der Bildseite:



Bemerkung:

Das Diagramm auf der Urbildseite und dasjenige auf der Bildseite zeigen verschiedene Darstellungen desselben Input-Output-Systems.

Grundaufgabe 2

Geg.: Transferfunktion.

Ges.: Differenzengleichung und Blockdiagramm.

Bsp.: $G(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}$ (Odnung 2)

$$\Rightarrow (z^2 + 3z + 2) \cdot Y(z) = (z - 1) \cdot U(z) \bullet \circ y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = u_{k+1} - u_k$$

\leadsto **Problem:** Was tun mit $u_{k+1} - u_k$?

Trick: Benutze eine Hilfsfunktion:

$$\frac{1}{z^2 + 3z + 2} := \frac{R(z)}{Q(z)} \Rightarrow U(z) = z^2 \cdot R(z) + 3z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z) \bullet \circ u_k = r_{k+2} + 3r_{k+1} + 2r_k \Rightarrow$$

$$z \cdot U(z) = z \cdot (z^2 \cdot R(z) + 3z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z)) = z^3 \cdot R(z) + 3z^2 \cdot R(z) + 2z \cdot R(z) \bullet \circ u_{k+1} = r_{k+3} + 3r_{k+2} + 2r_{k+1}$$

Die Ausgangsgleichung sieht nun wie folgt aus:

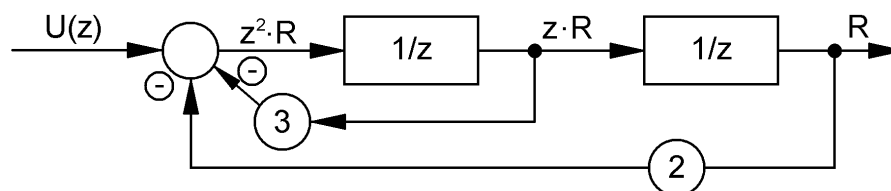
$$(z-1) \cdot U(z) = z \cdot U(z) - U(z) = (z-1)(z^2 \cdot R(z) + 3z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z)) = (zR(z) - R(z))(z^2 + 3z + 2)$$

$$= Y(z)(z^2 + 3z + 2) \Rightarrow Y(z) = z \cdot R(z) - R(z) \bullet \circ y_k = r_{k+1} - r_k$$

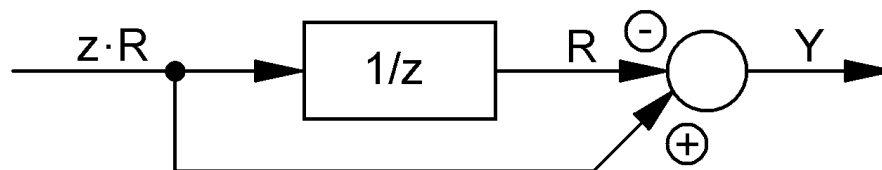
mit $r_k = \mathcal{Z}^{-1}\{R(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{U(z)}{z^2 + 3z + 2}\right\}$

Wir müssen daher zwei Schemata kombinieren:

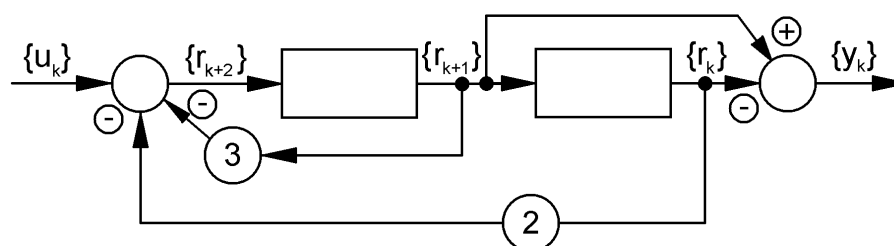
(1) für $U(z) = z^2 \cdot R(z) + 3z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z)$ oder $z^2 \cdot R(z) = U(z) - 3z \cdot R(z) - 2 \cdot R(z)$



(2) für $Y(z) = z \cdot R(z) - R(z)$



(3) Kombination im Urbildbereich:

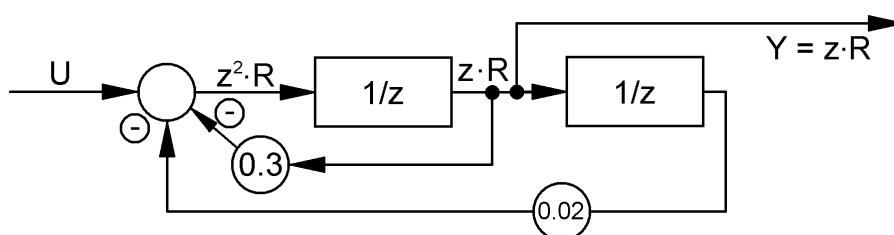


Verschiedene mögliche Blockdiagramme

Bsp.: $G(z) = \frac{z}{z^2 + 0.3z + 0.02} = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow U(z) \cdot z = Y(z) \cdot (z^2 + 0.3z + 0.02)$

Hilfsfunktion: $Y(z) := R(z) \cdot z \Rightarrow U(z) = R(z) (z^2 + 0.3z + 0.02)$

Daraus lässt sich direkt das folgende Schema ableiten (Bildseite):



Entsprechend für $\{u_k\}$ und $\{y_k\}$ auf der Urbildseite. (Das Diagramm kann der Leser jetzt selbst entwerfen.)

Es existiert aber auch ein anderes, **zweites Blockdiagramm** zur gegebenen Transferfunktion. Der Schlüssel dazu liefert die Partialbruchzerlegung der Transferfunktion:

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 0.3z + 0.02} = \frac{z}{(z + 0.2) \cdot (z + 0.1)} = \frac{2}{z + 0.2} - \frac{1}{z + 0.1}$$

$$\Rightarrow Y(z) = G(z) \cdot U(z) = \left(\frac{1}{z + 0.1} - \frac{1}{z + 0.1} \right) \cdot U(z) := \underbrace{A(z) \cdot U(z)}_{=R_1(z)} - \underbrace{B(z) \cdot U(z)}_{=R_2(z)} = R_1(z) - R_2(z)$$

$$\Rightarrow 2U(z) = (z + 0.2)R_1(z), \quad U(z) = (z + 0.1)R_2(z)$$

↪ Diagramm für $R_1(z)$:

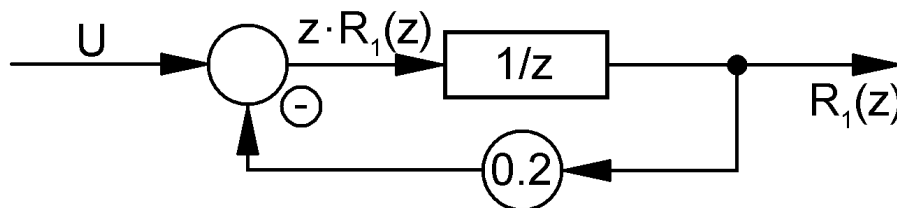
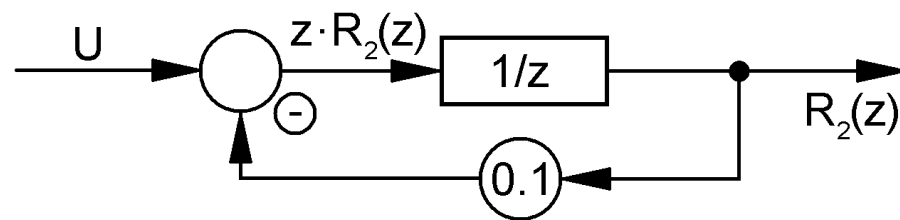
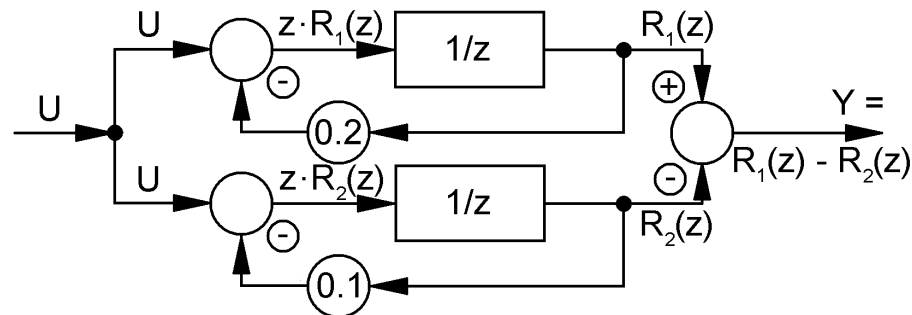


Diagramm für $R_2(z)$:



Kombination im Bildbereich:

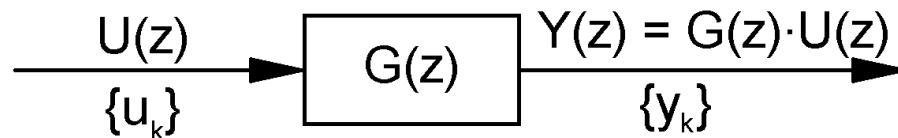


5.3.3 Impuls- und Schrittantwort

Impulsantwort

Betrachte: $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\delta(t)\}$

Definition: $\{\delta_k\}$ heisst **Impulssequenz**



Sei weiter: $U(z) \xrightarrow{G(z)} Y(z)$ resp. $\{u_k\} \xrightarrow{G(z)} \{y_k\}$

Hier wählen wir speziell: $\{u_k\} = \{\delta_k\}$

Weiter schränken wir unsere Betrachtung ein auf Systeme, die sich am Anfang in **Ruhelage** befinden.

In diesem Fall definieren wir:

Definition: Der Output eines solchen Systems $\{y_{\delta_k}\}$ heisst **Impulsantwort des Systems**.

Konsequenz: $\mathcal{Z}\{y_{\delta_k}\} = Y_{\delta}(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z) \cdot 1 = G(z)$

Regel: $\{y_{\delta_k}\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{y_{\delta_k}\} = G(z)$

Die Transferfunktion $G(z)$ ist also die z -Transformierte der Impulsantwort.

Korollar: $Y(z) = G(z) \cdot U(z) = Y_{\delta}(z) \cdot U(z)$

Bsp.:

Geg.: Transferfunktion $G(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2}$

Ges.: Impulsantwort

$$\begin{aligned} \leadsto Y_{\delta}(z) &= G(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{(z+2)(z+1)} \Rightarrow \frac{Y_{\delta}(z)}{z} = \frac{1}{(z+2)(z+1)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} \\ \Rightarrow \{y_{\delta_k}\} &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}\right\} = \{((-1)^k - (-2)^k)\} \text{ für } k \geq 0 \end{aligned}$$

5.3.4 Schrittantwort

Definition: $\{h_k\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$ heisst **Einheitsschrittsequenz**

Definition: Die Antwort des Systems auf die Einheitsschrittsequenz nennen wir **Schrittantwort** des Systems

Bsp.:

Geg.:

Impulsantwortsequenz: $\{y_{\delta_k}\} = \{(a^k - 0.5^k)\}$, $a > 0$

\leadsto Sei (1) $a = 0.4$, (2) $a = 1.2$

Ges.: Schrittantwort des Systems

$$(1) \{y_{\delta_k}\} = \{(0.4^k - 0.5^k)\}, \quad y_{\delta_k} = 0.4^k - 0.5^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$(2) \{y_{\delta_k}\} = \{(1.2^k - 0.5^k)\}, \quad y_{\delta_k} = 1.2^k - 0.5^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty + 0 = \infty$$

$$\text{Transferfunktion: } G(z) = Y_{\delta}(z) = \mathcal{Z}\{(a^k - 0.5^k)\} = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5}$$

$$\text{Bekannt: } \{y_{u_k}\} = \{1, 1, 1, \dots\} \circ \bullet U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\begin{aligned}
\leadsto Y(z) &= G(z) \cdot U(z) = Y_\delta(z) \cdot \frac{z}{z-1} = \left(\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5} \right) \cdot \frac{z}{z-1} \\
\Rightarrow \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{(z-a)(z-1)} - \frac{z}{(z-0.5)(z-1)} = \frac{\frac{a}{a-1}}{z-a} - \frac{1}{z-0.5} - \left(2 + \frac{1}{1-a} \right) \cdot \frac{1}{z-1} \\
\Rightarrow Y(z) &= \frac{a}{a-1} \cdot \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5} + \left(2 + \frac{1}{1-a} \right) \cdot \frac{z}{z-1} \bullet \circ \{y_k\} = \left\{ \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Verhalten für grosse k

$$(1) \quad y_k = \frac{0.4}{0.4-1} \cdot 0.4^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-0.4} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 - 0 + 2 + \frac{1}{1-0.4} = 2 + \frac{1}{0.6} = 3.\bar{6} \dots \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad y_k = \frac{1.2}{1.2-1} \cdot 1.2^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-1.2} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty - 0 + 2 + \frac{1}{1-1.2} = \infty$$

$$(3) \quad -1 < a < 1 \leadsto y_k = \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 - 0 + \left(2 + \frac{1}{1-a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$(4) \quad 1 < a \leadsto y_k = \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty - 0 + \left(2 + \frac{1}{1-a} \right) = \infty$$

$$(5) \quad a < -1 \leadsto y_k = \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pm? \infty - 0 + \left(2 + \frac{1}{1-a} \right) = \pm? \infty$$

(alternierend gegen $\pm \infty$)

$$(6) \quad a = -1 \leadsto y_k = \frac{-1}{-1-1} \cdot (-1)^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-(-1)} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2 \text{ oder } 3$$

2 HP(2 Häufungspunkte)

$$(7) \quad a = 1 \leadsto y_k = \frac{1}{1-1} \cdot 1^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-1} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} ?$$

$\frac{1}{1-1}$ ist nicht definiert ...

Konsequenz: Die Folge $\{y_k\}$ zeigt alle Arten von Verhalten, je nach der Grösse von a .

Wir haben hier die Problematik der Stabilität. Bei kontinuierlichen Systemen (vgl. Laplace-Transformationen, Seite 146, 82) hiess ein System **stabil**, falls für die Impulsantwort gilt:

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \text{const.} \neq \pm \infty$. Diese **Definition** wollen wir **für diskrete Systeme übernehmen**.

5.4 Stabilität

5.4.1 Der Begriff

Definition:

Eine Lösung einer Differenzengleichung eines mittels Impulssequenz kurz angeregten Systems heisst:

$$1. \text{ **stabil** } \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = c, \quad |y_k| < k \in \mathbb{R}$$

$$2. \text{ **marginal stabil (halbstabil)** } \\ \Leftrightarrow \forall_{k \in \mathbb{N}_0} y_k \in [c_1, c_2], \quad |y_k| < k \in \mathbb{R}$$

3. **instabil** in allen andern Fällen

Sei $G(z)$ die Transferfunktion eines diskreten linearen Systems. Wir betrachten:

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Z.B. könnte $G(z)$ gekürzt wie folgt sein:

$$G(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2}$$

\leadsto Theoretisch existiert eine Partialbruchzerlegung immer, obwohl man sie praktisch nicht immer exakt auffinden kann. $G(z)$ hat hier Pole resp. Nullstellen von $Q(z)$ bei $z_1 = -1$, $z_2 = -2$.

Als Beispiel studieren wir:

$$X(z) = \frac{b}{z-\alpha}, \quad \alpha \text{ Pol von } G(z)$$

$$\leadsto X(z) = \frac{b}{z-\alpha} = \frac{1}{z} \cdot b \cdot \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{z} \cdot b \cdot \mathcal{Z}\{\alpha^k\} = \frac{1}{z} \cdot b \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} = b \cdot \mathcal{Z}\{x_{k-1}\} \bullet \circ b \cdot \{(\alpha^{k-1})\} = \{(b \cdot \alpha^{k-1})\}$$

Konsequenz: In solchen Situationen, wie in der hier gezeigten, sind also die Pole von $G(z)$ resp. die Nullstellen von $Q(z)$ auch die Basen der rücktransformierten Folge $b \cdot \{(\alpha^{k-1})\}$. ($\alpha \in \mathbb{C}$)

Folgerung:

$b \cdot \{(\alpha^{k-1})\}$ verhält sich **stabil** für $|\alpha| < 1$ und für $\alpha = 1$. Die Folge „explodiert“ für $|\alpha| > 1$ (ev. alternierend u.s.w.). Die Folge alterniert für $\alpha = -1$. Entsprechend wandert sie für $|\alpha| = 1$, $\alpha \neq 1, -1$.

5.4.2 Stabilitätskriterium

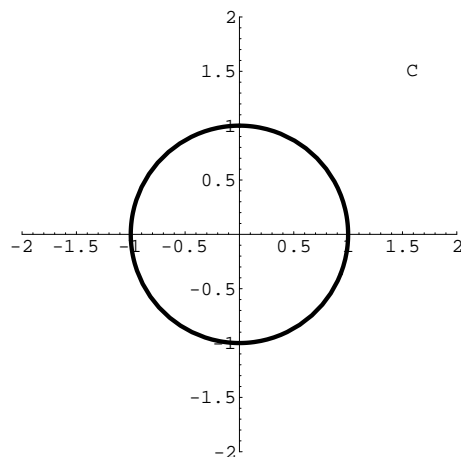
Allgemein hängt also das Stabilitätsverhalten von den $n(= \text{pgrad}(Q))$ Wurzeln der Gleichung $Q(z) = 0$ ab, $z_s = \alpha_s \in \mathbb{C}$, $s = 1, 2, \dots, n$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt: $Q(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$, $\alpha_s = r_s \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

Die Pole α_s tauchen dann wieder auf in den Termen $b_s \mathcal{Z}_s\{x_{s,k-1}\} \bullet \circ b_s \alpha_s^{k-1}$. Entsprechend argumentiert man bei mehrfachen Nullstellen resp. Pole höherer Ordnung bei $\frac{1}{(z-\alpha)^n}$ (vgl. Seite 135).

Sei $\alpha_s^{k-1} = r_s^{k-1} e^{i\varphi_s(k-1)}$, $r_s \in \mathbb{R}_0^+$

Sei $r_s < 1 \Rightarrow \alpha_s^{k-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$



Folgerung:**Vor.:**

$\{\alpha_s \mid s = 1, 2, \dots, n\}$ Pole der Transferfunktion $G(s)$.
 $\alpha_s = r_s \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}, \quad r_s \in \mathbb{R}_0^+, \quad s = 1, 2, \dots, n$

Beh.:

1. $\forall_s : r_s < 1 \leadsto$ Lineares System mit konstanten Koeffizienten stabil.
 Ebenso hat man Stabilität, wenn 1 einfache Nullstelle ist.
2. Gibt es sonst einen oder mehrere Pole, die auf dem Rand des Einheitskreises liegen, während die andern jedoch innerhalb des Kreises zu finden sind, so ist das System marginal stabil.
3. Befindet sich nur ein Pol ausserhalb des Kreisrandes, so ist das System instabil, d.h. es „explodiert“.

1. Beispiel: $G(z) = \frac{1}{z + 0.25}, \quad \alpha = -0.25, \quad |\alpha| < 1 \leadsto \text{stabil}$

2. Beispiel: $G(z) = \frac{z^2}{z^3 - 3z^2 + 2.5z - 1} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z) = (z - 2)(z - 0.5(1 + i))$
 $\Rightarrow \alpha_1 = 2 > 1 \leadsto \text{instabil}$

5.4.3 Stabilitätskriterium

Problem: Gesucht sind somit Methoden um festzustellen, wo die Nullstellen von $Q(z)$ bezüglich des Einheitskreises liegen.

Möglichkeiten:

1. Sei $f(x, y) = |Q(z)|^2 = Q(z) \cdot \overline{Q(z)} = Q(z) \cdot Q(\bar{z}) \geq 0, \quad z = x + iy$

f ist eine reelle Funktion von x und y .

$$f(x, y) = |Q(z)|^2 \geq 0 \leadsto Q(z) = Q(\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) \rightarrow \text{Min}$$

Man muss somit die Nullstellen oder die Minima von $f(x, y)$ suchen.

Man hat hier somit die Möglichkeit, das Problem der Nullstellen oder der Minima mit Hilfe der Differentialrechnung oder numerischer Algorithmen für das Auffinden von Nullstellen klassisch im Reellen zu behandeln.

2. $Q(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n) = a_n(z^n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)z^{n-1} + \dots \pm \alpha_1 \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n)$
 $= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ (Fundamentalsatz der Algebra)

$$\leadsto \frac{a_0}{a_n} = \pm \alpha_1 \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n, \quad \left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |\alpha_1| |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$$

Ist nun $\left|\frac{a_0}{a_n}\right| > 1$, so ist im Produkt $|\alpha_1| |\alpha_2| \cdots |\alpha_n|$ mindestens ein Faktor grösser als 1, d.h. man hat **Instabilität**.

3. Es gilt das **Jury–Stabilitätskriterium**. Dabei handelt es sich um ein längeres Rezept, vgl. dazu die Literatur (z.B. Glyn James, Advanced Modern Engineering Math., p. 260 ff)

5.5 Faltung, Konvolution

5.5.1 Die Idee

Wir stellen die Frage nach der Verallgemeinerung des nachfolgenden Zusammenhangs:

$$Y(z) = Y_\delta(z) = Y_\delta(z) \cdot 1 = G(z) \cdot 1$$

Allgemeiner: $Y(z) = G(z) \cdot U(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z)$, $U(z) \bullet \circ \{u_k\}$ Vdist
Dabei gilt für die Inputfolge $\{u_k\}$:

$$\{u_k\} = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots\} = u_0 \{\delta_k\} + u_1 \{\delta_{k-1}\} + u_2 \{\delta_{k-2}\} + \dots + u_n \{\delta_{k-n}\} + \dots \text{ mit}$$

$$\{\delta_k\} = \{\delta_{k-(0)}\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}, \quad \{\delta_{k-(1)}\} = \{0, 1, 0, 0, \dots\}, \quad \{\delta_{k-(2)}\} = \{0, 0, 1, 0, \dots\}$$

$$\delta_{k-(j)} : = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

Z.B. ist daher $\delta_{k-(n)} = 1$ für $k = n$ und $= 0$ sonst. Bei $\delta_{k-(n)} = 1$ handelt es sich also um eine verschobene Impulssequenz nach $k = j$. Demnach haben wir die Eingangsfolge $\{u_k\}$ in eine gewichtete Summe von verschobenen Inputfolgen zerlegt.

Sei das System beim Start in Ruhe. Wegen der Linearität gilt:

Folgerung: Die Systemantwort $\{y_k\}$ ist eine gewichtete Summe von verschobenen Impulsantworten.

Daher gelten die folgenden Zuordnungen:

$$\begin{array}{ll} \{\delta_k\} & \circ \bullet \quad \mathcal{Z}\{\delta_k\} = \{y_{\delta_k}\}, \\ \delta_{k-(j)} & \circ \bullet \quad \mathcal{Z}\{\delta_{k-(j)}\} = \{y_{\delta_{k-(j)}}\}, \\ u_j \cdot \delta_{k-(j)} & \circ \bullet \quad \mathcal{Z}\{u_j \cdot \delta_{k-(j)}\} = u_j \cdot \{y_{\delta_{k-(j)}}\}, \\ \{u_j\} & \circ \bullet \quad \mathcal{Z}\{\delta_k\} = \{y_k\}, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \{y_k\} &= \sum_{j=1}^{\infty} u_j \cdot \{y_{\delta_{k-(j)}}\} = u_0 \cdot \{y_{\delta_k}\}_{k=0}^{\infty} + u_1 \cdot \{y_{\delta_{k-(1)}}\}_{k=0}^{\infty} + u_2 \cdot \{y_{\delta_{k-(2)}}\}_{k=0}^{\infty} + \dots \\ &= u_0 \cdot \{y_{\delta_{0-(0)}}, y_{\delta_{1-(0)}}, y_{\delta_{2-(0)}}, \dots, y_{\delta_{n-(0)}}, \dots\} + \\ &\quad u_1 \cdot \{0, y_{\delta_{1-(1)}}, y_{\delta_{2-(1)}}, \dots, y_{\delta_{n-(1)}}, \dots\} + \dots \\ &\quad + \dots + \\ &\quad u_0 \cdot \{0, 0, 0, \dots, \underbrace{y_{\delta_{n-(n)}}, y_{\delta_{n+1-(n)}}, \dots}_{\uparrow \leadsto y_n}, \dots\} + \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

$$\leadsto y_n = \sum_{j=0}^n u_j y_{\delta_{n-(j)}}$$

(Spaltenweise Addition im vorherigen Schema!)

$$\leadsto \{y_k\} = M \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}}$$

Definition: Die obige Summe $\{y_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}} \right\}$ heisst **Faltungssumme**.

Symbol: Sei $y_{\delta_{k-(j)}} := v_{k-j} \Rightarrow \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}} \right\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j} \right\} := \{u_k\} * \{v_k\}$

Bsp.: **Geg.:** $G(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$

Ges.: Schrittantwort

(A) Direkte Rechnung:

$$\begin{aligned} \{h_k\} &= \{1, 1, 1, \dots\} \Rightarrow Y(z) = G(z) \cdot \mathcal{Z}\{h_k\} = Y_\delta(z) \cdot \mathcal{Z}\{h_k\} \\ a &= 1 \Rightarrow a^k = 1^k = 1 \Rightarrow \mathcal{Z}\{h_k\} = \frac{z}{z-1} \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{z}{z + \frac{1}{2}} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z-1} \bullet \circ \{y_k\} = \left\{ \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{3} \cdot 1^k \right\} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} \end{aligned}$$

(B) Indirekte Rechnung:

$$\begin{aligned} \{y_{\delta_k}\} &= \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z + \frac{1}{2}}\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\} \\ \Rightarrow \{y_k\} &= \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}} \right\} \stackrel{u_j=1}{=} \left\{ \sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-j} \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{-j} \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^k (-2)^j \right\} = \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1 - (-2)^{k+1}}{1 - (-2)} \right\} = \left\{ \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (1 - (-2)^{k+1}) \right\} = \left\{ \frac{1}{3} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k - (-2)^k \right) \right\} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} \end{aligned}$$

Verallgemeinerung:

$$\text{Sei } Y(z) = G(z) \cdot U(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z), \quad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} = u_0 + \frac{u_1}{z} + \frac{u_2}{z^2} + \frac{u_3}{z^3} + \dots$$

$$Y_\delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{\delta_k} z^{-k} = y_{\delta_0} + \frac{y_{\delta_1}}{z} + \frac{y_{\delta_2}}{z^2} + \frac{y_{\delta_3}}{z^3} + \dots$$

$$\Rightarrow Y(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z) = u_0 y_{\delta_0} + (u_0 y_{\delta_1} + u_1 y_{\delta_0}) \cdot \frac{1}{z} + (u_0 y_{\delta_2} + u_1 y_{\delta_1} + u_2 y_{\delta_0}) \cdot \frac{1}{z^2} + \dots := \sum_{k=0}^{\infty} t_k \cdot \frac{1}{z^k}$$

$$t_k = \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-j}} \Rightarrow Y(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z) \bullet \circ \{y_k\} = \{t_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-j}} \right\}$$

Regel:

Vor.:

Sei

$$v_k = y_{\delta_k}, \quad \mathcal{Z}\{u_k\} = U(z), \quad \mathcal{Z}\{v_k\} = V(z)$$

Beh.:

$$U(z) \cdot V(z) = \mathcal{Z}\left\{ \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j} \right\} = \mathcal{Z}\{ \{u_k\} * \{v_k\} \}$$

Bemerkung: Es gilt:

$$\mathcal{Z}\{\{u_k\} * \{v_k\}\} = U(z) \cdot V(z) = V(z) \cdot U(z) = \mathcal{Z}\{\{v_k\} * \{u_k\}\} \Rightarrow \{u_k\} * \{v_k\} = \{v_k\} * \{u_k\}$$

Der Faltungsprozess ist also kommutativ!

Korollar:
$$\{u_k\} * \{v_k\} = \{v_k\} * \{u_k\}$$

5.6 Laplace- und z-Transformation

Wir wollen hier den Zusammenhang zwischen Laplace- und z-Transformation klären.

Wir betrachten die Folge: $\{f(nT)\} = \{f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots\}$

Wir können diese Folge aus $f(t)$ an den Stellen $t = n \cdot T$ gewinnen, indem wir die folgende „Ausblende-funktion“ (Distribution!) verwenden:

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &:= \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT) \\ \Rightarrow \hat{f}(nT) &= f(nT) \cdot \delta(nT - nT) = f(nT) \cdot \delta(0), \quad \hat{f}(t) = 0 \quad \text{für } t \neq nT, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

\leadsto Laplace-Transformation:

$$\mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - nT) dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-s nT} \delta(t - nT)$$

Sei $z := e^{+sT} \in \mathbb{C}$ mit $s \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \delta(t - nT) := F(z)$

Für $k = n$ wird damit: $\underbrace{\mathcal{Z}\{f(kT)\}}_{:=a_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(kT)}{z^k} = F(z) = \mathcal{L}\{\hat{f}(t)\}$

Konsequenz:

Vor.:

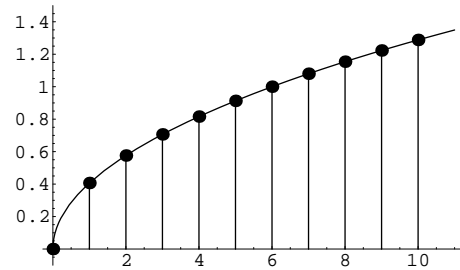
$$\hat{f}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT), \quad z := e^{+sT}, \quad s := \frac{\ln(z)}{T}$$

Beh.:

Die z-Transformierte von $\{f(kT)\}$ ist also die Laplace-Transformierte von $\hat{f}(t)$.

Bemerkung:

$f(kT)$ beschreibt hier eine Messreihe mit fixen Zeitabständen T .



5.7 Ingenieur Anwendungen

Vgl. Literatur: Glyn James, Advanced Modern Engineering Mathematics, Addison Wesley, p. 268 ff.

Kapitel • Chapitre 6

Vektoranalysis

6.1 Grundlagen

6.1.1 Einführung

Die Vektoranalysis stellt Begriffe und Sätze zur Verfügung, die das Fundament zur Formulierung vieler physikalischer Aussagen bilden. Ohne sie kommt man z.B. in den folgenden Gebieten nicht über anspruchsvolle Grundlagen hinaus: Mechanik, Elektrostatik- und Dynamik, Wärmelehre u.s.w..

6.1.2 Operatoren auf Skalar- und Vektorfunktionen

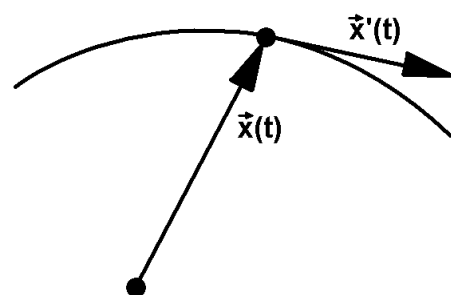
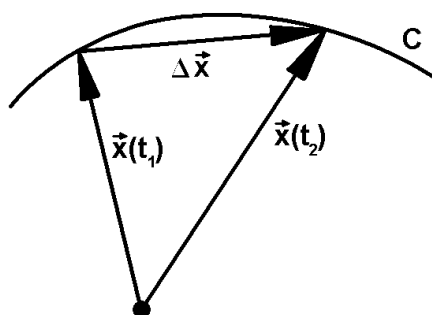
Beispiel Differentialoperator

Vom Analysis-Kurs sowie von z.B. den Laplace-Transformationen her kennen wir bereits Differentialoperatoren und Integraloperatoren. Als Beispiel eines solchen Operators betrachten wir:

$$\frac{d}{dt} : \vec{x}(t) \mapsto \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} \cdot \vec{e}_1 + \dots + \frac{dx_n(t)}{dt} \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

Wenn $\vec{x}(t)$ die Bahn eines Massepunktes bedeutet, so bedeutet $\vec{x}'(t)$ den Tangentenvektor resp. den Geschwindigkeitsvektor.

$$\vec{x}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$



Wir verwenden die folgende Definition:

Definition:

- (1) $\vec{x}(t)$ diff'bar $\Leftrightarrow \forall_i x_i(t)$ diff'bar
- (2) $\vec{x}(t)$ stetig $\Leftrightarrow \forall_i x_i(t)$ stetig

Differentiationsregeln

Zur Vereinfachung kürzen wir die Symbole im Folgenden etwas ab:

Symbol: $\vec{x}(t) := \vec{x}, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \cdot \vec{y} := \vec{x} \bullet \vec{y}$

($\vec{x}^T \cdot \vec{y}$ ist das Matrixprodukt.)

Regeln:

1. $(\vec{x} + \vec{y})' = \vec{x}' + \vec{y}'$
2. $(\vec{x} \bullet \vec{y})' = \vec{x}' \bullet \vec{y} + \vec{x} \bullet \vec{y}'$
3. $(\vec{x} \times \vec{y})' = \vec{x}' \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}'$
4. $(f(t) \cdot \vec{x})' = f(t)' \cdot \vec{x} + f(t) \cdot \vec{x}'$
5. $(\vec{x} \bullet (\vec{y} \times \vec{z}))' = (\vec{x}' \bullet (\vec{y} \times \vec{z})) + (\vec{x} \bullet (\vec{y}' \times \vec{z})) + (\vec{x} \bullet (\vec{y} \times \vec{z}'))$
6. $(\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}))' = (\vec{x}' \times (\vec{y} \times \vec{z})) + (\vec{x} \times (\vec{y}' \times \vec{z})) + (\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}'))$

Bemerkung:

Bei (5) handelt es sich um das Spatprodukt (Determinante) und bei (6) um das Grassmannprodukt. Die Verifikation der Regeln ist elementar und geschieht durch Nachrechnung. (Z.B. mit Mathematica ...)

Differentiale von Vektorfunktionen

Differentiale von Vektorfunktionen definieren wir wie folgt:

Definition:

$$\begin{aligned} \text{Sei } \vec{x} &= x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n \rightsquigarrow d\vec{x} := dx_1 \vec{e}_1 + \dots + dx_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \\ \text{Sei } \vec{v} &= \vec{v}(x_1, \dots, x_n) = v_1(x_1, \dots, x_n) \vec{e}_1 + \dots + v_m(x_1, \dots, x_n) \vec{e}_m = \begin{pmatrix} v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow d\vec{v} &:= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_n} dx_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial v_1}{\partial x_n} dx_n \\ \vdots \\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial v_m}{\partial x_n} dx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dv_1 \\ \vdots \\ dv_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach den bekannten Regeln über Differentiale gilt:

Regeln:

1. $df = f'_{x_1} dx_1 + \dots + f'_{x_n} dx_n = \text{grad } f \bullet d\vec{x}$
2. $d(\vec{u} + \vec{v}) = d\vec{u} + d\vec{v}$
3. $d(\vec{u} \bullet \vec{v}) = \vec{u} \bullet d\vec{v} + \vec{v} \bullet d\vec{u}$
4. $d(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times d\vec{v} + \vec{v} \times d\vec{u}$

6.2 Felder

6.2.1 Der Feldbegriff

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $P = P(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_n) \in V$

Z.B. spez. $n = 3$, $P = P(x, y, z)$

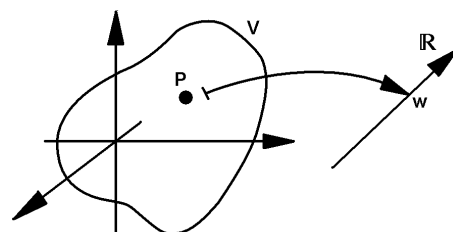
Sei φ eine Funktion: $\varphi : V \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_n)$

Definition:

Eine solche im allgemeinen stetig differenzierbare Funktion φ heisst **Skalarfeld**.

Sei $n = 3$

Durch ein Skalarfeld φ wird also z.B. jedem Punkt $P(x, y, z) \in V$ ein Wert $w = \varphi(x, y, z)$ zugeordnet.



Bemerkung:

Bei den Skalarfeldern spielen die bekannten Begriffe **Niveaulinie**, **Niveaufläche**, **Niveauperfläche** eine Rolle. (Z.B. $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$)

Entsprechend sei $\vec{\Phi}$ eine Vektorfunktion: $\vec{\Phi} : V \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{\Phi} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \vec{\Phi}(x_1, \dots, x_n) :=$

$$\vec{u}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

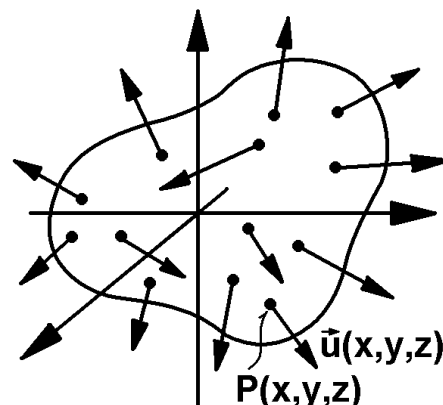
Z.B. spez. $n = 3$, $P = P(x, y, z)$, $\vec{\Phi} : (x, y, z) \mapsto \vec{\Phi}(x, y, z) := \vec{u}(x, y, z)$

Definition:

Eine solche im allgemeinen stetig differenzierbare Funktion Φ heisst **Vektorfeld**.

Sei $n = 3$

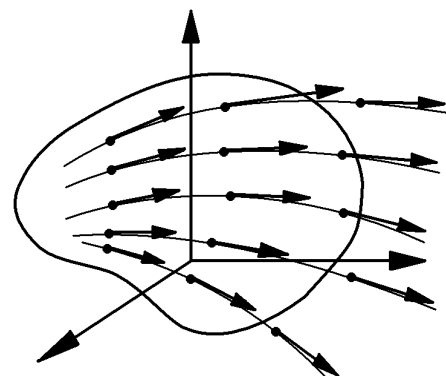
Durch ein Vektorfeld Φ wird also z.B. jedem Punkt $P(x, y, z) \in V$ ein Vektor $\vec{u} = \Phi(x, y, z) \in \mathbb{R}^m$ zugeordnet.



Nun kommen wir zu einem anschaulichen Begriff, dessen exakte Definition hier nicht gleich gegeben werden soll. (Wieso wir auf diese verzichten, werden wir bald merken.)

Begriff:

Eine **Feldlinie** ist eine gedachte Linie in einem Vektorfeld entlang den Vektoren $\vec{u}(x_1, \dots, x_n)$, die dann Tangentenvektoren an diese Linie sind.



Da mit den Tangentenvektoren Ableitungen erster Ordnung im Spiel sind, müssen sich die Feldlinien als Lösungskurven von Differentialgleichungssystemen finden und definieren lassen, analog den uns bekannten Integralkurven im Richtungsfelde einer D'Gl erster Ordnung. Auf die exakte Fassung wollen wir hier verzichten.

6.2.2 Feldtypen

Begriffe:

Stationäre Felder sind zeitunabhängig. Z.B.: $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z), \quad \vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}(x, y, z)$

Instationäre Felder sind zeitabhängig. Z.B.: $\exists_{t_1, t_2, x, y, z} : \varphi(x, y, z, t_1) \neq \varphi(x, y, z, t_2)$

Homogene Felder sind ortsunabhängig. Z.B.: $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(t)$

Zentralfelder sind nur von der Distanz zu einem Zentrum abhängig. Z.B.: $\varphi(x, y, z,) = \tilde{\varphi}(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Beispiele:

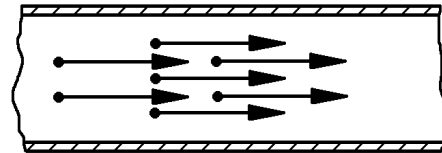
Skalarfelder: Temperatur(x, y, z, t), Dichte(x, y, z) u.s.w..

Vektorfelder: Elektrisches Feld \vec{E} , magnetisches Feld $\vec{\Phi}$, Kraftfeld \vec{F} , Geschwindigkeitsfeld \vec{v} , u.s.w..

1. Beispiel:

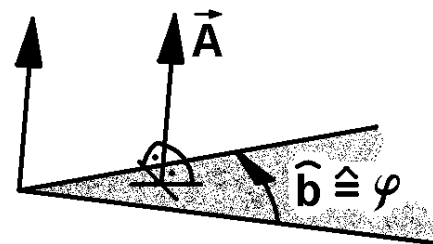
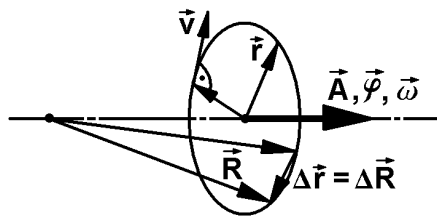
Geschwindigkeitsfeld eines Gases in einer Röhre.

$\vec{v} = \text{const.} \rightsquigarrow \sim$ homogen



2. Beispiel:

Geschwindigkeitsfeld bei einer Drehbewegung um eine Achse. (Der Winkel ist ein durch zwei Geraden aus einer Ebene ausgeschnittenes Flächenstück. Die Fläche wird durch einen Vektor dargestellt, somit auch der Winkel. Die Winkelgeschwindigkeit ist ein Vektor mit gleicher Richtung, weil die Zeit ein Skalar ist.)



$$\rightsquigarrow \Delta \vec{R} = \Delta \vec{r}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \perp \vec{r}, \quad \vec{v}, \vec{r} \perp \vec{A} \parallel \vec{\varphi} \Rightarrow \vec{v}, \vec{r} \perp \vec{\varphi} \rightsquigarrow \vec{v} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

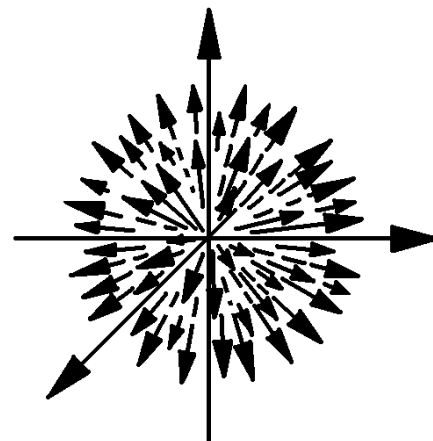
2. Beispiel:

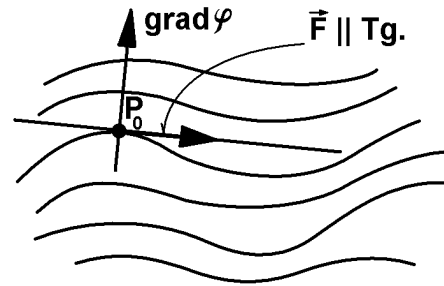
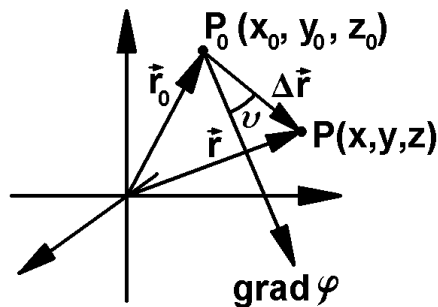
Coulombfeld (Zentralfeld):

$$\vec{F} = c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{e}_r = c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^3} \cdot \vec{r} = E(\vec{r}) \cdot q,$$

$$E(\vec{r}) = c \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$\rightsquigarrow E(\vec{r}) = \begin{pmatrix} c \cdot Q \cdot x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ c \cdot Q \cdot y \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ c \cdot Q \cdot z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$





Beim Gravitationsfeld sieht die Sache ähnlich aus:

$$\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_r = \vec{g}(\vec{r}) \cdot m = \vec{g} \cdot m, \quad \vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

6.3 Gradient, Divergenz, Rotation

6.3.1 Laplace- und Nabla-Operator

Bemerkung:

In der nachfolgenden Betrachtung beziehen wir uns immer auf den \mathbb{R}^3 . Im \mathbb{R}^n ist eine entsprechende Anpassung zu vollziehen. Wir definieren vorerst zwei wichtige Differentialoperatoren:

Definition:

$$\nabla := \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

heisst **Nabla-** oder **Hamiltonoperator**

Mit dem Nabla-Operator lassen sich die wichtigen Begriffe **Gradient**, **Divergenz** und **Rotation** definieren.

6.3.2 Definition von grad, div und rot

Definition:

$$\Delta := \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

heisst **Laplaceoperator**

Vom Analysis-Kurs her kennen wir bereits den Gradienten. Wir wiederholen hier die Definition. Sei $\varphi(x, y, z)$ ein diff'bares Skalarfeld. Dann gilt:

Definition:

$$\text{grad}(\varphi) = \text{grad } \varphi := \nabla \varphi = \vec{e}_1 \varphi'_x + \vec{e}_2 \varphi'_y + \vec{e}_3 \varphi'_z = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix}$$

heisst **Gradient** von φ

Bemerkung:

∇ macht aus einem Skalarfeld φ ein Vektorfeld $\text{grad } \varphi$.

Definition: $P(x, y, z)$ heisst **stationärer Punkt**, wenn gilt:

$$\operatorname{grad} \varphi(x, y, z) = \vec{0}$$

Sei $\vec{u}(x, y, z)$ ein diff'bares Vektorfeld.**Definition:**

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &:= \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ &= (u_1)'_x + (u_2)'_y + (u_3)'_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

heisst **Divergenz** von \vec{u} **Bemerkung:** $(\nabla \cdot)$ macht aus einem Vektorfeld \vec{u} ein Skalarfeld $\operatorname{div} \vec{u} \in \mathbb{R}^1$.Sei wieder $\vec{u}(x, y, z)$ ein diff'bares Vektorfeld.**Definition:**

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{u} &:= \nabla \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \frac{\partial}{\partial x} & u_1 \\ \vec{e}_2 & \frac{\partial}{\partial y} & u_2 \\ \vec{e}_3 & \frac{\partial}{\partial z} & u_3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1 ((u_3)'_y - (u_2)'_z) + \vec{e}_2 ((u_1)'_z - (u_3)'_x) + \vec{e}_3 ((u_2)'_x - (u_1)'_y) \end{aligned}$$

heisst **Rotation**⁸ von \vec{u} **Bemerkung:** $(\nabla \times)$ macht aus einem Vektorfeld \vec{u} ein Vektorfeld $\operatorname{rot} \vec{u}$.

6.3.3 Formeln mit grad, div und rot

Die folgenden Formeln ergeben sich durch koordinatenweisen Vergleich der Ausdrücke links und rechts der Gleichheitszeichen (einfache Rechnungen, z.B. möglich mit Mathematica, Übung für den Leser).

Formeln:**Vor.:**

Seien die verwendeten Funktionen genügend oft stetig diff'bar.

Beh.:

$$\operatorname{grad}(\lambda \varphi + \mu \psi) = \lambda \operatorname{grad} \varphi + \mu \operatorname{grad} \psi \quad (6.1)$$

⁸engl. curl

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \operatorname{div} \vec{a} + \mu \operatorname{div} \vec{b} \quad (6.2)$$

$$\operatorname{rot}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \operatorname{rot} \vec{a} + \mu \operatorname{rot} \vec{b} \quad (6.3)$$

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{a}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{a} + \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{a} \quad (6.4)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \cdot \vec{a}) = (\operatorname{grad} \varphi) \times \vec{a} + \varphi \cdot \operatorname{Rot} \vec{a} \quad (6.5)$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b} \quad (6.6)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \cdot \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (6.7)$$

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \operatorname{rot} \vec{a} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (6.8)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi \quad (6.9)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \vec{0} \quad (6.10)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = 0 \quad (6.11)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{a}) \quad (6.12)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a} \quad (6.13)$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{a}) \quad (6.14)$$

$$\vdots = \vdots$$

Bemerkung:

Die drei ersten Formeln besagen, dass grad , div und rot lineare Operatoren sind.

6.3.4 Bedeutung von grad , div und rot

Der Gradient

Die Bedeutung des Gradienten haben wir am Beispiel einer Funktion auf dem \mathbb{R}^2 bereits im Analysis-Kurs untersucht. Wir haben dort herausgefunden, dass der Gradient eine Vektorfunktion ist, die in der Grundebene (Urbildmenge) senkrecht auf den Niveaulinien steht, „hangaufwärts“ zeigt und dessen Länge die maximale Tangentensteigung (Richtungsableitung) im jeweiligen Punkt bedeutet. Entsprechendes gilt für Funktionen im \mathbb{R}^n .

Dabei war:

Definition:

$(\operatorname{grad} \varphi \mathbb{C} \vec{e}_{\vec{r}})|_{P=P_0}$ heisst **Richtungsableitung** von φ in P_0 in Richtung \vec{r} .

Satz:

Vor.:

Sei C Niveaulinie resp. Niveaufläche resp. Niveauhyperebene.

Beh.:

1. $\operatorname{grad} \varphi \perp C$
2. $|\operatorname{grad} \varphi| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{\max} \geq \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|$
3. $\operatorname{grad} \varphi \parallel \vec{r} \Rightarrow |\operatorname{grad} \varphi| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|$

Bsp.: $\varphi(x, y) = x \cdot y \Rightarrow C : x \cdot y = \text{const.} = k, y = \frac{k}{x} (x \neq 0)$

$\leadsto C : \text{Hyperbeln!} \quad \text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Stationärer Punkt: $\text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \leadsto \vec{r} = \vec{0}$

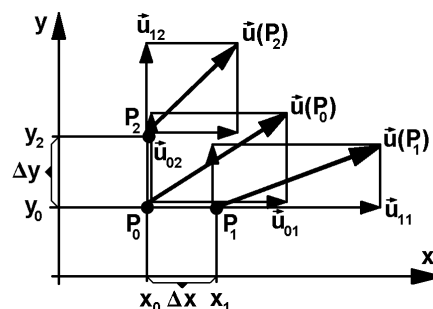
Die Divergenz

Mit unseren momentanen Kenntnissen ist die Erklärung der Divergenz nur rudimentär möglich. Später werden wir zeigen, dass die Divergenz die Bedeutung einer **Quellstärke** hat. Um diesen Begriff zu erläutern, müssen wir uns aber erst bis zum Divergenzsatz von Gauss vorarbeiten. Für den Moment wollen wir uns mit der folgenden Version begnügen:

Sei $\text{div } \vec{u} = (u_1)'_x + (u_2)'_y + (u_3)'_z$

$$(u_1)'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (u_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u_1(x_0, y_0, z_0))$$

$\leadsto (u_1)'_x$ beschreibt das Wachstum von \vec{u} in x -Richtung.



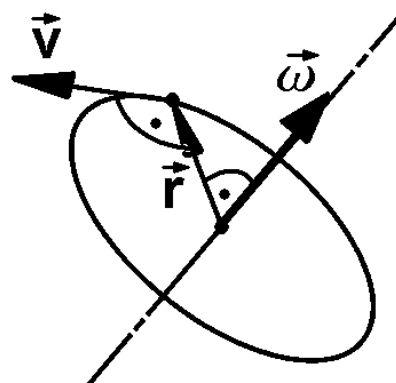
Entsprechend beschreibt $(u_2)'_y$ das Wachstum von \vec{u} in y -Richtung, $(u_3)'_z$ das Wachstum von \vec{u} in z -Richtung.

\leadsto Die Divergenz gibt ein Mass für die Stärke des Wachstums der Komponenten in die jeweilige Richtung dieser Komponenten.

Sei z.B. P_2 ein Punkt, der aus P_1 durch Wachstum aller Koordinaten entsteht. Wächst z.B. bei diesem Übergang von P_1 zu P_2 im betrachteten Falle u_1 nur in x -Richtung, u_2 nur in y -Richtung und u_3 nur in z -Richtung, so wächst also jede Komponente von \vec{u} nur in der ihr entsprechenden Richtung in der Urbildmenge. Die Komponenten haben daher die Tendenz, bei diesem Übergang von P_1 nach P_2 auseinanderzustreben, d.h. zu „divergieren“. (Vgl. Skizze.)

Die Rotation

Es ist sinnvoll, die Rotation an einem Beispiel zu erklären. Wir wählen das Geschwindigkeitsfeld bei einer Drehbewegung eines Massepunktes um eine Axe.

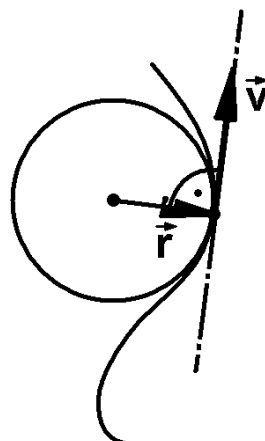


Sei \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor. Aus der Physik wissen wir:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 + \omega_1 \\ \omega_2 + \omega_2 \\ \omega_3 + \omega_3 \end{pmatrix} = 2\vec{\omega} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$$

Betrachten wir allgemein \vec{v} längs einer Feldlinie, so kann man sich \vec{v} lokal als Geschwindigkeitsvektor bei der Rotation um den Krümmungskreismittelpunkt vorstellen. $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}$ ist dann in erster Näherung die lokale Winkelgeschwindigkeit dieser gedachten Rotationsbewegung.



On peut s'imaginer \vec{v} localement comme vecteur de vitesse d'une rotation autour du centre du cercle de courbure. $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}$ est donc dans la première approximation la vitesse d'angle locale de ce mouvement de rotation imaginaire.

6.4 Konservative Felder

6.4.1 Linienintegrale von Vektorfunktionen

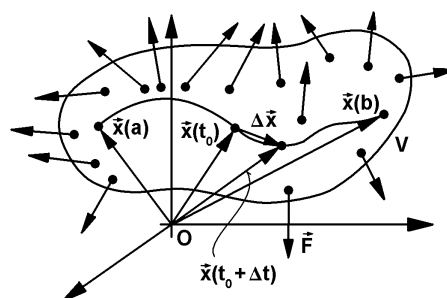
Begriff

Linienintegrale oder **Kurvenintegrale** sind uns vom Analysis-Kurs her bekannt. Da wir uns jetzt mit solchen Integralen beschäftigen werden, wollen wir das für uns Wesentliche nochmals darstellen.

Gegeben sei eine Kurve γ (diff'bar!):

$$\gamma: [a, b] \mapsto \{\vec{x}(t)\} \subset V \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$|\gamma| := C: \text{Spur}$$



$$\text{Sei } \vec{F} = \vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} := \vec{F}(\vec{x}), \quad \mathbb{R}^n \ni \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Auf } C \text{ sei: } \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}(t))$$

In der Physik und Technik begegnet man häufig der potentiellen Energie oder der Arbeit in einem Kraftfeld \vec{F} . Daher sind Ausdrücke der folgenden Art wichtig:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}, \quad \Delta \vec{x} = \Delta \vec{s} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \cdot \Delta t \rightarrow d\vec{x} = \vec{x}'_t \cdot dt, \quad \vec{x}'_t = \text{Tangentenvektor}$$

Konsens:

Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir folgende Inkonssequenz zu, weil sie nicht stört:

$$\text{Sei } P = P(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_n), \quad \overrightarrow{OP} = \vec{x} \rightsquigarrow f(P) := f(x_1, \dots, x_n) := f(\vec{x})$$

Definition:

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} := \int_{t=a}^{t=b} \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'_t(t) dt$$

heisst **Linienintegral** oder **Kurvenintegral** resp. Arbeit längs $|\gamma|$

Das Linienintegral ist damit auf ein Integral mit einer Integrationsvariablen zurückgeführt und hängt somit nur vom Anfangspunkt A_γ und Endpunkt E_γ der Kurve ab. Falls man die Kurve im Definitionsbereich sinnvoll durch eine Summe von Teilkurven längs den Koordinatenachsen ersetzen kann, so gilt:

Satz:**Vor.:**

$$|\gamma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \dots \cup |\gamma_n|, E_{|\gamma_{k+1}|} = E_{|\gamma_k|}, \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

Beh.:

$$\int_{|\gamma|} \vec{F} \bullet d\vec{x} = \int_{|\gamma_1|, x_1(a)}^{x_1(b)} F_1(\vec{x}) \bullet dx_1 + \dots + \int_{|\gamma_n|, x_n(a)}^{x_n(b)} F_n(\vec{x}) \bullet dx_n$$

Bsp.:

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ 5z \\ 10x \end{pmatrix}, \gamma: t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in [0, 2], \Rightarrow \vec{x}'_t(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Auf } |\gamma| \text{ gilt: } \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = \begin{pmatrix} 3(t^2 + 1)(2t^2) \\ 5t^3 \\ 10(t^2 + 1) \end{pmatrix}$$

$$\leadsto W = \int_0^2 \vec{F} \bullet \vec{x}'_t dt = \int_0^2 \begin{pmatrix} 3(t^2 + 1)(2t^2) \\ 5t^3 \\ 10(t^2 + 1) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^2 (3(t^2 + 1)(2t^2))(2t) + (5t^3)(4t) + (10(t^2 + 1))(3t^2) dt = \int_0^2 30t^2 + 12t^3 + 50t^4 + 12t^5 dt = 576$$

Geschlossene Wege

Im Analysis-Kurs haben wir definiert:

Definition:Wir nennen einen **Weg geschlossen**, wenn Anfangspunkt und Endpunkt der Spur zusammenfallen: $A_{|\gamma|} = E_{|\gamma|}$.Für das Linienintegral über einen geschlossenen Weg γ verwenden wir das folgende Symbol:**Symbol:** $\oint_{|\gamma|} \vec{F} \bullet d\vec{x}$ **Bsp.:**

$$\text{Sei } \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, |\gamma| \text{ geschlossen: } \vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2), \vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \bullet d\vec{x} &= \oint_{|\gamma|} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{pmatrix} dt = \oint_{|\gamma_x|} a \cdot x'_t dt + \oint_{|\gamma_y|} b \cdot y'_t dt + \oint_{|\gamma_z|} c \cdot z'_t dt = a \oint_{|\gamma_x|} x'_t dt + b \oint_{|\gamma_y|} y'_t dt + \\ &+ c \oint_{|\gamma_z|} z'_t dt \\ &= a x \Big|_{x(t_1)}^{x(t_2)=x(t_1)} + b y \Big|_{y(t_1)}^{y(t_2)=y(t_1)} + c z \Big|_{z(t_1)}^{z(t_2)=z(t_1)} = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \bullet d\vec{x} = 0 \end{aligned}$$

Die Arbeit über einen geschlossenen Weg ist also 0.

→ **Problem:** Ist die Arbeit über einen geschlossenen Weg immer 0? — Oder hängt dieses Verhalten etwa vom Feld \vec{F} oder gar vom Weg γ ab?

Das folgende Beispiel zeigt uns, dass das Wegintegral resp. die Arbeit über einen geschlossenen Weg auch ungleich 0 sein kann:

$$\begin{aligned} \text{Sei } \vec{F}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sin(t)} \\ \frac{1}{\cos(t)} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (1 + 1 + 0) dt = 4\pi \neq 0 \end{aligned}$$

6.4.2 Gradientenfelder und Potentialfelder

Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1$ stetig diff'bar, z.B. $n = 3$

→ $\vec{F}(\vec{x}) := \text{grad } \varphi = \nabla \varphi \in \mathcal{C}$ (stetig) In dieser Situation definieren wir:

Definition: Wenn es zu einer gegebenen Funktion $\vec{F}(\vec{x})$ eine Funktion $\varphi(\vec{x})$ gibt für die $\text{grad } \varphi(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x})$ gilt, so heisst φ **Potentialfunktion** zu \vec{F} . Umgekehrt heisst $\vec{F}(\vec{x})$ **Gradientenfeld** zu φ .

Gradientenfelder haben die schöne Eigenschaft, dass bei ihnen die Wegintegrale (d.h. die Arbeit) 0 ist, d.h. der Energiesatz gilt:

$$\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} \nabla \varphi \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} \varphi'_{x_1} dx_1 + \dots + \varphi'_{x_n} dx_n = \oint_{|\gamma|} d\varphi = \varphi(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}(t_1)}^{\vec{x}(t_2)=\vec{x}(t_1)} = \varphi(\vec{x}(t_1)) - \varphi(\vec{x}(t_1)) = 0$$

Satz:

Vor.:

Sei $\vec{F} = \text{grad } \varphi$ Gradientenfeld
Sei φ eine Potentialfunktion zu \vec{F} auf $V \subseteq \mathbb{R}^n$
Sei γ geschlossener Weg, $|\gamma| \subset V$

Beh.:

$$\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$$

$$\text{Bsp.: } \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \rightsquigarrow \exists \text{ Potentialfunktion: } \varphi(\vec{x}) = x \cdot y \cdot z + C \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = 0$$

Dabei ist γ ein beliebiger geschlossener Weg.

$$\text{Sei } \vec{F}_0(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu \vec{F}_0 existiert keine Potentialfunktion, wie man sofort nachrechnet.

6.4.3 Konservative Felder

Definition:

Sei $\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \quad \forall \gamma, \quad |\gamma| \subset V$

Dann heisst \vec{F} **Potentialfeld** oder **konservatives Feld**

Folgerung:

\vec{F} Potentialfeld
 $\Rightarrow \vec{F}$ konservativ.

Symbol: \vec{F} konservativ: $\vec{F} \in Cons$

Konservative Felder haben die wichtige Eigenschaft, dass in ihnen Wegintegrale resp. die Arbeit nur vom Anfangspunkt und Endpunkt des Weges, aber nicht vom Verlauf der Spur abhängen.

Satz:

Vor.:

$\vec{F} \in Cons$

γ_1, γ_2 zwei Wege $\subset V$

mit $A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}, \quad E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2}$

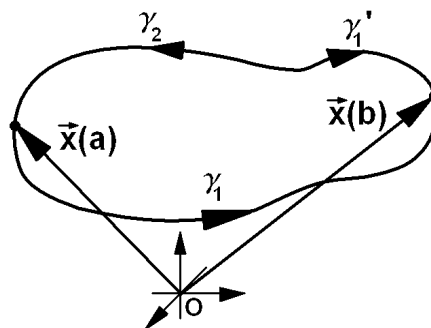
Beh.:

$$\int_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{|\gamma_2|} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Zum Beweis:

Sei $|\gamma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2|, \quad |\gamma_2| = |-\gamma_1'|$

$$\begin{aligned} \leadsto 0 &= \oint_{|\gamma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \oint_{|\gamma_2|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \oint_{|-\gamma_1'|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} - \oint_{|\gamma_1'|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &\Leftrightarrow \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma_1'|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$



Diese Schlusskette kann man natürlich auch rückwärts lesen. Daher gilt:

Korollar:

Vor.:

$$\forall (\vec{x}(a), \vec{x}(b)) \in V^2 \quad \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Beh.:

$\vec{F} \in Cons$

Problem: Ist ein konservatives Feld immer auch ein Gradientenfeld einer Potentialfunktion? D.h. existiert immer eine Potentialfunktion, wenn der Energiesatz gilt? Diese Frage wollen wir jetzt studieren.

Sei \vec{F} konservativ in V .

$$\leadsto \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0, \quad |\gamma| \subset V \Rightarrow I(t) := \int_{\vec{x}(t_0)}^{\vec{x}(t)} \vec{F} \cdot d\vec{x} \text{ ist wegunabhängig.}$$

$$\leadsto \frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \int_{\vec{x}(t_0)}^{\vec{x}(t)} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \vec{F}(\vec{x}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{x}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

Wegen der Wegunabhängigkeit kann γ speziell gewählt werden. Falls V eine vernünftige Form hat, was wir voraussetzen, kann $|\gamma|$ aus achsenparallelen Stücken zusammengesetzt werden. Auf einem solchen Stück wählen wir t gleich derjenigen Koordinate x_k , die auf diesem Stück gerade ändert.

$$\leadsto \text{Z.B. längs } |\gamma_k|: \quad \frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dx_k} I(x_k) = \vec{F}(\vec{x}(x_k)) \cdot \frac{\partial \vec{x}(x_k)}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial \vec{x}(x_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dx_k} I(x_k) = \begin{pmatrix} \vdots \\ F_k(\vec{x}(x_k)) \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = F_k(\vec{x}(x_k)) \quad (\text{Längs der}$$

x_k -Achse ändert nur die x_k -Koordinate, die andern Koordinaten bleiben als Parameter fix.)

Da längs x_k gilt: $t = x_k$, können wir $I(t) = I(x_k)$ dort als Funktion von x_k auffassen. Längs der andern Achsen ist x_k als Parameter fix und somit I dort konstant mit x_k , d.h. ebenfalls Funktion von x_k . I ist also immer Funktion von x_k , unabhängig vom Wert von k . D.h. $I = I(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ mit $I_{x_k}'(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$.

Nun definieren wir: $\varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) := I(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$

$$\text{Dann gilt:} \quad \text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_{x_1} \\ \vdots \\ \varphi'_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$\leadsto \vec{F}(\vec{x})$ ist Gradientenfeld zur oben definierten Funktion $\varphi(\vec{x})$. D.h. bei vernünftigem V ist ein Potentialfeld immer auch Gradientenfeld einer Potentialfunktion.

Satz:

Vor.:

$\vec{F} \in \text{Cons}$
 V vernünftig

Beh.:

$\exists_{\varphi(\vec{x})}$ zu \vec{F} :
 $\varphi(\vec{x})$ ist Potentialfunktion zu \vec{F}

Zusammengefasst: Konservative Felder sind die Felder, wo der Energiesatz gilt. Und genau diese konservative Felder sind auch Gradientenfelder einer somit existierenden Potentialfunktion φ .

Konsequenz: In konservativen Feldern gilt somit:

$$\int_{|\gamma|} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{|\gamma|} \text{grad } \varphi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{|\gamma|} d\varphi = \varphi \Big|_{\vec{x}(t_1)=A_{|\gamma|}}^{\vec{x}(t_2)=E_{|\gamma|}} = \varphi(E_{|\gamma|}) - \varphi(A_{|\gamma|}) = \Delta\varphi$$

\leadsto Differenz von Werten der Potentialfunktion.

Sei nun $\varphi(\vec{x})$ die Potentialfunktion zum Potentialfeld $\vec{F}(\vec{x}) = \text{grad} \varphi$. Sei $\overrightarrow{OP} := \vec{x}$.

Definition: $\varphi(P) := \varphi(\overrightarrow{OP})$ heisst **Potential** im Punkte P .
 $\Delta\varphi = \varphi(E_{|\gamma|}) - \varphi(A_{|\gamma|})$ heisst **Potentialdifferenz**

Bemerkung: Das Potential hat oft physikalisch die Bedeutung der **potentiellen Energie** und der Gradient dazu die Bedeutung der **Feldstärke**. Die Feldstärke erlaubt die Berechnung der Kraft des Feldes auf eine Probe, z.B. eine Probemasse oder Probeladung.

$$\leadsto \text{Z.B.} \quad \vec{F} = \vec{E} \cdot q$$

6.4.4 Eigenschaften, Beispiele

Integrale sind lineare Operatoren. Daher gelten auch für Linienintegrale die Linearitätseigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad \oint_{|\gamma|} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 &\Rightarrow \oint_{|\gamma|} \lambda \cdot \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \lambda \cdot \oint_{|\gamma|} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0, \\ \oint_{|\gamma|} \vec{F}_1(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 \wedge \oint_{|\gamma|} \vec{F}_2(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 &\Rightarrow \oint_{|\gamma|} (\vec{F}_1(\vec{x}) \pm \vec{F}_2(\vec{x})) \cdot d\vec{x} = 0 \end{aligned}$$

Satz: **Vor.:** $\vec{F}_1(\vec{x}), \vec{F}_2(\vec{x}) \in \text{Cons}$
 $\lambda_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \lambda_i \in \mathbb{C}$

Beh.: $\lambda_1 \cdot \vec{F}_1(\vec{x}) \pm \lambda_2 \cdot \vec{F}_2(\vec{x}) \in \text{Cons}$

Bsp.:

Zentralfelder (kugelsymmetrische Felder)

$$\begin{aligned} \leadsto \varphi(\vec{x}) = \varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r}) = \varphi(r), \quad \text{grad} \varphi = \vec{F}(\vec{x}) = F(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ resp.} \\ \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \cdot (\sum x_k^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 x_k = \frac{x_k}{r} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} = \varphi'_r \cdot \frac{x_k}{r} \quad \text{grad} \varphi = \varphi'_r \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} \\ \vdots \\ \frac{x_k}{r} \end{pmatrix} = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}} \end{aligned}$$

Lemma: **Vor.:** $\varphi(\vec{x}) = \varphi(r)$ Potentialfunktion eines Zentralfeldes

Beh.: $\text{grad}(\varphi) = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}$

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man den folgenden Satz herleiten:

Satz:**Vor.:**

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{Z}(\vec{r}) \rightsquigarrow \text{vernünftiges Zentralfeld}$$

Beh.:

$$(1) \quad \vec{F}(\vec{x}) = \vec{Z}(\vec{r}) \text{ Potentialfeld}$$

$$(2) \quad \varphi_C(r) := \int_{t(R_0)}^{t(r)} \vec{F}(\vec{x}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{x}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda + C = \int_{R_0}^r \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + C$$

ist Potentialfunktion

Bemerkung:

Eine Potentialfunktion ist nur bis auf eine additive Konstante C bestimmt, muss also noch normiert werden. Bei der Bildung des Gradienten verschwindet diese Konstante wieder.

Zum Beweis:

$$\text{Es gilt:} \quad \nabla \varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_r \cdot r'_x \\ \varphi'_r \cdot r'_y \\ \varphi'_r \cdot r'_z \end{pmatrix} = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_r(r) &= \frac{d}{dr} \left(\int_{R_0}^r \vec{Z}(|\vec{x}|) \cdot d\vec{x} \right) = \frac{d}{dr} \left(\int_{\lambda_0}^{\lambda} \vec{Z}(|\vec{x}|) \cdot \left(\frac{d}{d\lambda} \vec{x} \right) d\lambda \right) \Big|_{|\vec{x}|=r=|\vec{r}|} = \vec{Z}(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \vec{r} \right) = \vec{Z}(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} (r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}) \right) \\ &= \vec{Z}(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = Z(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}} \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = Z(r) \cdot 1 = Z(r) \Rightarrow \nabla \varphi = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = Z(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = \vec{Z}(r) \Rightarrow \nabla \varphi = \vec{Z}(r) \end{aligned}$$

Das Zentralfeld $\vec{Z}(r)$ ist somit Gradientenfeld der eingangs definierten Potentialfunktion $\varphi = \int_{R_0}^r \vec{Z}(|\vec{x}|) \cdot d\vec{x}$.

Bsp.: **Coulombfeld:** $\varphi(r) = c_0 \mathbf{C} \frac{1}{r} + c_1$

$$\rightsquigarrow \text{Feldstärke:} \quad \nabla \varphi = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = -c_0 \mathbf{C} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = -c_0 \mathbf{C} \frac{1}{r^3} \cdot \vec{r} = \frac{c_2}{r^3} \vec{r}$$

6.4.5 Konservative Felder und Rotation

Im Analysis-Kurs haben wir **einfach zusammenhängende Gebiete** oder **Volumen** definiert. In einem solchen Gebiet oder Volumen kann man bekanntlich beliebige Wege zwischen den selben Anfangs- und Endpunkten stetig ineinander deformieren. Ein solches Volumen sei im folgenden gegeben:

$$\text{Sei } \vec{F}(\vec{x}) \in \text{Cons}, \vec{F} \text{ genügend oft stetig diff'bar} \rightsquigarrow \exists \varphi : \vec{F}(\vec{x}) = \text{grad}(\varphi(\vec{x})) = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi''_{zy} - \varphi''_{yz} \\ \varphi''_{xz} - \varphi''_{zx} \\ \varphi''_{yx} - \varphi''_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

denn z.B. $\varphi''_{zy} = \varphi''_{yz}$ u.s.w.

Weiter unten werden wir mit Hilfe des **Satzes von Stokes** zeigen, dass in einfach zusammenhängenden Volumina gilt:

Lemma: $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} \in \operatorname{Cons}$

Damit erhalten wir ein **einfaches Kriterium** um festzustellen, ob ein Feld konservativ ist, d.h. ob dort der Energiesatz gilt! Andererseits ist dies geradezu eine physikalische Forderung an eine reale Situation! (Z.B. Maxwellgleichung $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ in elektrischen Feldern!)

Satz: **Vor.:** V einfach zusammenhängend
 $\vec{x} \in V, \vec{F} : \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x})$ genügend oft stetig
 diff'bar

Beh.: $\vec{F} \in \operatorname{Cons} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$

Konsequenz: Hat man ein Vektorfeld mit $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ gegeben, so kann man dieses Vektorfeld immer formal als Geschwindigkeitsfeld bei der Rotation eines Massepunktes um eine Axe interpretieren (das ist nicht verboten!), egal was \vec{F} wirklich bedeutet. $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ bedeutet, dass \vec{F} lokal nicht formal als Geschwindigkeitsfeld einer um eine Axe rotierenden Punktmasse interpretiert werden kann, denn in einem solchen Geschwindigkeitsfeld gilt $\operatorname{rot} \vec{F} = 2\vec{\omega} \neq \vec{0}$, falls eine Geschwindigkeit vorhanden ist. Eine solche Rotationsbewegung kann man aber auch als **Wirbel** deuten. Daher kommen wir zu folgender anschaulichen Interpretation:

Folgerung: $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$ „wirbelfrei“

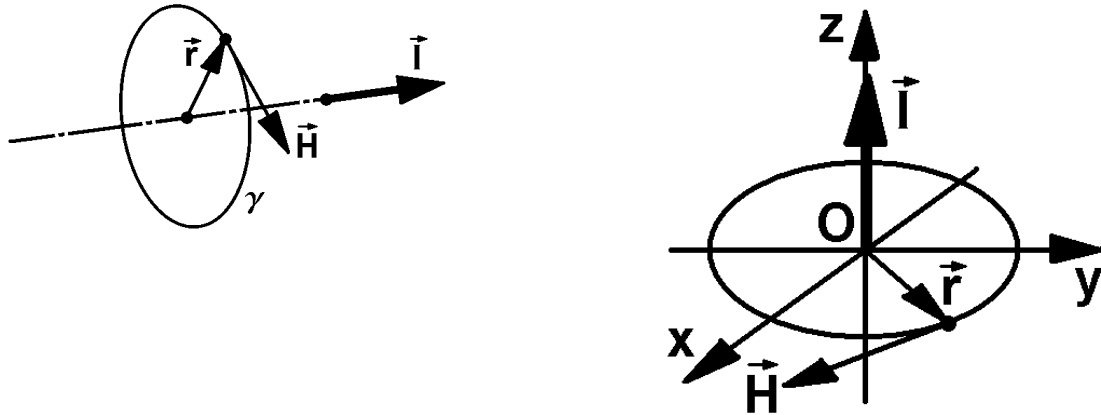
Konsequenz:

Sei V einfach zusammenhängend und vernünftig
 Sei \vec{F} vernünftig

Der Energiesatz gilt

$$\Leftrightarrow \vec{F}(\vec{x}) \in \operatorname{Cons} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \forall |\gamma| \subset V \Leftrightarrow \exists_{\varphi(\vec{x})} : \operatorname{grad} \varphi = \vec{F}$$

6.4.6 Beispiel: Stromdurchflossener Leiter



Physik: $\vec{H} = \frac{\vec{I}}{2\pi} \times \frac{\vec{e}_{\vec{r}}}{r}, \quad |\vec{r}| = r \quad \text{Sei } I \neq 0$

Wähle das Koordinatensystem speziell so, dass der Strom parallel zur z -Achse fließt.

$$\begin{aligned} \leadsto \vec{I} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{H} &= \frac{\vec{I}}{2\pi} \times \frac{\vec{e}_{\vec{r}}}{r} = \frac{1}{r \cdot 2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{r^2 \cdot 2\pi} \cdot \begin{pmatrix} -Iy \\ Ix \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi \cdot (x^2+y^2)} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{H} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \left(\frac{I}{2\pi \cdot (x^2+y^2)} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(x^2+y^2)-x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} - \left(-\frac{(x^2+y^2)-y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \right) \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x^2+y^2-2x^2+x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{H} &\in \text{Cons} \end{aligned}$$

Problem:

Sei $|\gamma| = K_1(0)$ (Kreis um O mit $r = 1$)

$$\begin{aligned} \leadsto \text{Es gilt: } \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \oint_{|\gamma|} \vec{H} \cdot d\vec{x} &= \oint_{|\gamma|} \frac{I}{2\pi \cdot (x^2+y^2)} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi \cdot ((\cos(t))^2 + (\sin(t))^2)} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi \cdot 1} \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi} \cdot 1 dt = \frac{I \cdot 2\pi}{2\pi} = I \neq 0 \end{aligned}$$

$$\leadsto \left(\oint_{|\gamma|} \vec{H} \cdot d\vec{x} \neq 0 \Rightarrow \vec{H} \notin \text{Cons} \right) \wedge \left(\text{rot } \vec{H} = \vec{0} \Rightarrow \vec{H} \in \text{Cons} \right) \Rightarrow \left(\vec{H} \notin \text{Cons} \right) \wedge \left(\vec{H} \in \text{Cons} \right) \\ \leadsto \text{Widerspruch!}$$

\leadsto Was stimmt hier nicht?

Lösung: Wieder einmal haben wir die mathematischen Voraussetzungen nicht beachtet! V ist nicht einfach zusammenhängend: Für $r = 0$ ist \vec{H} nicht definiert, wie man sofort bemerkt.

Wir wollen noch die **Potentialfunktion** berechnen. Wir wissen, dass die Potentialfunktion nur von r , nicht aber vom Winkel in der xy -Ebene abhängt, denn die Projektion in diese Ebene ist ein Zentralfeld.

$$\text{Sei } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{H}(\vec{x}(t)) = \frac{I}{2\pi \cdot (r^2 \cos^2(t(r)) + r^2 \sin^2(t(r)))} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin(t(r)) \\ r \cos(t(r)) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi \cdot r^2} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin(t(r)) \\ r \cos(t(r)) \\ 0 \end{pmatrix} = \text{grad } \varphi$$

$$\begin{aligned} \leadsto \varphi(\vec{x}) &= \int_{R_0}^r \vec{H}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} dt + C = \int_{R_0}^r \vec{H}(\vec{x}(r)) \cdot \frac{d\vec{x}(r)}{dr} dr + C = \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \cdot (\lambda^2 \cos^2(t(\lambda)) + \lambda^2 \sin^2(t(\lambda)))} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda \sin(t(\lambda)) \\ \lambda \cos(t(\lambda)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} \lambda \cos(t(\lambda)) \\ \lambda \sin(t(\lambda)) \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda + C = \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \lambda^2} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda \sin(t(\lambda)) \\ \lambda \cos(t(\lambda)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t(\lambda)) - \lambda \sin(t(\lambda)) t'_\lambda \\ \sin(t(\lambda)) + \lambda \cos(t(\lambda)) t'_\lambda \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda + C \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \lambda^2} \cdot (-\lambda \sin(t(\lambda)) \cos(t(\lambda)) + \lambda^2 \sin^2(t(\lambda)) t'_\lambda - \lambda \cos(t(\lambda)) \sin(t(\lambda)) + \lambda^2 \cos^2(t(\lambda)) t'_\lambda) d\lambda + C = \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \lambda^2} \cdot (\lambda^2 t'_\lambda) d\lambda + C = \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi} \cdot t'_\lambda d\lambda + C = \frac{I}{2\pi} \cdot t(\lambda) \Big|_{R_0}^r + C = \frac{I \cdot t(r)}{2\pi} + C_0 \\ &\quad \text{mit } \frac{y}{x} = \tan(t(r)), \quad t(r) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \varphi(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C_0 \end{aligned}$$

$$\leadsto \text{Lösung: } \varphi(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C_0$$

Die Festlegung von C_0 ist eher eine praktische Frage und sei an dieser Stelle der Physik überlassen.

6.5 Die Integralsätze

6.5.1 Der Begriff Fluss

Vorausgesetzte Begriffe

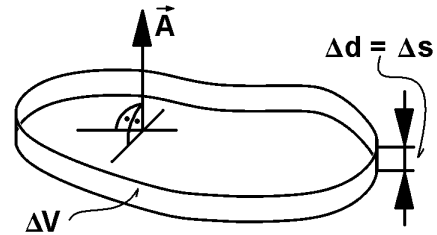
Skalare sowie vektorielle Volumen- und Oberflächenintegrale wollen wir als bekannt voraussetzen:

$$\iint_A \varphi dA, \quad \iint_A \varphi d\vec{A}, \quad \iint_A \vec{a} \cdot d\vec{A}, \quad \iint_A \vec{a} \times d\vec{A}, \quad d\vec{A} = \vec{n} dA$$

Zusammenhang:

$$A = \iint_A 1 \, dA = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s}$$

Bsp.: Kugel



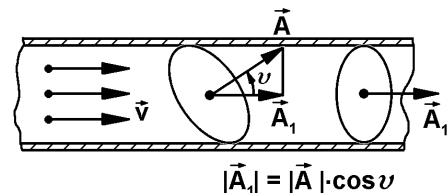
$$\begin{aligned} \leadsto V(r) &= \frac{4\pi}{3} r^3, \quad A(r) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{4\pi}{3} (r + \Delta s)^3 - \frac{4\pi}{3} r^3}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{4\pi}{3} (r^3 + 3r^2 \Delta s + 3r \Delta s^2 + \Delta s^3) - \frac{4\pi}{3} r^3}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3} (3r^2 + 3r \Delta s + \Delta s^2) = \frac{4\pi}{3} 3r^2 \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

6.5.2 Definition des Flusses

Um zu einem Verständnis des Begriffes **Fluss** zu gelangen, wollen wir ein einfaches Beispiel studieren.

Wir stellen uns folgende **Frage**:

Welches Volumen ΔV Flüssigkeit fließt pro Zeitspanne Δt durch eine beliebig gegebene Querschnittsfläche A eines Rohres?



Es gilt (Skizze): $A = |\vec{A}|$, $A_n = A \cdot \cos(\theta)$, $\Delta V = A_n \cdot \Delta s = |\vec{A}| \cdot \cos(\theta) \cdot |\vec{v}| \cdot \Delta t$

\leadsto Volumen pro Zeit resp. „Fluss Φ “ durch $|\vec{A}|$:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx \frac{|\vec{A}| \cdot \cos(\theta) \cdot |\vec{v}| \cdot \Delta t}{\Delta t} = |\vec{v}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(\theta) = \vec{v} \cdot \vec{A} \leadsto \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV(t)}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

In einer zähen Flüssigkeit ist $|\vec{v}|$ bekanntlich sehr ortsabhängig, denn die Flüssigkeit haftet an der Rohroberfläche, während sie innen schneller fließen kann. Daher müssen wir das Skalarprodukt für ein Teilvolumen pro Zeit erst lokal auf $\Delta \vec{A}$ betrachten. Nachher summieren wir die Teile zum Gesamtvolumen pro Zeit auf.

\leadsto Volumen pro Zeit resp. „Fluss“ durch $\Delta |\vec{A}|$:

$$(\Delta \vec{A}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \Delta \vec{A}$$

Da man $|\vec{A}|$ erhält, wenn man die Teilflächen $\Delta |\vec{A}|$ beliebig genau aufsummiert gilt:

$$|\vec{A}| \approx \sum \Delta |\vec{A}| \Rightarrow |\vec{A}| = \int d|\vec{A}| \leadsto \Phi_{tot} = \frac{dV(t)_{tot}}{dt} \approx \sum \vec{v} \cdot \Delta \vec{A} \leadsto \Phi_{tot} = \frac{dV(t)_{tot}}{dt} = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Damit haben wir den Grenzwert vom Volumen Flüssigkeit pro Zeit berechnet, der bei einem gegebenen Geschwindigkeitsfeld \vec{v} durch eine gegebene Fläche A fließt. Diesen Grenzwert nennen wir den Fluss Φ .

Wenn wir nun nicht ein Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit \vec{v} , sondern ein beliebiges Vektorfeld und ebenfalls eine Fläche A haben, so ist es nicht verboten \vec{v} als Geschwindigkeit zu interpretieren und genauso den Fluss $\Phi = \frac{dV(t)}{dt}$ zu berechnen. Ob tatsächlich etwas fließt, ist so eine Frage der

Interpretation. (In der Physik früherer Jahrhunderte gab es die heute verworfene Äthertheorie, wo man diesem Fliesen Realitätswert zugestanden hat.)

Daher definieren wir für ein beliebig gegebenes vernünftiges Vektorfeld \vec{u} und eine ebenfalls gegebene Fläche A :

Definition:

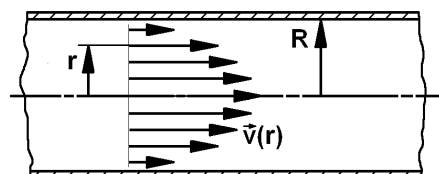
$$\Phi := \iint_A \vec{u} \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA$$

heisst **Fluss** von \vec{u} durch A

Konsequenz: Da das Skalarprodukt unabhängig ist von der Lage des Koordinatensystems, ist auch der Fluss Φ unabhängig von der Lage des Koordinatensystems.

Bsp.:

In einem runden Rohr mit Durchmesser R fließt eine zähe Flüssigkeit.



Sei $|\vec{v}(r)| = v(r) = (R^2 - r^2) \cdot k$

$$\leadsto d\Phi = v(r) \cdot dA = v(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr, \quad \vec{v} \parallel d\vec{A} \Rightarrow \Phi = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_A v(r) \cdot dA = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi \cdot r \, dr =$$

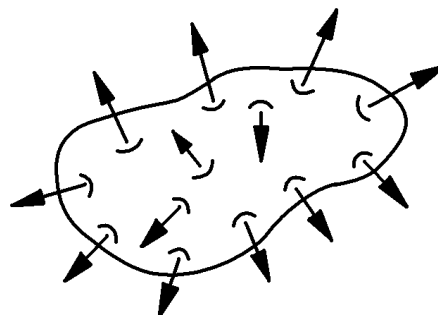
$$2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot k \cdot r \, dr = 2\pi \cdot k \int_0^R R^2 \cdot r - r^3 \, dr = 2\pi \cdot k \left(R^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{2\pi \cdot k \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot k \cdot R^4}{2}$$

6.5.3 Fluss durch geschlossene Flächen

Begriff, Symbole

Die Oberfläche einer Kugel oder einer Kartoffel sind bekanntlich **geschlossen**. Oberflächen von endlichen Körpern sind geschlossen.

Konvention: Wir halten es hier so, dass bei einer geschlossenen Fläche der Oberflächenvektor $d\vec{A}$ **nach aussen gerichtet** ist.



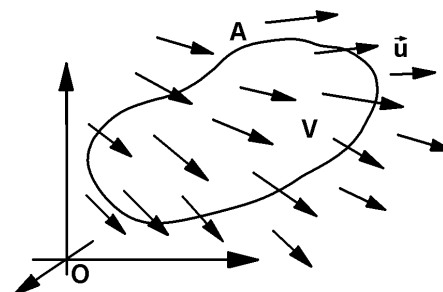
Symbol: Für Integrale über geschlossene Flächen schreiben wir: $\oiint \vec{u} \cdot d\vec{A}$ oder $\oiint_A \vec{u} \cdot d\vec{A}$

Quellen, Senken

Der „gesunde Menschenverstand“ führt uns zur Idee, dass eine Menge eines Medium, die über längere Zeit auf der einen Seite durch die Oberfläche in einen geschlossenen Körper hineinfließt resp. hineindiffundiert, auf der anderen Seite wieder einmal herausfließen muss oder herausdiffundieren muss. Denn, so denkt man sich, ein Körper kann ja nicht beliebig viel speichern, einmal muss Schluss sein. Wenn dem

nicht so ist, so muss im Innern entweder Medium einerseits in „Senken“ verwandelt oder vernichtet — oder andererseits in „Quellen“ erzeugt werden. Und genau diese Situation werden wir bei Vektorfeldern beobachten. Daher definieren wir:

Gegeben sei ein Vektorfeld \vec{u} und ein Körper resp. Volumen V mit der Oberfläche A . Wir sagen:



Definition:

Ist $\Phi > 0$, so überwiegen in V die **Quellen**. Ist $\Phi < 0$, so überwiegen die **Senken**. Ist $\Phi = 0$, so sind die Quellen gleich den Senken.

Da der Fluss von Vektorfeldern der Physik eine bedeutende Rolle spielt, steht man vor dem bekannten Problem der Berechnung von Oberflächenintegralen. Hier greifen die **Integralsätze**, mit Hilfe derer sich Oberflächenintegrale in einfacher berechenbare Volumenintegrale verwandeln lassen.

6.5.4 Anwendung: Wieso r-quadrat-Gesetze?

Problem: Beim Coulomb-Gesetz und beim Gravitationsgesetz handelt es sich um Gesetze, die die Kraft in Zentralfeldern beschreiben. Wieso steht bei diesen Gesetzen exakt r^2 im Nenner und nicht $r^{1.99999999886}$ oder $r^{2.00000000036587}$?

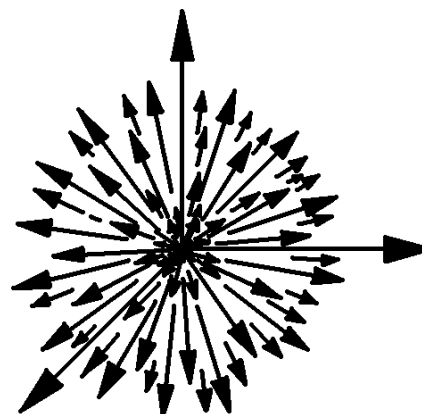
Z.B. Gravitationsgesetz $\vec{F} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_r$

Untersuchung:

Gegeben sei ein Zentralfeld mit der Feldstärke $\vec{u} = \vec{u}(r)$.

Idee:

Folgende Vorstellung scheint sinnvoll in quellenfreien Zonen des Feldes: Der Fluss Φ ist unabhängig von $r > 0$ durch jede geschlossene Fläche um das Feldzentrum konstant.



Seien $A(r_1)$ und $A(r_2)$ zentrische Sphären um den Ursprung des Zentralfeldes.

$$\leadsto \Phi_{A(r_1)} = \Phi_{A(r_2)} \text{ resp. } \Phi_{r_1} = \Phi_{r_1} = \Phi_r = \text{const.} = c = \oint_{A(r_1)} \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint_{A(r_2)} \vec{u} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Sei } \vec{n} \perp \text{Sphäre} \leadsto \vec{u}(r) \parallel \vec{n} \parallel \vec{n} \cdot dA \Rightarrow c = \oint_{A(r)} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \cdot dA$$

$$\text{Dabei gilt mit } |\vec{n}| = 1: \quad \vec{u}(r) \cdot \vec{n} = |\vec{u}(r)| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(0) = |\vec{u}(r)| \cdot 1 \cdot 1 = |\vec{u}(r)| = u(r)$$

Für $r = r_0$ ist jetzt:

$$c = \oint_{A(r_0)} u(r_0) \cdot dA = u(r_0) \oint_{A(r_0)} dA = u(r_0) \cdot 4r^2 \pi \Rightarrow u(r) = \frac{c}{4r^2 \pi} = \frac{k}{r^2}, \quad k = \frac{c}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{u}(r) = \frac{k}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Konsequenz:

In einem Zentralfeld mit der Feldstärke $\vec{u} = \vec{u}(r)$ und einer zentralen Quelle oder Senke im Ursprung gilt:

$$\vec{u}(r) = \frac{k}{r^2} \cdot \vec{e}_r, \quad u(r) = \frac{k}{r^2}$$

Bsp.: Gravitationsgesetz:

$$\vec{F} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_r = m \cdot \vec{u}(r) \Rightarrow \vec{u}(r) = \gamma \frac{M}{r^2} \cdot \vec{e}_r := \vec{g}(r) \leadsto \text{Gravitationsfeldstärke oder Gravitationsbeschleunigung.}$$

Für das Coulomb-Feld ist die Situation analog.

Wichtig: Dem Gesetz liegt also die Annahme zu Grunde, dass der Fluss unabhängig von r durch eine Sphäre um das Zentrum konstant ist.

6.5.5 Übersicht über die Integralsätze

Wir wollen hier zuerst eine Übersicht über die Integralsätze geben und auf die Beweise erst weiter hinten eintreten.

Seien im Folgenden die verwendeten Funktionen und Volumina „vernünftig“ in dem Sinne, dass alle notwendigen verwendeten Ableitungen existieren, gegebenenfalls stetig sind und auch die Oberflächen genügend glatt und nicht fraktal zerzaust sind.

Mit Hilfe des **Divergenzsatzes** oder **Satzes von Gauss** lassen sich bei Körpern Oberflächenintegrale in einfacher berechenbare Volumenintegrale umschreiben:

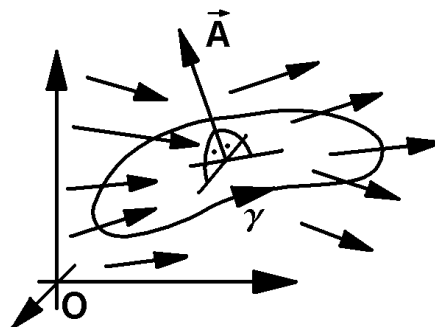
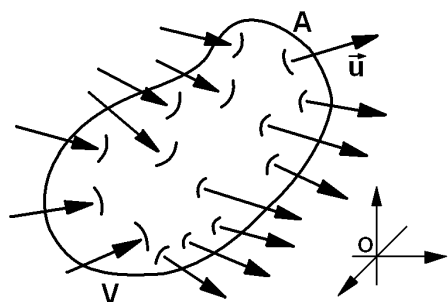
Satz:

Vor.:

Sei A eine geschlossene Fläche, durchflossen von einem Vektorfeld \vec{u}
 $\Phi_{\vec{u}}$ = Fluss

Beh.:

$$\Phi_{\vec{u}} = \oint_A \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint_A \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{u} dV = \iiint_V \text{div} \vec{u} dV$$



Mit Hilfe des **Rotationssatzes** oder **Satzes von Stokes** lassen sich bei Flächen, die durch eine Kurve γ umrandet sind, Oberflächenintegrale in einfacher berechenbare Kurvenintegrale umschreiben.

Sei hier A **orientiert** und γ habe bezüglich der Orientierung von A einen positiven Umlaufsinn (Gegenuhrzeigersinn).

Satz:

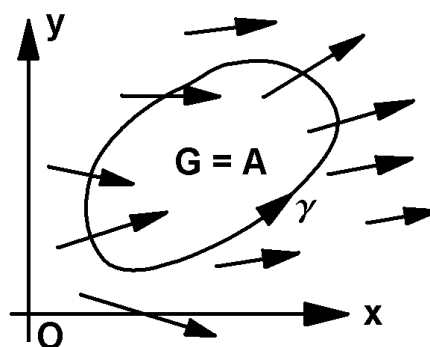
Vor.:

Die orientierte Fläche A habe den Rand $|\gamma|$ mit positivem Umlaufsinn und sei durchflossen von einem Vektorfeld \vec{u}
 $\Phi_{\text{rot } \vec{u}} = \text{Fluss von } \text{rot } \vec{u}$

Beh.:

$$\Phi_{\text{rot } \vec{u}} = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} = \iint_A (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dA = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{x}$$

Ein Spezialfall des Satzes von Stokes für die Grundebene ist der **Satz von Green**:



Satz:

Vor.:

Das Gebiet G in der Grundebene habe den Rand $|\gamma|$ mit positivem Umlaufsinn und sei durchflossen von einem Vektorfeld $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix}$

Beh.:

$$\iint_G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} u_1 dx + u_2 dy$$

6.5.6 Die Sektorformel

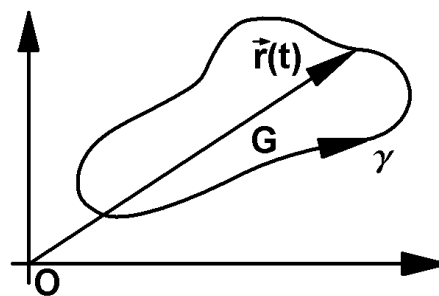
Mit Hilfe des Satzes von Green lassen sich Flächen berechnen:

$$\text{Green:} \quad \iint_G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} u_1 dx + u_2 dy$$

Wähle:

$$u_1 = \alpha \cdot y, \quad u_2 = (1 + \alpha) \cdot x, \\ \alpha \in \mathbb{C}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

\leadsto Flächeninhalt:



$$\begin{aligned} |G| &= \iint_G 1 dx dy = \iint_G (1 + \alpha - \alpha) dx dy = \iint_G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{|\gamma|} u_1 dx + u_2 dy = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{u} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \end{pmatrix} dt = \int_{t_1}^{t_2} (u_1(x(t), y(t)) \cdot x_t' + u_2(x(t), y(t)) \cdot y_t') dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt \quad \Rightarrow \quad |G| = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt, \quad \alpha \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Formel:

Vor.:

$\gamma: t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_1, t_2]$ vernünftige Randkurve von G mit positivem Umlaufsinn, $\alpha \in \mathbb{C}$

Beh.:

$$|G| = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt$$

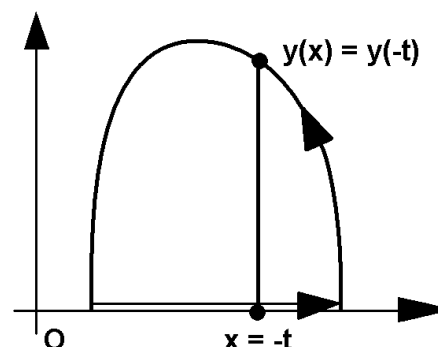
Konsequenz:

Speziell für $\alpha = 0$ oder für $\alpha = -1$ ergeben sich die Formeln:

$$|G| = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot y_t' dt \quad \text{oder} \quad |G| = - \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x_t' dt$$

Spezialfall: $x(t) = -t, \quad t \in [t_1, t_2] \quad x(t) = t \wedge y(t) = 0, \quad t \in [t_2, t_3]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |G| &= - \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x_t' dt + 0 = + \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot 1 dt \\ &= + \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx \end{aligned}$$



Achtung: Der positive Umlaufsinn der Randkurve hat eine Umkehrung der Integrationsrichtung beim klassischen Integral zur Folge.

Bsp.: Kontrolle der Formel mit Kreis:

$$\begin{aligned} r &= 1, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad |G| = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\alpha \cdot \sin(t) \cdot (-\sin(t)) + (1 + \alpha) \cdot \cos(t) \cdot \cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} -\alpha \cdot \sin^2(t) + (1 + \alpha) \cdot \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-1) \cdot \alpha \cdot (1 - \cos^2(t)) + (1 + \alpha) \cdot \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} -\alpha + \alpha \cdot \cos^2(t) + \cos^2(t) + \alpha \cdot \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi \Rightarrow |G| = -\alpha \cdot 2\pi + \alpha \cdot \pi + \pi + \alpha \cdot \pi = \pi \leadsto \quad \checkmark \quad \text{☺} \end{aligned}$$

6.5.7 Konsequenzen aus den Integralsätzen

Eine Folgerung aus dem Satz von Gauss ist die Formel für die **koordinatenfreie Darstellung der Divergenz**:

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung und dem Satz von Gauss gilt:

$$\Delta V \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta A \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Phi_{\vec{u}}}{\Delta V} \right) &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\oint \vec{u} \cdot d\vec{A}}{\Delta V} \right) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\iiint_V \operatorname{div} \vec{u} dV}{\Delta V} \right) = \operatorname{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} \\ \Rightarrow \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Phi_{\vec{u}}}{\Delta V} \right) &= \frac{d\Phi_{\vec{u}}}{dt} = \operatorname{div} \vec{u} \end{aligned}$$

Korollar:

Vor.:

Sei V das Volumen eines „Körpers“ mit $\Delta V \rightarrow 0$, $\Delta A \rightarrow 0$

Beh.:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{d\Phi_{\vec{u}}}{dt}$$

Konsequenz:

1. $\frac{d\Phi_{\vec{u}}}{dt}$ ist unabhängig von der Lage des Koordinatensystems.

2. Bei einem Körper (geschlossene Oberfläche) bedeutet $\bar{\Phi}_V = \frac{\Phi}{V}$ den gesamten Fluss pro Volumen, der eigentlich 0 sein sollte, wenn gleichviel in den Körper hineinfließt wie auch hinausfließt. Im andern Fall kann dieser Quotient $\bar{\Phi}_V$ offensichtlich als Mass für die **mittlere Quellstärke** interpretiert werden. Ist $\bar{\Phi}_V$ positiv, so gibt es mehr Quellen als Senken. Wenn $\bar{\Phi}_V$ negativ ist, so gibt es mehr Senken als Quellen. Wenn man den Grenzwert $\Delta V \rightarrow 0$ bildet, so kommt man daher zum Begriff der **lokalen Quellstärke**.

$$\begin{aligned} \text{Sei } P = P(x, y, z) = (x, y, z) \in \Delta V, \quad \Delta V \rightarrow 0 \\ \Rightarrow P(x, y, z) = (x, y, z) \rightarrow P(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0) = P_0 \end{aligned}$$

Definition: $\Phi'_V = \frac{d\Phi}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V}$ heisst **lokale Quellstärke** in P_0

Die Quellstärke öffnet uns einen ganz neuen Zugang zur Divergenz:

Konsequenz: Interpretation der **Divergenz**

1. Die **Divergenz** in einem Punkt hat die Bedeutung der **Quellstärke** in diesem Punkt.
2. $\text{div } \vec{u} = 0$ heisst, dass \vec{u} quellen- und senkenfrei ist.

1. Beispiel:

$$\text{Sei } \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \text{const.} \Rightarrow \text{div } \vec{u} = 0 \rightsquigarrow \text{quellenfrei.}$$

2. Beispiel: Sei $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix} = \text{const.} \Rightarrow$

$$\text{div } \vec{\omega} = (\omega_2 z - \omega_3 y)'_x + (\omega_3 x - \omega_1 z)'_y + (\omega_1 y - \omega_2 x)'_z = 0 + 0 + 0 = 0 \rightsquigarrow \text{quellenfrei.}$$

6.5.8 Quellenfreie Potentialfelder

Sei \vec{u} konservativ (d.h. Potential- oder Gradientenfeld) und quellenfrei. φ sei dazu eine Potentialfunktion, die ja sicher existiert.

$$\rightsquigarrow \text{grad } \varphi = \vec{u}, \quad \text{div } \vec{u} = 0 \Rightarrow \text{div}(\text{grad } \varphi) = \Delta \varphi = 0$$

Satz: **Vor.:** φ Potentialfunktion eines quellenfreien konservativen Vektorfeldes.

Beh.: $\Delta \varphi = 0$

Bsp.: **Coulombfeld**

$$\vec{F} = k \cdot \frac{q \cdot Q}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad \text{Feldstärke: } \vec{E} = k \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r} = k_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

\leadsto Potentialfunktion: $\varphi^*(x, y, z) = \varphi(r) = k_1 \cdot \frac{1}{r} + C$,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_1 + \frac{\partial}{\partial y} E_2 + \frac{\partial}{\partial z} E_3$$

Z.B. $\frac{\partial}{\partial x} E_1 = k_1 \frac{1 \cdot r^3 - x \cdot 3r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2x}{r^6} = k_1 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right)$ Dieses Ergebnis lässt sich für y und z

durch zyklische Vertauschung umschreiben. $\leadsto \frac{\partial}{\partial x} E_2 = k_1 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \right)$ u.s.w.

$$\begin{aligned} \leadsto \Delta \varphi = \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x} E_1 + \frac{\partial}{\partial y} E_2 + \frac{\partial}{\partial z} E_3 = k_1 \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = k_1 \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right) \\ &= k_1 \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0 \quad \text{für } r \neq 0 \end{aligned}$$

Konsequenz: Das Coulombfeld einer Zentralladung ist für $r \neq 0$ quellenfrei. Dasselbe gilt für das Gravitationsfeld einer Punktmasse, denn die Feldstärke berechnet sich hier formal gleich wie beim Coulombfeld.

6.5.9 Beispiele zu Stokes

1. **Durchflutungsgesetz:** Der Strom I ist die Flächendichte des magnetischen „Impulses“ \vec{H} , \vec{j} ist dabei die Stromdichte:

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint_{|\gamma|} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{H}$$

2. **Induktionsgesetz:** U ist die Spannung, \vec{B} ist die magnetische Flussdichte, \vec{E} die elektrische Feldstärke:

$$\leadsto U = \oint_{|\gamma|} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_A \left(-\frac{d}{dt} \vec{B} \right) \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Stokes} \leadsto \oint_{|\gamma|} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_A \left(-\frac{d}{dt} \vec{B} \right) \cdot d\vec{A} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Spezialfall: $\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{const.}$ (Coulombfeld)

6.5.10 Abgeleitete Formeln

Formeln:

1. **Erste Greensche Formel:**

$$\iiint_V \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi \, dV = \oint_A (\varphi \operatorname{grad} \psi) \cdot d\vec{A} - \iiint_V \varphi \Delta \psi \, dV$$

Diese Formel ist das Analogon zur **partiellen Integration** im \mathbb{R}^3 .

Andere Fassung:

$$\oint_A (\varphi \nabla \psi) \cdot d\vec{A} = \iiint_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi) \, dV$$

(Beweis: Setze im Satz von Gauss: $\vec{u} = \varphi \cdot \nabla \psi$)

$$2. \quad \oint_A (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) d\vec{A} = \iiint_V (\varphi [\psi - \psi \triangle \psi]) dV$$

(Beweis: Schreibe die erste Formel einmal mit $\varphi \nabla \psi$ und einmal mit $\psi \nabla \varphi$ und subtrahiere.

$$3. \quad \oint_A (\vec{n} \times \vec{u}) dA = \oint_A d\vec{A} \times \vec{u} = \iiint_V \nabla \times \vec{u} dV = \iiint_V \text{Rot} \vec{u} dV$$

$$4. \quad \iint_A d\vec{A} \times \nabla \varphi = \iint_A (\vec{n} \times \nabla \varphi) dA = \oint_{|\gamma|} \varphi d\vec{r}$$

5. In den nachstehenden Formeln steht „ \otimes “ für Skalarprodukt, Vektorprodukt oder auch Zahlenprodukt. Entsprechend steht z.B. $\tilde{\psi}$ für einen Vektor oder eine Skalarfunktion. Daher hat man im Folgenden je 6 Formeln in einer geschrieben.

$$(a) \quad \oint_A d\vec{A} \otimes \tilde{\psi} = \oint_A (\vec{n} \otimes \tilde{\psi}) dA = \iiint_V \nabla \otimes \tilde{\psi} dV$$

Achtung: Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ.

$$(b) \quad \iint_A (\vec{n} \times \nabla) \otimes \tilde{\psi} dA = \iint_A (d\vec{A} \times \nabla) \otimes \tilde{\psi} = \oint_{|\gamma|} d\vec{r} \otimes \tilde{\psi}$$

Die Nachrechnung ist dem Leser überlassen.

6.5.11 Koordinatenunabhängige Definition der Rotation

Wir benutzen: $\oint_A d\vec{A} \otimes \tilde{u} = \iiint_V \nabla \otimes \tilde{u} dV$, $\tilde{u} = \vec{u}$, $'\otimes' = ' \times '$

$$\leadsto \oint_A d\vec{A} \times \vec{u} = \iiint_V \nabla \times \vec{u} dV = \iiint_V \text{rot} \vec{u} dV$$

Diese Gleichung ist eine Vektorgleichung. Wir wollen noch am Beispiel der 3. Komponente ihre Richtigkeit kontrollieren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad d\vec{A} = \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dA_x \\ dA_y \\ dA_z \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ Zeile: } \oint_A dA_1 \cdot u_2 - dA_2 \cdot u_1 \stackrel{?}{=} \iiint_V ((u_2)'_x - (u_1)'_y) dV$$

Um diese Gleichung zu verifizieren wenden wir den Satz von Gauss auf den folgenden Vektor \vec{v} an:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \text{div} \vec{v} dV \quad \leadsto \\ &\leadsto \oint_A \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{pmatrix} = \oint_A u_2 dA_1 - u_1 dA_2 = \iiint_V \text{div} \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix} dV = \iiint_V ((u_2)'_x - (u_1)'_y) dV \leadsto \odot \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt daher:

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iiint_V \operatorname{rot} \vec{u} dV}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_A d\vec{A} \times \vec{u}}{\Delta V}, \quad \Delta A \text{ zu } \Delta V$$

Korollar:**Vor.:** $\Delta A \text{ zu } \Delta V$ **Beh.:**

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_A d\vec{A} \times \vec{u}}{\Delta V}$$

Konsequenz: ΔV und $\oiint_A d\vec{A} \times \vec{u}$ sind nicht von der Lage des Koordinatensystems abhängig. Daher ist auch $\operatorname{rot} \vec{u}$ unabhängig von der Lage des Koordinatensystems.

6.5.12 Zur Divergenz des elektrischen Feldes

Wir betrachten eine Punktladung Q im Ursprung. $A = \partial S_r$ sei die Oberfläche einer Kugel (Sphäre) mit dem Radius r und dem Zentrum im Ursprung.

Es ist bekannt: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r$ Es gilt:

$$\begin{aligned} \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \oiint_A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{A} = \oiint_A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint_A dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{Q}{\epsilon_0} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV \end{aligned}$$

Andererseits ist mit der Ladungsdichte q :

$$Q = \iiint_V q(x, y, z) dV = \iiint_V \frac{dQ}{dV} dV, \quad q = \frac{dQ}{dV}$$

$$\leadsto \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V q(x, y, z) dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV \Rightarrow \iiint_V \frac{q(x, y, z)}{\epsilon_0} dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt nun: $\frac{q}{\epsilon_0} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\frac{\iiint_{\Delta V} q}{\Delta V} \epsilon_0}{\Delta V} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{E} dV}{\Delta V} = \operatorname{div} \vec{E}$

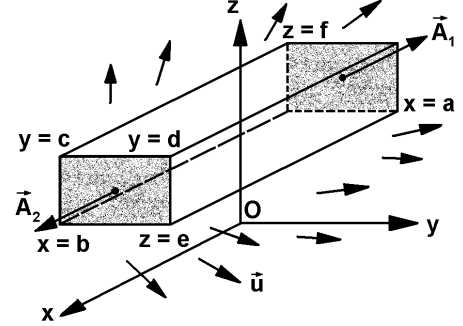
Konsequenz: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{dV}$

6.6 Beweiseideen zu den Integralsätzen

6.6.1 Zum Satz von Gauss

1. Für einen Quader:

Der Quader sei in achsenparalleler Lage. Wir berechnen den Fluss durch eine Seitenfläche A_1 gegenüber von A_2 :



$$\begin{aligned}\vec{A}_1 &= \vec{n}_1 \cdot A_1, \quad \Phi_{A_1} = \iint \vec{u} \cdot d\vec{A} = \big|_{x=a} \iint \begin{pmatrix} u_1(a, y, z) \\ u_2(a, y, z) \\ u_3(a, y, z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy dz = \underbrace{\iint -u_1(a, y, z) dy dz}_{=dA} \\ &= - \int_{z=e}^f \int_{y=c}^d -u_1(a, y, z) dy dz\end{aligned}$$

Analog für A_2 :

$$\begin{aligned}\Phi_{A_2} &= \iint \vec{u} \cdot d\vec{A} = \big|_{x=b} \iint \begin{pmatrix} u_1(b, y, z) \\ u_2(b, y, z) \\ u_3(b, y, z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy dz = \int_{z=e}^f \int_{y=c}^d u_1(b, y, z) dy dz \\ \Rightarrow \Phi_{A_1 \cup A_2} &= \int_{e,c}^f \int_{y=c}^d (u_1(b, y, z) - u_1(a, y, z)) dy dz\end{aligned}$$

Andererseits gilt aber:

$$\begin{aligned}\iint_V \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} dV &= \int_{e,c}^f \int_{y=c}^d \left(\int_a^b \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} dx \right) dy dz = \int_{e,c}^f \int_{y=c}^d (u_1(x, y, z) \big|_a^b) dy dz \\ &= \int_{e,c}^f \int_{y=c}^d (u_1(b, y, z) - u_1(a, y, z)) dy dz\end{aligned}$$

\leadsto Das ist der selbe Ausdruck wie oben!

$$\leadsto \Phi_{A_1 \cup A_2} = \iiint_V \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} dV$$

Für die restlichen Flächenpaare A_3 und A_4 sowie A_5 und A_6 können wir genauso schliessen.

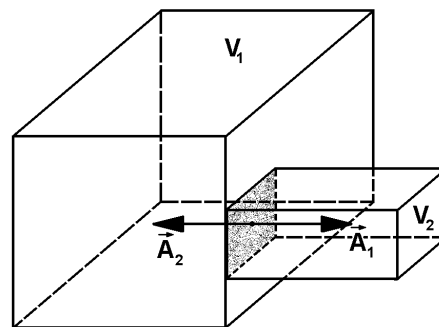
$$\leadsto \Phi_{A_3 \cup A_4} = \iiint_V \frac{\partial u_2(x, y, z)}{\partial y} dV, \quad \Phi_{A_5 \cup A_6} = \iiint_V \frac{\partial u_3(x, y, z)}{\partial z} dV$$

Addieren wir die drei erhaltenen Volumenintegrale, so erhalten wir den Satz von Gauss für den achsenparallelen Quader:

$$\Phi_A = \Phi_{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6} = \iiint_V \left(\frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial u_3(x, y, z)}{\partial z} \right) dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{u} dV$$

2. Für Körper, die sich in achsenparallele Quader zerschneiden lassen:

(Wir benutzen die Tatsache, dass Integrale lineare Operatoren sind.)



$$\iiint_V \dots = \iiint_{V_1} \dots + \iiint_{V_2} \dots$$

$$\int_{A_{tot}} \dots = \int_{A_{V_1} \setminus A_1} \dots + \int_{A_{V_2} \setminus A_2} \dots = \int_{A_{V_1}} \dots - \underbrace{\int_{A_1} \dots}_{''=C''} + \int_{A_{V_2}} \dots - \underbrace{\int_{A_2} \dots}_{''=-C''} = \int_{A_{V_1}} \dots + \int_{A_{V_2}} \dots$$

$$\Rightarrow \iiint_V \dots = \iiint_{V_1} \dots + \iiint_{V_2} \dots = \int_{A_{V_1}} \dots + \int_{A_{V_2}} \dots = \int_{A_{tot}} \dots$$

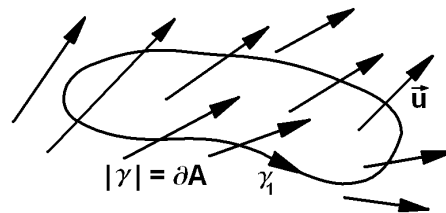
~> Satz von Gauss richtig für zusammengesetzte achsenparallele Quader.

3. Dieses Argument lässt sich jetzt durch Induktion ausdehnen: ~> Der Satz von Gauss ist richtig für beliebig viele zusammengesetzte achsenparallele Quader.
4. Bei beliebigen Körpern kann man sich V durch Quader approximiert denken, wie das bei mehrdimensionalen Integralen auch gemacht wird. Falls V und \vec{u} genügend brav sind, wird der Fehler bei der Approximation vernachlässigbar.

6.6.2 Zum Satz von Stokes

Spezialfall 1

Sei A eine geschlossene Fläche. Wenn wir $|\gamma|$ auf einen Punkt zusammenziehen, so entsteht ein Nullweg $|\gamma|_0$.



$$\sim \oint_{|\gamma|_0} \vec{u} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \Phi_{rot \vec{u}}, \quad \iint_{A_0} \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} = 0$$



Spezialfall 2

Sei ein gleichmäßig rotierender Körper gegeben.

$$\leadsto \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \text{rot } \vec{v} = 2\omega \parallel \vec{A}, \quad \vec{v} \parallel d\vec{r}$$

Sei S ein Rotationskreis.

$$1. \iint_C \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} = (+) \iint_C |\text{rot } \vec{v}| \cdot |d\vec{A}| = 2|\vec{\omega}| \iint_C |d\vec{A}| = 2|\vec{\omega}| R^2 \pi = 2\pi \cdot |\vec{v}| \cdot R$$

$$2. \oint_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial C} |\vec{v}| \cdot |d\vec{r}| = |\vec{v}| \cdot \oint_{\partial C} |d\vec{r}| = |\vec{v}| \cdot 2R\pi = \Rightarrow \oint_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_C \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

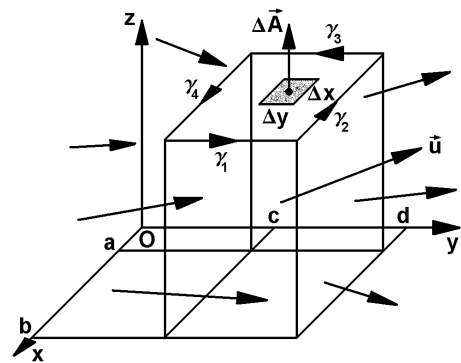
Spezialfall Rechteck

Geg.: Rechteck in achsenparalleler Lage.

Sei $z = e = \text{const.}$,

$$|\gamma| = \bigcup_{i=1}^4 |\gamma|_i, \quad d\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dx dy \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (u_3)'_y - (u_2)'_z \\ (u_1)'_z - (u_3)'_x \\ (u_2)'_x - (u_1)'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dx dy \end{pmatrix} = ((u_2)'_x - (u_1)'_y) dx dy$$



$$\Rightarrow \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} = \iint_A ((u_2)'_x - (u_1)'_y) dx dy = \int_{c,a}^{d,b} (u_2)'_x dx dy - \int_{a,c}^{b,d} (u_1)'_y dy dx$$

$$= \int_c^d u_2(x, y, e) \Big|_{x=a}^{x=b} dy - \int_a^b (x, y, e) u_1 \Big|_c^d dx$$

$$= \int_c^d u_2(b, y, e) dy + \int_d^c u_2(a, y, e) dy + \int_a^b u_1(x, c, e) dx + \int_b^a u_1(x, d, e) dx$$

Andererseits gilt:

$$\text{Auf } |\gamma|_1: d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_2(b, y, e) dy$$

$$\text{Auf } |\gamma|_2: d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_1(x, d, e) dx$$

$$\text{Auf } |\gamma|_3: d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_2(a, y, e) dy$$

$$\text{Auf } |\gamma|_4: d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_1(x, c, e) dx$$

(Alle Vorzeichen '+'. Die Durchlaufrichtung wird durch die Integrationsgrenzen bestimmt.)

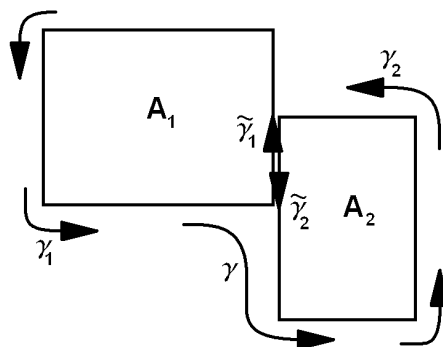
$$\Rightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_{|\gamma|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_{|\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_{|\gamma|_3} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_{|\gamma|_4} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_c^d u_2(b, y, e) dy + \int_b^a u_1(x, d, e) dx + \int_a^c u_2(a, y, e) dy + \int_d^c u_1(x, c, e) dx = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \quad ((\text{Der errechnete Ausdruck stimmt mit dem oben überein!}))$$

$$) \rightsquigarrow \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A}$$

Figur aus Rechtecken zusammengesetzt

Es gilt (vgl. Fig.):

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_2 &= -\tilde{\gamma}_1 \\ \Rightarrow \iint_A \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} &= \int_{A_1 \cup A_2} \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} \\ &= \iint_{A_1} \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} + \iint_{A_2} \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} \\ &= \oint_{|\gamma|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_1 \setminus |\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\tilde{\gamma}|_1 = -|\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2 \setminus |\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} \\ &= \oint_{|\gamma|_1 \setminus |\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2 \setminus |\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} - \oint_{|\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_1 \setminus |\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2 \setminus |\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} \\ \Rightarrow \iint_A \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} &= \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

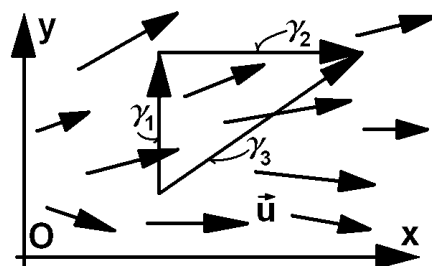


Dieses Argument lässt sich jetzt durch Induktion ausdehnen: \rightsquigarrow Der Satz von Stokes ist richtig für beliebig viele zusammengesetzte achsenparallele Rechtecke.

Bei beliebigen Flächen mit vernünftigem Rand kann man sich A durch Rechtecke approximiert denken, wie das bei mehrdimensionalen Integralen auch gemacht wird. Falls A und \vec{u} genügend brav sind, wird der Fehler bei der Approximation vernachlässigbar.

Dabei muss man sich noch überlegen, dass achsenparallele Wege durch andere ersetzt werden dürfen, dass also gilt:

$$\oint_{|\gamma|_1 \cup |\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_3} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

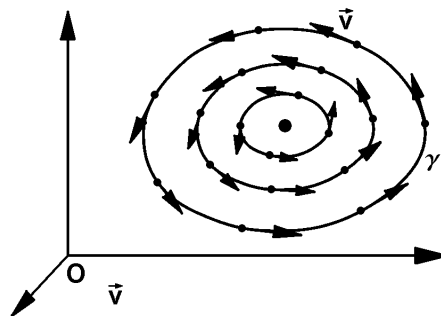


6.7 Zirkulation, Vektorpotential

6.7.1 Zirkulation und Rotation

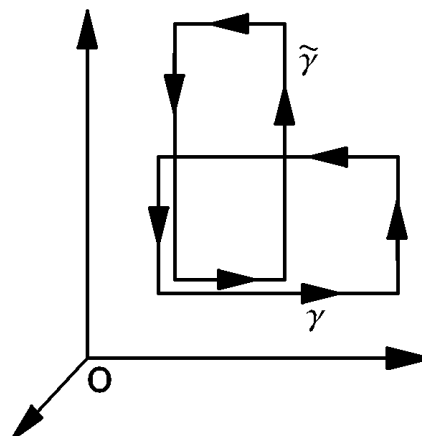
Definition der Zirkulation

Wir betrachten einen **Wirbel** in einem **Fluid** (d.h. in einer idealen Flüssigkeit oder auch in einem idealen Gas), dessen Geschwindigkeitsfeld gegeben ist. Dabei ist zu bemerken, dass jedes andere Feld formal immer als Geschwindigkeitsfeld interpretiert werden kann.



Sei $|\gamma|$ die Spur eines geschlossenen Weges um ein Zentrum, die eine Strömungslinie beschreibt. \vec{v} sei der Geschwindigkeitsvektor, der tangential zur Strömungslinie gerichtet ist.

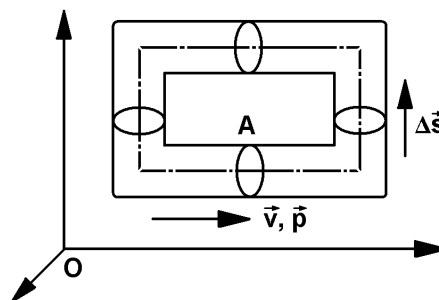
Zur Vereinfachung der Situation sei $|\gamma|$ ein Rechteck. Solche Rechtecke können verschieden geformt sein. Sei der Umfang s und \vec{v} sei konstant.



Idee: Wir lassen uns von der Idee leiten, dass das, was wir unter Strömung verstehen könnten mit s und auch mit \vec{v} proportional grösser wird. Als **Mass für die Strömung** auf einer Stromlinie könnte man daher hier $Z = \vec{v} \cdot s$ verwenden. Dass dieses Z seine Berechtigung hat, sieht man an seiner physikalischen Bedeutung:

Sei A der Querschnitt eines „Strömungsschlauches“ mit dem darin strömenden Volumen V .

Wir berechnen den Impuls des darin strömenden Volumens pro Querschnitt:



$$\frac{p}{A} = \frac{m_{total} \cdot |\vec{v}|}{A} = \frac{\rho \cdot V \cdot |\vec{v}|}{A}, \quad m_{total} = \rho \cdot V, \quad V = s \cdot A$$

s ist der mittlere Umfang.

$$\leadsto \frac{p}{A} = \frac{\rho \cdot s \cdot A \cdot |\vec{v}|}{A} = \rho \cdot s \cdot |\vec{v}| = \rho \cdot Z$$

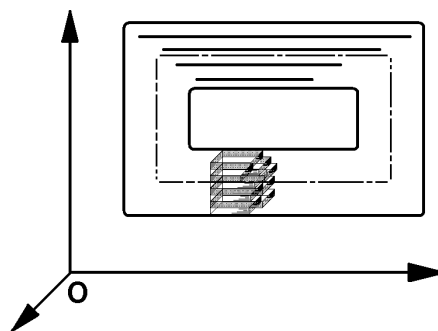
Für $\rho = 1$ gilt also: $Z = \vec{v} \cdot s = \frac{p}{A}$

Allgemeinfall: $Z = \vec{v} \cdot s = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{p}{A}$

Z ist somit der **Impuls pro Querschnitt** in einem **Strömungsschlauch** mit **Einheitsdichte**. Oder anders gesagt: Z ist die **Flächendichte des Impulses bei normierter Dichte**. Wir nennen Z **Zirkulation**.

Verallgemeinerung:

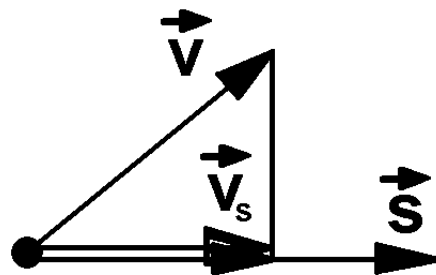
Die folgende Ausdehnung ist unproblematisch:



$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{p}{A} = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta p_i = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta m_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta V_i \cdot \rho \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta s_i \cdot A \cdot \rho \cdot \vec{v}_i \\ &= \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot A \cdot \rho \sum \Delta s_i \cdot \vec{v}_i = \sum \vec{v}_i \cdot \Delta s_i \rightarrow Z = \int_{s_1}^{s_2} |\vec{v}| ds \end{aligned}$$

Für $\vec{v} \nparallel \Delta \vec{s}$ trägt nur die Komponente \vec{v}_s zum Impuls in Richtung $\Delta \vec{s}$ bei:

$$|\vec{v}_s| \cdot |\Delta \vec{s}| = |\vec{v}| \cdot |\Delta \vec{s}| \cdot \cos(\theta) = \vec{v} \cdot \Delta \vec{s}$$



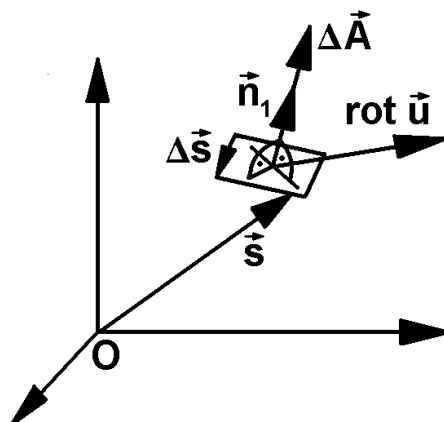
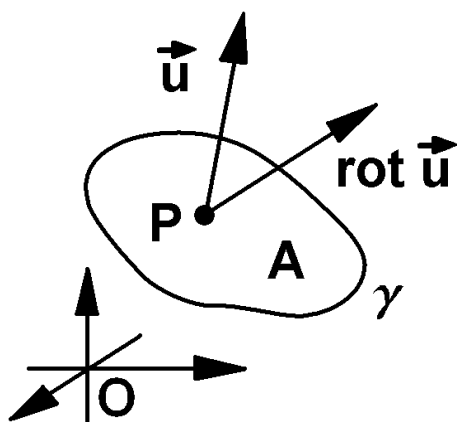
Das bedeutet, dass der Ausdruck unter dem Integral bei der Zirkulation $\vec{v} \cdot d\vec{s}$ wird: $\leadsto \int_{s_1}^{s_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$

Mit dieser Formel kann man die Zirkulation für beliebige geschlossene Wege und beliebige Vektorfelder \vec{u} definieren. Dabei ist die Bedeutung als Flächendichte des Impulses längs einer Strömungslinie von den Fluiden entlehnt:

Definition:

$$Z = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{s} \text{ heisst } \mathbf{Zirkulation}.$$

Bedeutung der Rotation



Nach Stokes gilt nun: $Z = \int_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A}$

Für sehr kleine $A = \Delta A$ gilt: $\Delta \vec{A} = \vec{n} \cdot \Delta A$

Und nach dem Mittelwertsatz:

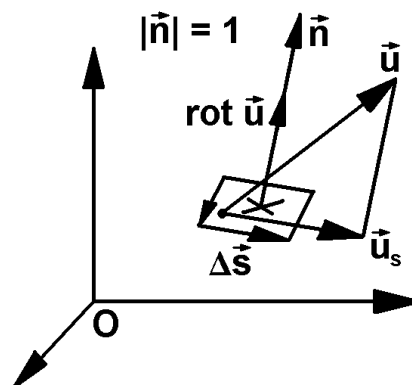
$$Z = \iint_{\Delta A} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \approx \text{rot } \vec{u}(P_0) \cdot \Delta \vec{A} = \text{rot } \vec{u}(P_0) \cdot \vec{n} \cdot \Delta A \Rightarrow \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} \approx \frac{Z}{\Delta A} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \int_{|\gamma|_{\Delta A}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Exakt: $\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \cdot \int_{|\gamma|_{\Delta A}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$

Sei $\vec{n} = 1 \leadsto$

$$\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = |\text{rot } \vec{u}| \cdot 1 \cdot \cos(\theta) = |\text{rot } \vec{u}| \cdot \cos(\theta)$$

$$\text{rot } \vec{u} \parallel \vec{n} \parallel \vec{A}, \theta = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = 1 \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = |\text{rot } \vec{u}|$$



\leadsto **Konsequenz:** Bedeutung von $|\text{rot } \vec{u}|$:

$$\text{rot } \vec{u} \parallel \vec{n} \Rightarrow |\text{rot } \vec{u}| = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \cdot \int_{|\gamma|_{\Delta A}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

D.h. $|\text{rot } \vec{u}|$ ist der maximale Grenzwert von $\frac{Z(\Delta A)}{\Delta A}$ bei $\Delta A \rightarrow 0$ oder der Grenzwert der Zirkulation pro umströmte Fläche ΔA bei $\Delta A \rightarrow 0$ und optimal gerichtetem Flächennormalenvektor \vec{n} .

Konsequenz: Bei $\Delta A \rightarrow P_0$ kann $|\text{rot } \vec{u}|$ als **lokale Zirkulation pro Fläche in P_0** oder kurz als Zirkulation in P_0 verstanden werden. Damit hat man ein **Mass für die Wirbelbewegung in P_0** . $\text{rot } \vec{u}$

gibt dann die Richtung der Fläche, in der diese Wirbelbewegung stattfindet.

Wenn \vec{u} kein Geschwindigkeitsfeld ist, kann man es formal immer als solches umdeuten.

6.7.2 Das Vektorpotential

Definition

Problem: Berechne $\Phi_A = \iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = ?$

Dabei ist A eine beliebige vernünftige Fläche mit einer Randkurve $|\gamma|$.

Idee: Suche eine Funktion \vec{v} mit $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$. Dann gilt nach dem Satz von Stockes:

$$\Phi_A = \iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \iint_A \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint_{|\gamma|} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Man hat somit jetzt das Problem, das Vektorfeld \vec{v} zu finden!

Problem: **Geg.:** $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{x})$

Ges.: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$ mit $\text{rot } \vec{v} = \vec{\omega}$

Definition: Sei $\text{rot } \vec{v} = \vec{\omega} \rightsquigarrow \vec{v}$ heisst **Vektorpotential** zu $\vec{\omega}$

Eindeutigkeit

Sei $f = f(x, y, z)$ eine beliebige Potentialfunktion. Wir wissen, dass dann gilt: $\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$

$$\rightsquigarrow \text{rot}(\vec{v} + \text{grad } f) = \text{rot}(\vec{v}) + \text{rot}(\text{grad } f) = \text{rot}(\vec{v}) + \vec{0} = \text{rot}(\vec{v})$$

(rot ist bekanntlich ein linearer Operator.)

\rightsquigarrow **Konsequenz:** \vec{v} ist nicht eindeutig.

Lemma: **Vor.:**

\vec{v} Vektorpotential zu $\vec{\omega}$
 f beliebige Potentialfunktion

Beh.:

$\vec{v} + \text{grad } f$ ist ebenfalls Vektorpotential zu $\vec{\omega}$

Wichtig: Insbesondere lässt sich eine Komponente eines Vektorpotentials beliebig aus der Menge vernünftiger Funktionen auswählen:

Bsp.: **Geg.:** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad v_3(x, y, t)$

$$\leadsto \text{ Sei } f(x, y, z) = - \int_{z_0}^z v_3(x, y, t) dt \Rightarrow \operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ -v_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$\leadsto \vec{v}^*(x, y, z) = \vec{v} + \operatorname{Grad} f$ ist wieder Vektorpotential.

$$\begin{aligned} \leadsto \vec{v}^*(x, y, z) &= \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ -v_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ v_2(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ v_3(x, y, z) - v_3(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ v_2(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz:

Vor.:

\vec{v} Vektorpotential zu $\vec{\omega}$,

$$\text{Z.B. } f(x, y, z) := - \int_{z_0}^z v_3(x, y, t) dt$$

Beh.:

$\vec{v}^*(x, y, z) = \vec{v} + \operatorname{Grad} f$ Vektorpotential, dessen 3. Komponente 0 ist
Entsprechend für die andern Komponenten

Existenz

Für ein beliebiges vernünftiges Vektorfeld \vec{v} gilt: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$

$\leadsto \vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v} \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{\omega}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0 \leadsto$ Notwendige Bedingung für die Existenz eines Vektorpotentials!

Satz:

Beh.:

Zum Vektorfeld $\vec{\omega}$ existiere ein Vektorpotential \vec{v}

Beh.:

$\operatorname{div} \vec{\omega} = 0$ notwendig

Konstruktion des Vektorpotentials

Geg.: $\vec{\omega}$

Es muss gelten: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_3)_y' - (v_2)_z' \\ (v_1)_z' - (v_3)_x' \\ (v_2)_x' - (v_1)_y' \end{pmatrix}$

Sei $v_3 = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(v_2)_z' \\ (v_1)_z' \\ (v_2)_x' - (v_1)_y' \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = -\int \omega_1 dz + C_2, \quad v_1 = \int \omega_2 dz + C_1$

\leadsto Genauer: $v_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt + C_2(x, y)$

\leadsto Ansatz: $C_2(x, y) = 0 \leadsto \omega_2 = (v_1)_z'$ und

$\omega_3 = (v_2)_x' - (v_1)_y' = (-\int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt + C_2(x, y))_x' - (v_1)_y' = \int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t)_x' dt + C_2(x, y)_x'$

\leadsto Es gilt:

$$\begin{aligned} v_1(x, y, z) &= \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, t) dt + C_1(x, y) = \int_{y_0}^y (v_2)_x'(x, t, z) dt - \int_{y_0}^y (\omega_3)_x'(x, t, z) dt + C_3(x, z) \\ &= -\int_{y_0}^y (\omega_3)(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial x} \left(-\int_{z_0}^z \omega_1(x, t, s) ds + \underbrace{C_2(x, t)}_{=0} \right) dt \\ &= -\int_{y_0}^y (\omega_3)(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (-\omega_1(x, t, s))_x' ds dt \end{aligned}$$

Verwende:

$\text{div}(\text{rot } \vec{v}) = \text{div}(\vec{\omega}) = 0 \Rightarrow (\omega_1)_x' + (\omega_2)_y' + (\omega_3)_z' = 0 \Rightarrow (\omega_1)_x' = -(\omega_2)_y' - (\omega_3)_z'$

$$\begin{aligned} \leadsto v_1(x, y, z) &= -\int_{y_0}^y (\omega_3)(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (-(\omega_2)_y'(x, t, s) - (\omega_3)_z'(x, t, s)) ds dt \\ &= -\int_{y_0}^y (\omega_3)(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y (\omega_2)_y'(x, t, s) dt ds + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (\omega_3)_z'(x, t, s) ds dt \\ &= -\int_{y_0}^y (\omega_3)(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) - \omega_2(x, y_0, s) ds + \int_{y_0}^y \omega_3(x, t, z) - \omega_3(x, t, z_0) dt \\ &= C_3(x, z) + \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) - \omega_2(x, y_0, s) ds + \int_{y_0}^y -\omega_3(x, t, z_0) dt \\ &= C_4(x, z) + \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) ds + \int_{y_0}^y -\omega_3(x, t, z_0) dt \quad (v_1)_z' = \omega_2 \Rightarrow C_4(x, z) = C_4(x) \\ &\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) ds + \int_{y_0}^y -\omega_3(x, t, z_0) dt + C_4(x) \\ -\int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz:**Vor.:**

$$\text{Sei } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{v}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ fix}$$

Beh.:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) ds - \int_{y_0}^y \omega_3(x, t, z_0) dt + C(x) \\ - \int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein mögliches Vektorpotential

$$\text{Bsp.: Sei } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z b ds - \int_{y_0}^y c dt + C(x) \\ - \int_{z_0}^z a dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy + C(x) \\ -az \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 - (-a) \\ b - 0 \\ 0 - (-a) \end{pmatrix} = \vec{\omega} \quad \text{😊😊}$$

Kapitel • Chapitre 7

Rayleigh–Quotient (Anhang 1) — Annexe 1 (sans traduction)

- *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. Momentanément, la traduction française manque encore.*

7.1 Grundlagen zur Methode mit dem Rayleigh-Quotienten

7.1.1 Übersicht: Problem und Ziel

Im Rahmen der Behandlung der Knickung mag bald auch das Problem auftreten, die Knickfestigkeit eines Trägers mit grossem Eigengewicht und konstantem Querschnitt zu berechnen. Dabei stösst man auf ein Randwertproblem mit einer Differentialgleichung der folgenden Art:

$$y''(x) = -\frac{M(y(x), x)}{(E I_y)}, \quad M(y(x), x) = (F + \rho \cdot A \cdot x) \cdot y(x), \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Im Spezialfall $F = 0$ und $\frac{M(y(x), x)}{(E I_y)} = \frac{(F + \rho \cdot A \cdot x) \cdot y(x)}{(E I_y)} = \frac{\rho \cdot A \cdot x \cdot y(x)}{(E I_y)} = k \cdot x \cdot y(x)$ erhalten wir damit das Randwertproblem:

$$y''(x) = -k \cdot x \cdot y(x), \quad k > 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Die Lösung dieses Problems ist allerdings nicht eindeutig, denn setzt man mit einer Lösung $y(x)$ eine andere Lösung $C \cdot y(x)$ ($C =$ beliebige Konstante) in das Randwertproblem ein, so stimmen alle Gleichungen immer noch.

Diese Aufgabe kann man als Eigenwertproblem lesen. In der Praxis stellt sich hier das Problem, den kleinsten möglichen Eigenwert $k = \frac{\rho \cdot A}{E I_y}$ bei gegebenen ρ und E zu berechnen, d.h. $\frac{A}{I_y}$ und damit den Querschnitt zu bestimmen, bei der sich eine Biegelinie einstellt, welche der gegebenen Differentialgleichung genügt. Z.B. im Falle eines Rechteckquerschnitts ist $I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ und $A = b \cdot h$, d.h. $\frac{A}{I_y} = \frac{12}{h^2}$. Macht man h und damit den Querschnitt kleiner, so wird der Quotient und damit der Eigenwert grösser. Da es sich um die Grenzlage der Biegelinie handelt, wird bei kleinerem Querschnitt die Spannungen auf den Querschnitt grösser, das Grenzmass der Biegelinie wird also überschritten. Damit kommt es bei Vergrösserung von k zum Bruch. Es ist daher unbedingt erforderlich, das kleinste positive k zu finden, so dass das Randwertproblem erfüllt ist.

Dem Autor ist aufgefallen, dass in der lokal zugänglichen technischen Literatur zur Lösung des Problems auch mit der Methode mit dem Rayleigh-Quotienten gearbeitet wird, ohne dass sich korrekte Hinweise auf die mathematische Gültigkeit dieser Methode finden lassen. Um dieser Situation des methodischen Defizits ein Ende zu bereiten, wird die Gültigkeit der Methode in dieser Darlegung nachgewiesen.

Bei der Behandlung der Angelegenheit kommt man aber nicht darum herum, sich erst einige tiefere Grundlagen aus der zugehörigen höheren Mathematik zu erarbeiten.

7.1.2 Theorie bezüglich Rayleigh-Quotient

Bilinearformen und Hilbertraum

Unter einem **Operator** wollen wir in unserem Zusammenhang eine Funktion verstehen, deren Definitionsbereich nicht nur Zahlen, sondern auch Funktionen selbst sein können.

Bsp.: Sei $A(f) = \int_a^b f(x) dx$. A ist hier ein Operator $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$, also eine Abbildung der Menge der integrierbaren Funktionen \mathcal{F} in die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen. Analog können wir das Skalarprodukt

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ als Operator auf der Menge der Vektorpaare $V^2 = V \times V$ auffassen, der jedem Vektorpar eine reelle Zahl (eben das Skalarprodukt) zuordnet.

Wir betrachten nun Operatoren A , deren Definitionsbereiche Paarmengen $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ (Mengen von Paaren $(m_1, m_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$) sind. Der Bildbereich sei ein Körper K , so wie etwa \mathbb{R} . Sonst stellen wir im Moment keine weiteren Bedingungen. Solche Operatoren haben dann immer zwei Argumente, hier sind es (m_1, m_2) , und ein Bild, hier $z \in K \rightsquigarrow A : (m_1, m_2) \mapsto z$.

Speziell seien $\mathcal{M}_1 = V$ und $\mathcal{M}_2 = W$ Vektorräume sowie K wie erwähnt ein Körper. Sei $v \in V$, $w \in W$, $k = \lambda \in K$.

Definition: Ein Operator $A : (v, w) \mapsto k$ heisst **Bilinearform**, wenn er linear in v und auch linear in w ist.

Das bedeutet, dass folgende Regeln (**Linearitätsregeln**) gelten sollen:

1. $A(v_1 + v_2, w) = A(v_1, w) + A(v_2, w)$
2. $A(v, w_1 + w_2) = A(v, w_1) + A(v, w_2)$
3. $A(\lambda v, w) = \lambda A(v, w) = A(v, \lambda w)$

Definition: Ein Operator $A : (V \times V) \mapsto K$ heisst **symmetrisch**, wenn $A(v_1, v_2) = A(v_2, v_1)$ gilt.

Man beachte, dass bei symmetrischen Operatoren $V \times W = V \times V$, d.h. $V = W$ gilt.

Definition: Eine Bilinearform $A : (V, V) \mapsto K = \mathbb{R}$ heisst **positiv definit**, wenn für alle $v \in V$ (also $v \neq 0$) gilt: $A(v, v) > 0$.

Bei einer positiv definiten Bilinearform muss somit aus $A(v, v) = 0$ die Bedingung $v = 0$ folgen.

Definition: Eine Bilinearform $A : (V, V) \mapsto K = \mathbb{R}$ heisst **positiv semidefinit**, wenn für alle $v \in V$ gilt: $A(v, v) \geq 0$.

Das **Standardbeispiel** einer positiv definiten Bilinearform ist das **Skalarprodukt** von geometrischen Vektoren. Im Weiteren wollen wir uns aber hier in der Anwendung nicht speziell mit solchen Bilinearformen auseinandersetzen, deren Argumente geometrischen Vektoren sind. Unser Interesse gilt vielmehr den Funktionen statt den genannten Vektoren. Momentan nehmen wir aber keinen unmittelbaren Bezug auf die Natur resp. die Interpretation der Elemente des Vektorraumes V . Wir erwähnen nur, dass hier Funktionenräume bezüglich Addition und Multiplikation mit Skalaren Vektorräume sind, welche somit immer eine Basis besitzen.

Definition:

Eine **Skalarprodukt** (inneres Produkt) auf einem Vektorraum V ist eine Funktion

$$S : (V \times V) \mapsto K = \mathbb{C},$$

die jedem Vektorpaar (v_1, v_2) aus V^2 eine komplexe Zahl $\langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{C}$ zuordnet und die folgende Bedingungen erfüllt:

1. Sesquilinearität:

$$(a) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$(b) \quad \langle z, x + y \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle$$

$$(c) \quad \langle \bar{\lambda} x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$$

2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (hermitesch)

3. $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positiv definit)

Bemerkung:

Wenn V reell ist und $K = \mathbb{R}$ gilt, so verwandeln sich die konjugiert komplexen Werte in obigen Formeln in reelle Werte.

Für Skalarprodukte gilt allgemein der wichtige Satz:

Satz:**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

Beweis:

Siehe unter dem nachfolgenden Link:

http://de.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Schwarzsche_Ungleichung.

Definition:

Eine **Norm** auf einem Vektorraum V ist eine Funktion

$$\mathcal{N} : v \mapsto \|v\| \in \mathbb{R},$$

die jedem Element (Vektor) von V eine nichtnegative Zahl $\in \mathbb{R}_0^+$ zuordnet und die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (Definitheit)

2. $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \Leftrightarrow v = 0$ (Homogenität)

3. $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkung:

Die **Norm** ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der **Länge eines Vektors**. Eine Verallgemeinerung des **Abstands**begriffs, d.h. des Begriffs des **Abstands zwischen zwei Punkten** in einem Punktraum wird dagegen durch den Begriff der **Metrik** gegeben (siehe unten).

Bemerkung:

Skalarproduktnorm: Es ist einfach einzusehen, dass

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm ist. (Für den Beweis muss man dabei auf die Ungleichung von Cauchy-Schwarz zurückgreifen!)

Definition:

Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : (X \times X) \rightarrow K = \mathbb{R}$ heisst **Metrik**, wenn sie die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $d(x, x) = 0$ (identische Punkte haben Abstand 0)
2. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
(nicht identische Punkte haben nicht Abstand 0)
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Folgerung:

Eine Norm $\| \cdot \|$ auf einem Vektorraum induziert durch die Definition $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik.

Definition:

Ein bezüglich einer gegebenen Metrik **vollständiger** oder **abgeschlossener** Raum X ist ein Raum, in dem jede Cauchy-Folge im Raum gegen einen Grenzpunkt konvergiert, welcher selbst im Raum X drin liegt.

Im Folgenden beachten wir, dass eine Funktionenmenge einen Vektorraum bilden kann bezüglich der Addition der Funktionswerte bei gleichem Argument und der Streckung mittels Skalaren. Dazu genügt es schon, die lineare Hülle einer endlichen Funktionenmenge (Erzeugendensystem) zu nehmen. Im Erzeugendensystem findet man dann eine endliche Basis (minimal grosses Erzeugendensystem). (Vgl. Kurs „Lineare Algebra“.)

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGdf.pdf>

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGd.pdf>

Definition:

Ein **Hilbertraum** ist ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt, welcher vollständig ist bezüglich der durch die Skalarproduktnorm induzierte Metrik ($B(x, x) := \langle x, x \rangle = \|x\|^2$).

Eigenwertgleichung und Bilinearform im Hilbertraum

Seien nun $A(v_1, v_2)$ und $B(v_1, v_2)$ zwei symmetrische, positiv definite Bilinearformen auf $V \times V$, wobei V = reeller Hilbertraum. (Damit sind durch A und B Skalarprodukte gegeben.)

Inspiziert durch die eingangs erwähnte Differentialgleichung sei weiter eine Eigenwertgleichung $\mathcal{F}(\varphi) = \lambda \mathcal{G}(\varphi)$ gegeben, von welcher wir wissen, dass sie in eine Gleichung mit den obigen Bilinearformen umgewandelt werden kann, die wir wie folgt schreiben:

$$A(\varphi, h) = \lambda B(\varphi, h) \quad \forall \varphi \in U \subseteq V \quad \text{oder auch} \quad \mu A(\varphi, h) = B(\varphi, h), \quad \mu = \frac{1}{\lambda}$$

h ist dabei ein Hilfsvektor oder Hilfsfunktion, U ein Unterraum von V , φ ist Eigenfunktion, λ ist Eigenwert. (Vektoren kann man als spezielle, nämlich als konstante Funktionen betrachten.)

Für zwei angenommene Eigenfunktionen $\varphi_i, \varphi_j, i \neq j$ zu $\lambda_i \neq \lambda_j$ gilt nun:

$$\lambda_j B(\varphi_j, \varphi_i) = A(\varphi_j, \varphi_i) = A(\varphi_i, \varphi_j) = \lambda_i B(\varphi_i, \varphi_j) = \lambda_i B(\varphi_j, \varphi_i) \Rightarrow \underbrace{(\lambda_j - \lambda_i)}_{\neq 0} B(\varphi_j, \varphi_i) = 0$$

Somit folgt unter den gemachten Voraussetzungen: $B(\varphi_i, \varphi_j) = 0$.

Satz: Gegeben sei das oben in diesem Abschnitt genannte Problem. Zu zwei Eigenfunktionen φ_i, φ_k mit verschiedenen Eigenwerten λ_i, λ_k gilt $B(\lambda_i, \lambda_k) = 0$

Weiter sieht man sofort:

Satz: Die Eigenfunktionen zum selben mehrfachen Eigenwert λ erzeugen einen linearen Raum.

Beweis:

$$\begin{aligned} A(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2, h) &= k_1 A(\varphi_1, h) + k_2 A(\varphi_2, h) = k_1 \cdot \lambda \cdot B(\varphi_1, h) + k_2 \cdot \lambda \cdot B(\varphi_2, h) \\ &= \lambda \cdot (k_1 B(\varphi_1, h) + k_2 B(\varphi_2, h)) = \lambda \cdot (B(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2, h)) \end{aligned}$$

Vor.:

Sei nun für ein beliebiges $u \in U$, $U =$ Unterraum von V : $|u| = \sqrt{A(u, u)}$, $\|u\| = \sqrt{B(u, u)}$.

Sei weiter:

1. U abgeschlossen bezüglich der eben definierten Metrik $|\cdot|$.

D.h. für eine konvergente Folge $\langle u_n \rangle$ gilt immer $u_n \rightarrow u \in U$, wobei es sich hier um Konvergenz bezüglich der genannten Metrik handelt $|u| = \sqrt{A(u, u)}$, d.h. um **Konvergenz im Mittel**.

2. $\exists_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \forall_{u \in U} : \|u\| \leq \alpha |u|$ d.h. $B(u, u) \leq \alpha^2 \cdot A(u, u)$.

Aus $|u_n| \rightarrow 0$ folgt also $\|u_n\| \rightarrow 0$, aber nicht umgekehrt: $\|u_n\|$ konvergiert stärker als $|u_n|$.

3. $\forall_{\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U} \forall_{h \in U} : \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), h) = 0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0 \right)$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt der folgende Satz:

Satz:

1. Das Eigenwertproblem $A(\varphi, h) = \lambda B(\varphi, h) \forall_{\varphi \in U \subseteq V}$ hat unendlich viele positive Eigenwerte endlich grosser Vielfachheit:
 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ mit $\lambda_n \rightarrow \infty$.
2. Es existiert ein System von Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ mit $B(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{i,k}$, $A(\varphi_i, \varphi_k) = \lambda_i B(\varphi_i, \varphi_k) = \lambda_i \delta_{i,k}$
3. Sei $u \in U$ beliebig und $c_k := B(u, \varphi_k)$ (Fourier-Koeffizient) \leadsto
 $B(u, u) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$, $A(u, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2$

Wer sich in der Theorie der Fourierreihen mühelos bewegen kann, dem mögen die hier aufgestellten Behauptungen wohl nicht allzu grosse Hindernisse bedeuten. Ansonst sei für den Beweis auf die Literatur verwiesen.¹

¹Lit.: Showalter, „Hilbert Spaces Methods for Partial Differential Equations“, Pitman, London

Unter den gemachten Annahmen bilden daher die Eigenwerte in unserem Eigenwertproblem eine unendlich positive Folge, welche gegen ∞ strebt. Die Vielfachheit aller Eigenwerte ist endlich. Und die Eigenfunktionen liefern uns die Fourierkoeffizienten.

Wir definieren nun:

Definition: $R(u) = \frac{A(u, u)}{B(u, u)}$ heisst **Rayleigh-Quotient** zu unserem EWP.

Für $R(u)$ gilt nun: $\lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1 c_k^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 = A(u, u) = R(u) \cdot B(u, u) = R(u) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$

\leadsto Daher gilt: $0 < \lambda_1 \leq R(u)$.

Andererseits gilt für φ_1 : $\lambda_1 c_1^2 = A(\varphi_1, \varphi_1) = R(\varphi_1) \cdot B(\varphi_1, \varphi_1) = R(\varphi_1) \cdot c_1^2 \Rightarrow \lambda_1 = R(\varphi_1)$

Satz: $\lambda_1 = R(\varphi_1) \leq R(u) \quad \forall u \in U$.

Konsequenz: Der erste Eigenwert lässt sich daher durch den Rayleigh-Quotient mit Hilfe einer beliebigen zulässigen Vergleichsfunktion abschätzen.

7.1.3 Berechnung des Rayleigh-Quotienten

Wir betrachten wieder das eingangs erwähnte Problem:

$$-y''(x) = k \cdot x \cdot y(x), \quad k > 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Bemerkung: Statt $y(0) = y(x_L) = 0$ könnte man auch z.B. $y'(0) = y(x_L) = 0$ fordern.

Dieses Problem formen wir nun um, indem wir zwei Operatoren (positiv devinite Bilinearformen) konstruieren. Dazu multiplizieren wir die Gleichung beidseitig mit $y(x)$ (statt mit einem beliebigen $u(x)$) und integrieren dann beidseitig von $x = 0$ bis $x = x_L$:

$$-\int_0^{x_L} y''(x) \cdot y(x) dx = k \cdot \int_0^{x_L} x \cdot (y(x))^2 dx$$

partielle Integration ergibt:

$$-\int_0^{x_L} y''(x) \cdot y(x) dx = -\underbrace{(y'(x) \cdot y(x)) \Big|_0^{x_L}}_{=0} - \int_0^{x_L} y'(x) \cdot y'(x) dx = \int_0^{x_L} (y'(x))^2 dx$$

Daher — und weil Integrale der Linearitätseigenschaft genügen, ist $B(y, u) = k \cdot \int_0^{x_L} x \cdot y(x) u(x) dx$ Bilinearformen im Hilbertraum der L^2 -integrierbaren Funktionen (Lebesque-Integral, vorläufig mit der L^2 -Norm $\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{x_L} (y(x))^2 dx}$. (zulässige $u(x)$ und $y(x)$ erfüllen wegen dem RWP die Randbedingungen.) Damit ist ein Unterraum U von L^2 festlegen. Nun gilt:

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{x_L} (y(x))^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \sqrt{x_L \cdot \int_0^{x_L} (y(x))^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \sqrt{\int_0^{x_L} x_L \cdot (y(x))^2 dx}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^2} \geq \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \sqrt{\int_0^{x_L} x \cdot (y(x))^2 dx} \geq \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \|y\|_B \geq 0$$

Daher ist U auch gegenüber der B -Norm abgeschlossen.

Um dagegen $A(y, u) = - \int_0^{x_L} y''(x) \cdot u(x) dx = \int_0^{x_L} y'(x) \cdot u'(x) dx = - \int_0^{x_L} u''(x) \cdot y(x) dx = A(u, y)$ bilden zu können, fordern wir $y, u \in C_2$ (zweimal stetig differenzierbar). U_2 sei die kompakte Hülle zu C_2 bezüglich der Metrik $|\cdot|$. Daher sind unsere Funktionen in $S = U \cap U_2$ zu nehmen. Damit erfüllen wir die auf Seite 200 gemachte Voraussetzung (1).

Sei nun $u(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \cos(\omega k x) + c_k \sin(\omega k x)$ eine konvergente Fourierreihe $\in S$. Die Existenz einer solchen Reihe ist schon in L^2 gesichert. Nach der obigen Abschätzung ergibt sich mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ unter Benutzung von Fourierreihen:

$$\begin{aligned} 0 \leq B(u, u) &= \int_0^{x_L} x \cdot (u(x))^2 dx \leq x_L \cdot \int_0^{x_L} (y(x))^2 dx = x_L \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2 dx \\ &\leq x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi \cdot k}{T}\right)^2 \cdot c_k^2 dx = x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot \int_0^{x_L} (u'(x))^2 dx \\ &= -x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot \int_0^{x_L} u''(x) \cdot u(x) dx = x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot A(u, u) = \alpha^2 \cdot A(u, u) \\ &\Rightarrow 0 \leq \|u\| = \sqrt{B(u, u)} \leq \alpha \sqrt{A(u, u)} = \alpha |u|, \quad |u_n| \rightarrow 0 \Rightarrow \|u\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit ist auch Voraussetzung (2) von Seite 200 erfüllt.

Wir untersuchen jetzt die Voraussetzung (3) von Seite 200:

$$\forall \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U \quad \forall h \in U : \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), h) = 0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0 \right).$$

Sei also $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U$ eine beliebige Folge mit $A((u_n - u), h) = \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot h(x) dx \rightarrow 0$, $h(x) \in U$ beliebig. Ersetzen wir h durch $(u_n - u)$, so erhalten wir $A((u_n - u), (u_n - u)) = |u_n - u|^2$. Konvergiert die Folge $\langle u_n - u \rangle$ bei einem beliebigen u , so liegt der Grenzwert von $(u_n - u)$ und damit u in U . Konvergiert die Folge nicht, so existiert bekanntlich immer eine konvergente Teilfolge, und u liegt entsprechend wieder in U . Wir können daher allgemein $u \in U$ und damit speziell für $h = (u_n - u)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), (u_n - u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u|^2 = 0$ annehmen.

Wegen $U \subseteq L^2$ gibt es zu $(u_n - u)$ eine Fourierreihe $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \cos(\omega k x) + a_k \sin(\omega k x)$.

Nach Parseval ist nun

$$|u_n - u|^2 = A((u_n - u), (u_n - u)) = - \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))'' \cdot (u_n(x) - u(x)) dx.$$

Dabei ist es möglich, dass $u''(x) \notin C_2$ gilt, dass z.B. $u''(x)$ als Limes aufgefasst eine Distribution wird. Wegen der L^2 -Integrierbarkeit findet man daher bei partieller Integration allgemein für h :

$$-\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))'' \cdot h(x) dx = -(u_n(x) - u(x))' \cdot h(x) \Big|_{x=0}^{x=x_L} + \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))' \cdot h(x)' dx.$$

$u(x)$ muss nach Konstruktion die Randbedingungen erfüllen (obwohl bei $x_0 = 0$ oder bei $x_0 = x_L$ auch $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \neq u(x_0)$ gelten kann). Damit wird $(u_n(x) - u(x))' \cdot h(x) \Big|_{x=0}^{x=x_L} = 0$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} A(u_n - u, h) &= -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))'' \cdot h(x) dx = +\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))' \cdot h(x)' dx \\ &= (u_n(x) - u(x)) \cdot h'(x) \Big|_{x=0}^{x=x_L} - \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot h(x)'' dx = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot h(x)'' dx \end{aligned}$$

Wählen wir bei $\omega = \frac{2\pi}{x_L}$ für $h(x)$ nacheinander die Basisfunktionen der Fourierreihe

$\varphi_{-k}(t) = \frac{2}{x_L} \cos(\omega k t)$ zur Berechnung des Fourierkoeffizienten a_{-k} sowie $\varphi_k(t) = \frac{2}{x_L} \sin(\omega k t)$ entsprechend für a_k und $\varphi_0(t) = \frac{2}{x_L}$ für a_0 , so können wir jetzt die Fourierkoeffizienten explizit mittels A berechnen. (Dabei tritt aber in der Fourierreihe nur $\frac{a_0}{2}$ statt a_0 auf!)

$$A((u_n - u), \varphi_{-k}) = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot \varphi_{-k}(x)'' dx = -\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot (-1)\omega^2 k^2 \cos(\omega k t) dx = \omega^2 k^2 a_{-k}$$

$$A((u_n - u), \varphi_k) = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot \varphi_k(x)'' dx = -\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot (-1)\omega^2 k^2 \sin(\omega k t) dx = \omega^2 k^2 a_k$$

$$A((u_n - u), \varphi_0) = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot \varphi_0(x)'' dx = -\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot 0 dx = 0 = a_0$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), h) = 0$ gilt daher: $\omega^2 k^2 a_{-k} \rightarrow 0$, $\omega^2 k^2 a_k \rightarrow 0$ und folglich nach Voraussetzung:

$$(\omega^2 k^2 a_{-k})^2 = \omega^4 k^4 a_{-k}^2 = \varepsilon_{-k} \rightarrow 0, \quad (\omega^2 k^2 a_k)^2 = \omega^4 k^4 a_k^2 = \varepsilon_k \rightarrow 0$$

Infolge unserer Gegebenheiten existiert auch das Integral $\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))^2 dt$ (wegen $u \in L^2$).

Nach Parseval ist damit: $\|u_n(x) - u(x)\|^2 = B(u_n(x) - u(x), u_n(x) - u(x)) = \int_0^{x_L} x (u_n(x) - u(x))^2 dt$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^{x_L} x_L (u_n(x) - u(x))^2 dt = x_L \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))^2 dt = \text{const.}(n) = x_L^2 \left(\frac{a_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{-k})^2 + (a_k)^2 \right) \\ &= \frac{x_L^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{-k})^2 + (a_k)^2 = \frac{x_L^2}{2} \left(\sum_{k=1}^m (a_{-k})^2 + (a_k)^2 \right) + \varepsilon_r(m) = \frac{x_L^2}{2} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_{-k}}{\omega^4 k^4} + \frac{\varepsilon_k}{\omega^4 k^4} \right) + \varepsilon_r(m). \end{aligned}$$

Wähle nun unter den m Werten $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{-2}, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{-m}, \varepsilon_m$ den maximalen Wert $\varepsilon_{\max}(m)$:

$$\leadsto \frac{x_L^2}{2} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_{-k}}{\omega^4 k^4} + \frac{\varepsilon_k}{\omega^4 k^4} \right) + \varepsilon_r(m) \leq \frac{x_L^2 \cdot 2 \cdot \varepsilon_{\max}(m)}{2\omega^4} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^4} \right) + \varepsilon_r(m). \text{ Dabei ist } \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right) \leq \frac{4}{3}.$$

(Abschätzung durch $f(x) = \frac{1}{x^4}$.) Mit $m \rightarrow \infty$ wird nun $\varepsilon_r(m) \rightarrow 0$ und mit $\varepsilon_{-k}, \varepsilon_k \rightarrow 0$ wird auch $\varepsilon_{\max}(m) \rightarrow 0$. Daher gilt:

$$0 \leq \|u_n(x) - u(x)\|^2 \leq \frac{x_L^2 \cdot 2 \cdot \varepsilon_{\max}(m)}{2\omega^4} \cdot \frac{4}{3} + \varepsilon_r(m) \rightarrow 0$$

Somit ist die Voraussetzung (3) bei unserem Randwertproblem auch erfüllt. Man kann also den ersten Eigenwert mittels des Rayleigh-Quotienten und einer geeigneten Eigenfunktion abschätzen. Folglich gilt bei unserem Problem

$$-y''(x) = k \cdot x \cdot y(x), \quad k > 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

die folgende Abschätzung:

$$0 \leq \lambda_1 = R(\varphi_1) \leq R(u) \quad \forall u \in U, \quad R(u) = \frac{A(u, u)}{B(u, u)} = \frac{-\int_0^{x_L} y''(x) \cdot y(x) dx}{\int_0^{x_L} x \cdot y(x)^2 dx}$$

Beispiel:

Wir wählen bei einer Stablänge von 1 intuitiv 10 Testfunktionen und berechnen jeweils den zugehörigen Rayleigh-Quotienten mit Hilfe von *Mathematica* in einer Tabelle:

Input:

```
xL = 1;
R[y_, x1_] := -NIntegrate[y''[x] y[x], {x, 0, x1}]/
  NIntegrate[x y[x]^2, {x, 0, x1}];
y[x_, 1] := Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 2] := x Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 3] := Sqrt[x] Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 4] := Sqrt[xL - x] Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 5] := x(x - xL);
y[x_, 6] := x (x - xL)^2;
y[x_, 7] := x^2 (x - xL);
y[x_, 8] := x^2 (x - xL)^2;
y[x_, 9] := x^3 (x - xL)^3;
y[x_, 10] := x^4 (x - xL)^4;
Table[y[x_] := y[x, k]; {k, y[x], R[y, xL]}, {k, 1, 10}] // MatrixForm
```

Output:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin(\pi x) & 19.7392 \\ 2 & x \sin(\pi x) & 21.7797 \\ 3 & \sqrt{x} \sin(\pi x) & 19.6135 \\ 4 & \sqrt{1-x} \sin(\pi x) & 25.5109 \\ 5 & (x-1) \cdot x & 20.0000 \\ 6 & (x-1)^2 \cdot x & 37.3333 \\ 7 & (x-1) \cdot x^2 & 22.4000 \\ 8 & (x-1)^2 \cdot x^2 & 24.0000 \\ 9 & (x-1)^3 \cdot x^3 & 31.2000 \\ 10 & (x-1)^4 \cdot x^4 & 38.8571 \end{pmatrix}$$

Resultat: Den tiefsten Wert 19.6135 erhalten wir mit der 3. Funktion $\sqrt{x} \sin(\pi x)$, wobei hier nur eine Näherung wiedergegeben ist. Somit ist $k < 19.6136$.
(Voller numerisch Ausgebener Wert: $k > 19.613548583248857$.)

Um weitere genauere Resultate zu erzielen, müssten wir jetzt die exakte Lösung studieren. *Mathematica* liefert:

Input:

```
xL = 1;
solv = DSolve[{y''[x] == -k x y[x], y[0] == 0}, y, x] // Flatten
```

Output:

$$\left\{ y \rightarrow \text{Function} \left[\{x\}, \text{AiryBi} \left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}} \right) c_2 - \sqrt{3} \text{AiryAi} \left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}} \right) c_2 \right] \right\}$$

Dabei ist (*Mathematica*-Erklärung):

AiryAi[z] gives the Airy function *Ai(z)*.

AiryBi[z] gives the Airy function *Bi(z)*.

Um diese Funktionen ein wenig zu verstehen, suchen wir ihre Stammfunktionen:

Input:

```
Integrate[AiryAi[z], z]
```

Output:

$$-\frac{z \left(\sqrt[3]{3} z \Gamma \left(\frac{2}{3} \right)^2 {}_1F_2 \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{z^3}{9} \right) - 3 \Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \Gamma \left(\frac{5}{3} \right) {}_1F_2 \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{z^3}{9} \right) \right)}{93^{2/3} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \Gamma \left(\frac{4}{3} \right) \Gamma \left(\frac{5}{3} \right)}$$

Input:

```
Integrate[AiryBi[z], z]
```

Output:

$$\frac{z \left(3^{2/3} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \Gamma \left(\frac{5}{3} \right) {}_1F_2 \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{z^3}{9} \right) + z \Gamma \left(\frac{2}{3} \right)^2 {}_1F_2 \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{z^3}{9} \right) \right)}{33^{5/6} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \Gamma \left(\frac{4}{3} \right) \Gamma \left(\frac{5}{3} \right)}$$

(Γ bedeutet die wohlbekannte Gammafunktion.)

Um die exakte Lösung zum 1. Eigenwert zu erhalten, müssten wir jetzt diesen 1. Eigenwert exakt kennen. Für nicht exakte Werte gibt es nur die triviale Nulllösung $y(x) \equiv 0$.

An der Stelle $x_L = 1$ erhalten wir die Gleichung $Bi\left(-\frac{k}{(-k)^{2/3}}\right)c_2 - \sqrt{3}Ai\left(-\frac{k}{(-k)^{2/3}}\right)c_2 = 0$. In dieser Gleichung ist k und c_2 unbekannt. Zufällige Werte für c_2 oder den Näherungswert k einfach einmal anzunehmen und den jeweils anderen Wert zu berechnen, führt nicht unmittelbar zu brauchbaren Resultaten.

Hier können weitere Studien oder numerische Methoden weiterhelfen, die jedoch in einem anderen Rahmen als dem hiesigen behandelt werden müssen. Eine andere Variante zur Erlangung einer Lösung ist die Behandlung eines exakteren Modells als des hier diskutierten z.B. mit der Shooting-Methode.

7.1.4 Eine genauere numerische Näherung für den 1. Eigenwert

Wir berechnen nochmals die Lösung der Eigenwertgleichung, jedoch ohne die 2. Randbedingung. Damit haben wir nur die Anfangsbedingung $y(x) = 0$ einzugeben, wodurch wir eine Integrationskonstante c_2 erhalten.

Input:

```
solv = DSolve[{y''[x] == -k x y[x], y[0] == 0}, y, x] // Flatten
```

Output:

$$c_2 Bi\left(-\frac{k x}{(-k)^{2/3}}\right) - \sqrt{3} c_2 Ai\left(-\frac{k x}{(-k)^{2/3}}\right)$$

Hier sehen wir, dass bei einem reellen Eigenwert k der Term $\frac{k x}{(-k)^{2/3}}$ komplex werden muss!

Mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten hatten wir für den 1. Eigenwert k einen Wert kleiner als 19.6135 ermittelt. Wir können daher numerisch eine Nullstelle als 2. Randbedingung nahe bei $k = 19.0$ suchen, die in die Nähe von $x = 1$ zu liegen kommen sollte:

Input:

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,x->1})],{k,19}]
```

Output:

$$k -> 18.9563$$

Kontrolle des 2. Randwerts mit dem erhaltenen Resultat:

Input:

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,k->18.9563})],{x,1}]
```

Output:

$$x -> 0.999999$$

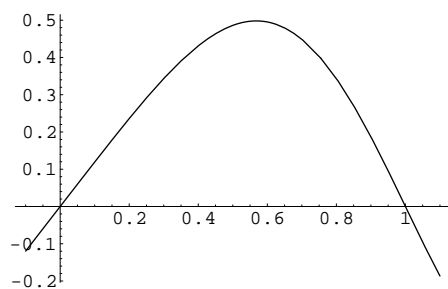
Diese Genauigkeit sollte hier genügen. (Das Programm ist so gebaut, dass die ausgegebenen Ziffern genau sind.)

→ Kontrolle durch Plots für den Realteil und den Imaginäranteil der erhaltenen Funktionen:

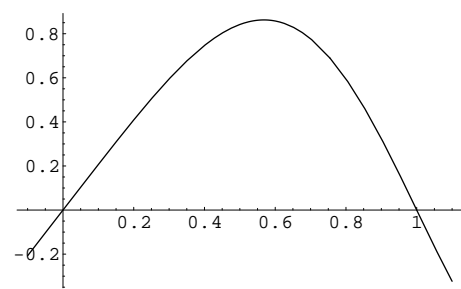
Input:

```
Plot[Re[(yy[x]/.{c2->1,k->18.9563})],{x,-0.1,1.1}];
Plot[Im[(yy[x]/.{c2->1,k->18.9563})],{x,-0.1,1.1}];
```

Output: Graphiken.



Realanteil



Imaginäranteil

Input:

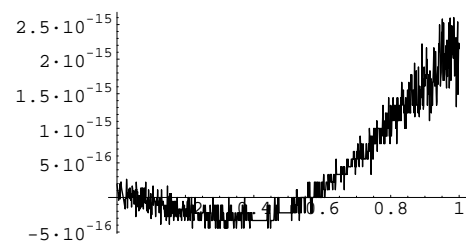
```
Plot[Re[(yy[x]/Re[yy[0.6]]/.{c2->1,k->18.9563})] -
      Im[(yy[x]/Im[yy[0.6]]/.{c2->1,k->18.9563})], {x,0,1}];
```

Output: Graphik.

Hier ist zu vermuten, dass die Funktionswerte des Realteils und des Imaginäranteils der gefundenen Lösung zueinander proportional sind:

$$\Re(yy(x)) = \text{const.} \cdot \Im(yy(x))$$

Daher strecken wir die beiden Graphen je mit dem Kehrwert eines Funktionswerts an einer fix gewählten Stelle, z.B. hier bei $x = 0.6$.



Resultat: Die gefundenen Differenzen zwischen den normierten Funktionen $\Re(yy(x))$ und $\Im(yy(x))$ liegen im Bereich der numerischen Ungenauigkeit, wie der wiedergegebene Plot zeigt. Daher können wir als Biegelinie z.B. die Funktion $\text{const.} \cdot \Re(yy(x))$ verwenden. Die Konstante lässt sich, wie einigangs erwähnt, nicht aus den gemachten Voraussetzungen deduzieren. Somit erhalten wir:

$$yy(x) = \Re \left(Bi \left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}} \right) - \sqrt{3} Ai \left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}} \right) \right), \quad k \approx 18.9563$$

7.1.5 Bemerkung zum Ritz–Galerkin–Verfahren

7.1.6 Übersicht

Gegeben sei eine Serie von Vergleichsfunktionen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Das **Ritz–Galerkin–Verfahren** beruht nun darauf, dass man eine Linearkombination dieser Funktionen mit variablen Koeffizienten $y(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot y_k(x)$ bildet und dann $y(x)$ in einen Ausdruck einsetzt, den man aus dem Rayleigh–Quotienten gewinnt. Damit entsteht eine Funktion $h(a_1, a_2, \dots, a_n)$, welche minimal sein soll. Die Minimalitätsbedingung hat nun $\left(\frac{\partial R}{\partial a_k} = 0 \ \forall a_k\right)$ zur Folge. Daraus kann man ein homogenes Gleichungssystem gewinnen, welches nicht nur die Nulllösung haben soll. So entsteht die Bedingung, dass eine berechenbare Determinante gleich 0 sein soll. Damit gewinnt man ein charakteristisches Polynom, aus dessen Nullstellen man auf den Eigenwert schliessen kann. Wir wollen dieses Verfahren hier beschreiben. Beispiele können hier jedoch des beschränkten Rahmen wegen nicht weiter eingebaut werden. Sie gehören in die Übungen. (Auch ist es fraglich, ob sich der Aufwand für lange Rechnungen vor dem Hintergrund der heute zur Verfügung stehenden Computeralgebra–Methoden beim gegebenen Rahmen noch rechtfertigt. Aus der Kenntnis der Methoden kann aber bei andern Problemen Nutzen gezogen werden.)

7.1.7 Die Methode

Wir wollen hier die Methode im Hinblick auf das gegebene Fachhochschulniveau selbstständig entwickeln, ohne auf Darstellung in der Literatur zu schauen.

Gegeben sei der Rayleigh–Quotient $\frac{A(u, u)}{B(u, u)} = R(x) \geq \lambda_1 \ \forall u \in U$ eines Problems $A(u, u) = \lambda B(u, u)$ mit der ersten Eigenfunktion u_1 , $A(u_1, u_1) = \lambda_1 B(u_1, u_1)$ wie oben beschrieben, bei gegebenen zulässigen Randbedingungen. Da die verwendeten Operatoren A und B positiv definit sind, gilt:

$$0 \leq \lambda_1 B(u, u) \leq A(u, u) \Rightarrow 0 \leq A(u, u) - \lambda_1 B(u, u) := H(u, u, \lambda_1), \quad H(u_1, u_1, \lambda_1) = 0$$

Das heisst: $H(u, u, \lambda_1)$ ist sicher positiv semidefinit und wird durch eine erste Eigenfunktion u_1 minimiert.

Sei $M = \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)\} \subset U$ eine Auswahl von Vergleichsfunktionen. Damit bilden wir die Funktion $v(x) := v_{a_1, a_2, \dots, a_n}(x) := \sum_{i=1}^n a_i v_i(x) \in U$, $a_i \in \mathbb{R} \ \forall i=1, \dots, n$. Die Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n sollen nun so bestimmt werden, dass $v(x)$ den Operator $H(u, u, \lambda_1)$ möglichst klein macht mit der Absicht, dadurch ein Kriterium für eine Schranke von λ_1 zu gewinnen. Wir werden sehen, dass $H(v, v, \lambda_1)$ eine quadratische Funktion in den Koeffizienten a_i ist, woraus die Existenz eines Minimums folgt. Bei der gewählten endlichen Menge M ist nun $v(x)$ eine Linearkombination der bekannten $v_i(x) \in M$. Da x durch die Anwendung des Operators zu einer inneren, gebundenen Variablen wird, können wir setzen: $H(v, v, \lambda_1) := h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)$, wobei λ_1 als fixer Parameter zu denken ist. Für ein Minimum erhalten wir somit die Minimalitätsbedingung:

$$\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_i} = 0 \ \forall i=1, \dots, n$$

Um jeweils auf ein spezielles a_j zugreifen zu können, führen wir eine angepasste Schreibweise ein. Sei also:

$$v(x) := v_{a_1, a_2, \dots, a_n}(x) := a_j v_j(x) + \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i(x) := a_j v_j(x) + r_j(x), \quad r_j(x) = \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i(x)$$

$r_j(x)$ ist somit unabhängig von a_j . Daher gilt:

$$h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) = A(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j) + \lambda_1 B(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j)$$

Damit können wir $A(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j)$ und $B(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j)$ besser „durchleuchten“. Z.B. gilt:

$$\begin{aligned}
A(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j) &= A(a_j v_j, a_j v_j + r_j) + A(r_j, a_j v_j + r_j) \\
&= A(a_j v_j, a_j v_j) + A(a_j v_j, r_j) + A(r_j, a_j v_j) + A(r_j, r_j) = a_j^2 A(v_j, v_j) + a_j A(v_j, r_j) + a_j A(r_j, v_j) + A(r_j, r_j) \\
&= a_j^2 A(v_j, v_j) + 2 a_j A(v_j, r_j) + A(r_j, r_j)
\end{aligned}$$

Ebenso ist:

$$B(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j) = a_j^2 B(v_j, v_j) + 2 a_j B(v_j, r_j) + B(r_j, r_j)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) &= a_j^2 (A(v_j, v_j) - \lambda_1 B(v_j, v_j)) + 2 a_j (A(v_j, r_j) - \lambda_1 B(v_j, r_j)) + (A(r_j, r_j) - \lambda_1 B(r_j, r_j)) \\
&= a_j^2 H(v_j, v_j, \lambda_1) + 2 a_j H(v_j, r_j, \lambda_1) + B(r_j, r_j, \lambda_1)
\end{aligned}$$

Dabei sind hier v_j , r_j und λ_1 unabhängig von a_j . Daher ist es jetzt einfach, $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)$ nach a_j abzuleiten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_j} &= 2 a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) + 2 H(v_j, r_j, \lambda_1) = 0 \quad \forall j=1, \dots, n \\
\Rightarrow a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) + H(v_j, r_j, \lambda_1) &= 0 \quad \forall j=1, \dots, n
\end{aligned}$$

Wenn wir den Operator H wieder durch den Ausdruck in A und B ersetzen, so erhalten wir:

$$a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) = a_j (A(v_j, v_j) - \lambda_1 B(v_j, v_j)) = (A(v_j, a_j v_j) - \lambda_1 B(v_j, a_j v_j)) \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$H(v_j, r_j, \lambda_1) = A(v_j, r_j) - \lambda_1 B(v_j, r_j) = A(v_j, \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i) - \lambda_1 B(v_j, \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i)$$

Daher ist:

$$\begin{aligned}
0 &= a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) + H(v_j, r_j, \lambda_1) = A(v_j, \sum_{i=1}^n a_i v_i) - \lambda_1 B(v_j, \sum_{i=1}^n a_i v_i) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i (A(v_j, v_i) - \lambda_1 B(v_j, v_i)) \quad \forall j=1, \dots, n
\end{aligned}$$

Diese Bedingung bedeutet, dass wir ein homogenes System von n linearen Gleichungen ($j = 1, \dots, n$) mit n Unbekannten a_1, a_2, \dots, a_n vor uns haben. Von diesem System suchen wir nicht die Trivallösung $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$. Nach dem oben Gesagten muss zur Komposition von $v(x)$ eine nicht triviale Lösung existieren. Daher muss die Determinante dieses Systems $= 0$ sein.

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems hat in den Zellen immer Terme der Form $H(v_j, v_i, \lambda_1) = A(v_j, v_i) - \lambda_1 B(v_j, v_i)$. Dabei ist j der Zeilenindex und i der Spaltenindex. Wir schreiben:

$$d = \det((H(v_j, v_i, \lambda_1))) = \det((A(v_j, v_i) - \lambda_1 B(v_j, v_i))_{j,i=1, \dots, n}) = 0$$

Die Elemente $A(v_j, v_i)$ und $B(v_j, v_i)$ sind Zahlen $\in \mathbb{R}$, die man mit Hilfe der gegebenen Funktionen v_j, v_i und den bekannten Operatoren A und B berechnen kann. Unbekannt in der Determinante ist bei unserem Ansatz einzig der Eigenwert λ_1 . Die Determinante ist nun, wie man aus der Determinantenberechnung weiss, ein Polynom vom Grade n in λ_1 (charakteristisches Polynom). Damit lässt sich für λ_1 aus den Elementen der erhaltenen Lösungsmenge eine obere Schranke gewinnen.

Umgekehrt folgt aus $\det((H(v_j, v_i, \lambda_1))) = 0$, dass unser Gleichungssystem linear abhängig ist, dass also eine nichttriviale Lösung $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ existiert, welche die Bedingung

$$\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_i} = 0 \quad \forall_{i=1, \dots, n}$$

erfüllen muss, aus der ja das Gleichungssystem gewonnen werden kann. Daher muss die nichttriviale Lösung eine Extremalstelle oder einen sattelartigen Punkt wiedergeben. Daraus kann man ohne weitere Ausführungen plausibel herleiten, dass die kleinste positive Nullstelle des charakteristischen Polynoms den 1. Eigenwert approximiert.

Konsequenz:

Vor.:

Seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine zulässige Auswahl von Vergleichsfunktionen $\in U$.

Beh.:

Die kleinste positive Lösung λ von

$$d = d(\lambda) = \det((A(v_j, v_i) - \lambda B(v_j, v_i))_{j,i=1, \dots, n}) = 0$$

approximiert den 1. Eigenwert.

Der betrachtete Unterraum U , aus dem unsere Funktionen stammen, lässt sich schreiben als innere direkte Summe der linearen Hülle U_1 der ersten Eigenfunktion u_1 und der der linearen Hülle U_1^\perp der weiteren Eigenfunktionen u_2, u_3, u_4, \dots . Dabei wissen wir aus der eingangs behandelten Operatorentheorie, dass die Eigenfunktionen paarweise orthogonal sind. Daher könnten wir dieses Verfahren zur Gewinnung weiterer Eigenwerte ausdehnen. Z.B. um den 2. Eigenwert zu approximieren kann man die Testfunktionen auf U_1^\perp einschränken, indem man nach der Berechnung die Beiträge aus U_1 entfernt. (Berechnung der 1. Eigenfunktion siehe Seite 206.)

Glücklicherweise ist eine mit Aufwand verbundene Einschränkung der Testfunktionen auf einen Unterraum U_1^\perp nicht notwendig.

Um das einzusehen betrachten wir unser Eigenwertproblem $\mathcal{P} : A(\varphi, \varphi) = \lambda B(\varphi, \varphi), \varphi \in U$. (Mit $\varphi \in U$ werden unsere Randbedingungen erfüllt.) Nach dem auf Seite 200 dargelegten Satz existiert zu unserem Problem \mathcal{P} in U eine abzählbar unendliche Folge von Eigenfunktionen φ_n und dazu eine monoton wachsende Folge von Eigenwerten $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$. Schränkt man die Menge der zulässigen Funktionen auf $U_1^\perp \subset U$ ein, so liegen die Eigenfunktionen ψ_k des eingeschränkten Problems mit U_1^\perp immer noch in U , müssen also unter den Funktionen $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ vorkommen. Daher gilt: $\{\psi_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für die zu den ψ_k gehörigen Eigenwerten μ_k gilt entsprechend ebenfalls $\{\mu_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Eine Einschränkung unseres Eigenwertproblems auf U_1^\perp führt also zu Teilmengen der Eigenwerte und der Eigenfunktionen des Eigenwertproblems in U und etwa nicht zu neuen Eigenwerten oder Eigenfunktionen ausserhalb der Menge derjenigen für U . Alle Eigenwerte und Eigenfunktionen erfüllen immer die Gleichung $H(\varphi_k, \varphi_k, \lambda_k) = A(\varphi_k, \varphi_k) - \lambda_k B(\varphi_k, \varphi_k) = 0$ resp. $H(\varphi_k, \varphi_k, \lambda_k) = 0$. Zum Eigenwert λ_2 ist daher $H(v, v, \lambda_2)^2 \geq 0$ unabhängig davon, ob v in U oder speziell in U_1^\perp gewählt wird. Sei U_M die lineare Hülle von M . Unter Verwendung der schon oben benutzten Bezeichnungen existiert nun wegen $H(v, v, \lambda_2)^2 \geq 0$ in U_M für $H(v, v, \lambda_2)^2 = h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2$ ein Minimum bei einer speziellen Wahl der Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n . (Denn bei $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2$ handelt es sich um ein Polynom vom Grade 4.) Dieses Minimum findet man mit Hilfe der Minimalitätsbedingung

$$\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2}{\partial a_i} = 2 \cdot \frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_i} \cdot h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) = 0 \quad \forall_{i=1, \dots, n}.$$

Bei der Wahl von beliebigen, von den zugehörigen Eigenfunktionen verschiedenen Testfunktionen ist $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) \neq 0$, und daher $\frac{\partial(h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2)}{\partial a_i} = 0$. Somit wird das charakteristische Polynom $d(\lambda) = 0$, woraus man den Eigenwerte berechnen kann. Damit ist auch der 2. Eigenwert eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, falls M genügend gross gewählt wird (siehe unten). Würde man andererseits zufällig $M = \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)\}$ aus lauter Eigenfunktionen zum 2. Eigenwert bilden, so wäre $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) \equiv 0$ und somit $\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2}{\partial a_i}$ ebenfalls $= 0$.

Zur genügend grossen Wahl von M :

Wählt man zur Approximation von λ_1 die Menge $M = \{\varphi_3\}$ ($\varphi_3 = 3$. Eigenfunktion), so wird man λ_3 statt λ_1 finden. Wählt man zur Approximation von λ_2 entsprechend $M = \{\varphi_3, \varphi_4\}$, so findet man λ_3 und λ_4 , aber nicht λ_2 , denn man approximiert ja über U_M .

Um bei der Bildung von $v(a_1, a_2, \dots, a_n)$ zur Berechnung von λ_2 bei einer Approximation über U einen Funktionsanteil aus $U_{\{\varphi_2\}}$ mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit nicht ausgeschlossen zu haben, muss M mindestens $n = 2$ (linear unabhängige) Testfunktionen enthalten. Geht man entsprechend vor zur Berechnung des 3., 4. oder allgemein des n -ten Eigenwerts λ_n , so muss $|M| \geq n$ sein. (M linear unabhängig.) Zusammengefasst ergibt sich nun

Konsequenz:

Die Eigenwerte der 2., 3., u.s.w. Eigenfunktionen von $A(\varphi, \varphi) = \lambda B(\varphi, \varphi)$ werden durch die weiteren Nullstellen $\lambda_n > \lambda_1$ des charakteristischen Polynoms über U bei günstiger Wahl der Testfunktionen $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ approximiert. Zur Approximation von n verschiedenen Eigenwerten ist für die Menge der Testfunktionen M die Bedingung $|M| = n$ notwendig, aber nicht hinreichend.

Daher wird es plausibel, bei der Approximation der weiteren Eigenwerte nach dem auf Seite 206 gezeigten Verfahren mit `DSolve` und `FindRoot` Startwerten aus der Nullstellenmenge der charakteristischen Polynoms zu verwenden.

Bsp.:

Input:

```
xL=1;
y1[x_]:=Sin[(Pi)/xL x];
y2[x_]:=x^2 (x-xL)^2;
y3[x_]:=x(x-xL);
A[ya_,yb_]:= -Integrate[D[ya[x],{x,2}] yb[x],{x,0,xL}];
B[ya_,yb_]:= Integrate[x ya[x] yb[x],{x,0,xL}];
H[ya_,yb_,lambda_]:= A[ya,yb] - lambda B[ya,yb];
m = {{H[y1,y1,lambda],H[y1,y2,lambda],H[y1,y3,lambda]},
      {H[y2,y1,lambda],H[y2,y2,lambda],H[y2,y3,lambda]},
      {H[y3,y1,lambda],H[y3,y2,lambda],H[y3,y3,lambda]}};
Print[m//Simplify//MatrixForm];
Print[Det[m]//N//ExpandAll//Simplify];
NSolve[Det[m]==0,{lambda}]
```

Output (Matrix):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2\pi^2 - \lambda) & -\frac{2(-12 + \pi^2)(2\pi^2 - \lambda)}{\pi^5} & \frac{2(\lambda - 2\pi^2)}{\pi^3} \\ -\frac{2(-12 + \pi^2)(2\pi^2 - \lambda)}{\pi^5} & \frac{24 - \lambda}{1260} & \frac{1}{840}(3\lambda - 56) \\ \frac{2(\lambda - 2\pi^2)}{\pi^3} & \frac{1}{840}(3\lambda - 56) & \frac{20 - \lambda}{60} \end{pmatrix}$$

Output (Determinante):

$$-5.93327 * 10^{-14}(\lambda - 692.818)(\lambda - 178.23)(\lambda - 19.739)$$

Output (Lösungen für λ):

$$\{\{\lambda \rightarrow 19.739\}, \{\lambda \rightarrow 178.23\}, \{\lambda \rightarrow 692.818\}\}$$

Wir kontrollieren und verbessern nun die Resultate mit *Mathematica*. Dabei benutzen wir das auf Seite 206 beschriebene Verfahren und auch die dazugehörigen Programme:

Zur Approximation = 178.23:

Input:

```
FindRoot[Re[(yy[x]/.{c2->1,x->1})],{k,178.23}]
```

Output:

$$x- > 189.221$$

Input:

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,x->1})],{k,189.221}]
```

Output:

$$x- > 189.221$$

Input:

```
FindRoot[Re[(yy[x]/.{c2->1,x->189.221})],{x,1.}]
```

Output:

$$x- > 1.$$

Input:

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,x->189.221})],{x,1.}]
```

Output:

$$x- > 1.$$

Resultat: Der 2. gefundene Eigenwert liegt bei 189.221. (Die Approximation ergab 178.23.)

Zur Approximation = 692.818:

Input:

```
FindRoot[Re[(yy[x]/.{c2->1,x->1})],{k,692.818}]
```

Output:

$$x- > 777.698$$

Input:

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,x->1})],{k,777.698}]
```

Output:

$$x- > 777.698$$

Input:

```
FindRoot[Re[(yy[x]/.{c2->1,x->777.698})],{x,1.}]
```

Output:

$$x- > 1.$$

Input:

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,x->777.698})],{x,1.}]
```

Output:

$$x- > 1.$$

Resultat: Der 3. gefundene Eigenwert liegt bei 777.698. (Die Approximation ergab 692.818.)

Kapitel • Chapitre 8

Partielle Differentialgleichungen (Anhang 2) — Annexe 2 (sans traduction)

- *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. Momentanément, la traduction française manque encore.*

8.1 Partielle Differentialgleichungen

Für die Ableitungen werden wir folgende Notationsarten verwenden:

$$u_y := \frac{du}{dy} \Big|_{x=\text{const.}} = u'_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{yx} := u''_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial xy}$$

8.1.1 Quasilineare part. D'gl 1. Ordnung mit zwei Variablen

Die Charakteristikmethode

Sei $u_x := u'_x(x, y)$, $u_y := u'_y(x, y)$ und $z := u(x, y)$ (\leadsto Fläche). Wir studieren das Problem

$$\mathcal{D}(u) := a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y = \left\langle \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \right\rangle = c(x, y, z).$$

Sprechweise: Eine Funktion $z = u(x, y)$, welche obige Gleichung erfüllt, eine Lösungsfunktion also, stiftet eine Fläche, die wir **Integralfläche** nennen.

Wir setzen fest: $v(x, y, z) := u(x, y) - z = 0 = \text{const.}$. Der Gradient $\vec{n} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}$ ist bekanntlich ein Normalenvektor auf die Integralfläche zum Niveau 0 in (x, y, z) . Weiter gilt wegen der D'gl.:

$$\left\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix} \right\rangle = a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y - c(x, y, z) = 0$$

Da obiges Skalarprodukt gleich $a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y + c(x, y, z)(-1) = 0$ ist, erkennen wir $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}$ als Tangentialvektor an die Integralfläche. Wir definieren nun:

Definition:

Eine Kurve $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ mit $t \mapsto \vec{\gamma}(t)$ heisst **Charakteristik** oder **charakteristische Kurve** von $\mathcal{D}(u) = c$, wenn sie eine Integalkurve des nachfolgenden Vektorfeldes ist:

$$\vec{\gamma}_t' = \begin{pmatrix} a(\vec{\gamma}^T(t)) \\ b(\vec{\gamma}^T(t)) \\ c(\vec{\gamma}^T(t)) \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

($\vec{\gamma}^T(t)$ ist transponiert, also Zeilenvektor). Wir wollen folgendes Lemma beweisen:

Lemma:

Vor.:

Die Charakteristik γ hat mit der Integralfläche einen Punkt gemeinsam.

Beh.:

γ liegt in der Integralfläche.

Mit Hilfe dieses Lemmas werden wir die Integralfläche mittels Charakteristiken erzeugen oder beschreiben können.

Beweis:

Betrache $u(\vec{\gamma}^T(t)) - z(t) := u(x(t), y(t)) - z(t) = v(t)$.

$$\leadsto v_t' = u_x \cdot x_t + u_y \cdot y_t + (-1) z_t = \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{\gamma}_t' \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow v_t' = \text{const.}$$

Wegen $v_t' = \text{const.}$ ist mit $v(t_0) = 0$ auch $v(t) \equiv 0$. D.h. $u(\vec{\gamma}^T(t)) = z(t)$. ☺

Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz:

Vor.:

1. Sei $\vec{\Gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Integralfläche zu $\mathcal{D}(u) = c$, welche die Charakteristiken transversal schneidet (Schnittwinkel $\neq 0$).
2. Für jedes s sei die Kurve $\vec{\gamma}_s(t)$ eine Charakteristik mit $\vec{\gamma}_s(0) = \vec{\Gamma}(s)$

Beh.:

$(s, t) \mapsto \vec{\gamma}_s(t)((s, t))$ ist eine Parameterdarstellung der Integralfläche in einer Umgebung Γ (in der Nähe von Γ).

Damit können wir zur Lösung einer gegebenen part. D'gl. $\mathcal{D}(u) = c$ versuchen die Charakteristiken zu bestimmen. Mit Hilfe von $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \vec{\gamma}_t' = \begin{pmatrix} a(\vec{\gamma}^T(t)) \\ b(\vec{\gamma}^T(t)) \\ c(\vec{\gamma}^T(t)) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{\gamma}(t)$ ist dies bei einer als Nebenbedingung gegebenen Kurve $\vec{\Gamma}(s)$ meist nicht schwierig.

Bsp.: Gegeben: $\mathcal{D}(u) = 2u_x + y \cdot u_y - x = x_0 u_x + y \cdot u_y + z(-1) = 0$, $u(2, y) = 2y - 3$, $0 \leq y \leq 4$

$$1. \leadsto u(2, y) = 2y - 3 \Rightarrow \Gamma : s \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ u = z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 2y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 2s - 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \leadsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ x \end{pmatrix} = \vec{\gamma}_t' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{aligned} x_t'(t) = 2 &\Rightarrow x(t) = 2t + c_1 \\ y_t'(t) = y(t) &\Rightarrow y(t) = e^t \cdot c_2 \\ z_t'(t) = x(t) &\Rightarrow z(t) = t^2 + t \cdot c_1 + c_3 \\ \leadsto \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ e^t \cdot c_2 \\ -t^2 + t \cdot c_1 + c_3 \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$4. \vec{\gamma}_s(0) = \vec{\Gamma}_s = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 2s - 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\gamma}_s(t) = \begin{pmatrix} 2t + 2 \\ e^t \cdot s \\ t^2 + t \cdot 2 + 2s - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t = \frac{x-2}{2}, \quad s = y \cdot e^{-t} = y \cdot e^{-\frac{x-2}{2}}$$

$$5. \quad u(x, y) = z = t^2 + 2t + 2s - 3 = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-2}{2}\right) + 2y e^{-\frac{x-2}{2}} - 3 = \frac{x^2}{4} + 2e^{1-\frac{x}{2}}y - 4$$

8.1.2 Klassifikation bei part. D'gl. 2. Ordnung

Eine **partielle Differentialgleichung** ist eine Differentialgleichung, in der Ableitungen nach verschiedenen Variablen vorkommen. Wir werden hier in unserem kurzen Ausblick nur Differentialgleichungen bis 2. Ordnung studieren und auch von einer eingehenden Betrachtung von Fällen mit mehr als zwei Variablen des gesteckten Rahmens wegen absehen müssen. Zuerst wollen wir eine heute überall verwendete nützliche Klassifikation erklären. Gegeben sei dazu eine Differentialgleichung mit zwei Ortsvariablen x und y und technisch unauffälligen, vernünftigen Lösungen, so dass wir von $u_{xy} = u_{yx}$ ausgehen können:

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + c u = f \quad (=0)$$

Mit $\vec{D} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{grad}(\cdot)$ können wir diese Gleichung unter Beachtung der Symmetrie $a_{12} = a_{21}$

kürzer schreiben:
$$\vec{D}^T \cdot u(x, y) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \vec{D} + u \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{D} + u \cdot c = f$$

Dabei ist $\det(A) = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$.

Wir transferieren das Problem jetzt formal in die analytische Geometrie, indem wir setzen:

$$u_x = \alpha, \quad u_y = \beta, \quad u_{xx} = \alpha^2, \quad u_{yy} = \beta^2, \quad u_{xy} = \alpha \cdot \beta, \quad u = 1$$

Damit wird die Differentialgleichung zu einer Kegelschnittgleichung:

$$\Rightarrow P(\alpha, \beta) = a_{11} \alpha^2 + 2a_{12} \alpha \cdot \beta + a_{22} \beta^2 + b_1 \alpha + b_2 \beta + c = 0$$

Hier verwendet man die folgende Klassifikation der Kegelschnitte:

$$\begin{array}{lll} a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = -\det(A) & > 0 & \text{Hyperbel} \\ a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = -\det(A) & = 0 & \text{Parabel} \\ a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = -\det(A) & < 0 & \text{Ellipse} \end{array}$$

Aus formalen Gründen übernehmen wir diese Klassifikation auch für die partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{lll} \det(A) & < 0 & \text{Differentialgleichung hyperbolisch} \\ \det(A) & = 0 & \text{Differentialgleichung parabolisch} \\ \det(A) & > 0 & \text{Differentialgleichung elliptisch} \end{array}$$

8.1.3 Verfeinerung der Klassifikation

Allgemeiner sein eine partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben:

$$(*) \quad \mathcal{D}(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u = 0$$

(Dabei ist $a_{ij}, b_i, c = \text{const.}$)

Definition:

1. (*) **elliptisch** \Leftrightarrow alle Eigenwerte von (a_{ij}) entweder positiv oder negativ, kein Eigenwert $= 0$.
2. (*) **hyperbolisch** \Leftrightarrow es gibt positive und negative Eigenwerte von (a_{ij}) , keiner ist $= 0$.
3. (*) **parabolisch** $\Leftrightarrow (a_{ij})$ hat einen Eigenwert $= 0$, d. h. nicht nach allen Variablen wird zweimal abgeleitet.

Nun gelten folgende Sachverhalte:

1. Diese Typeneinteilung ist unabhängig von den Variablen.
2. Bei einer bijektiven Variablentransformation bleibt der Typ erhalten.
3. Es gilt die Erfahrungsregel:
 - (a) Beim elliptischen Typ braucht es Randbedingungen.
 - (b) Beim parabolischen Typ braucht es Randbedingungen und Anfangsbedingungen.
 - (c) Beim hyperbolischen Typ braucht es Bedingungen für Werte und Ableitungen und ev. Randbedingungen.

Beispiele:

1. $\Delta u = 0$: Laplace-Gleichung, elliptisch.
2. $\Delta u = f$: Poisson-Gleichung, elliptisch.
3. $u_t = a^2 \Delta u$: Wärmeleitgleichung, parabolisch.
4. $u_{tt} = c^2 \Delta u$: Wellengleichung, hyperbolisch.

Sei (*) $\mathcal{D}(u) = f$.

Diese Gleichung nennen wir **homogen**, wenn $f \equiv 0$ gilt.
 (*) heisst hingegen **inhomogen**, wenn $f \not\equiv 0$ ist.

Entsprechend für die Nebenbedingungen.

Nun gilt das Superpositionsprinzip für die homogene Gleichung mit homogenen Nebenbedingungen:

Satz:

Gegeben sei $\mathcal{D}(u) = 0$ mit homogenen Nebenbedingungen.
 $\{u_i \mid i \in I\}$ sein eine Menge von Lösungen (Basislösungen).

Dann ist $\sum_{i=1}^n c_i u_i$ ebenfalls Lösung ($c_i \in \mathbb{R}$).

8.1.4 Das Beispiel der Wärmeleitungsgleichung

Homogene Randbedingungen in x

Die Wärmeleitungsgleichung ist eine parabolische Differentialgleichung ($\det(A) \cdot 0^2 - a_{11} \cdot 0 = 0$). Wir studieren den folgenden Fall eines 1-dimensionalen Drahtes (oder Welle, Stab, Stange oder Rute):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_L$$

Dabei stellen wir die Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } u(0, t) = 0 = u(x_L, t) \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L$$

$u(x, t)$ bedeutet dabei die Temperatur an der Stelle x zur Zeit t . k ist die Temperaturleitfähigkeit². $u(0, t) = 0 = u(x_L, t)$ bedeutet, dass man die Temperatur so geeicht hat, dass am Rand des Stabs die Temperatur 0 herrscht.

Für $f(x)$ fordern wir: $f \in L^2$ über $I = [0, x_L]$. Wenn wir also für f eine ungerade, stückweise stetige, $2x_L$ -periodische Funktion voraussetzen, ist die eben gestellte Forderung erfüllt.

Jetzt versuche wir einen Separationsansatz: $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$.

Diesen Ansatz setzen wir in die Gleichung ein und erhalten:

$$X(x) \cdot T'(t) = k \cdot X''(x) \cdot T(t) \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{k} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)}}_{=h_1(t)} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{=h_2(x)}$$

Daraus folgt: $k \cdot h_2(x) = h_1(t) = \text{const.}$, denn für ein fixes t_0 ist $c_1 = k \cdot h_2(x) = h_1(t_0)$ und für ein fixes x_0 folgt $k \cdot h_2(x_0) = h_1(t) = c_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = \text{const.} = c$. Damit erhalten wir ein Gleichungssystem, in dem wir hier gleiche Temperaturen an den Stabsenden voraussetzen. Dabei normieren wir die Temperaturskala so, dass die Temperatur an den Stabsenden 0 wird:

$$\left| \begin{array}{lcl} (1) & \frac{1}{k} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} & = c \\ (2) & \frac{X''(x)}{X(x)} & = c \end{array} \right| \quad \begin{array}{lcl} X(0) \cdot T(t) & = & 0 \\ X(x_L) \cdot T(t) & = & 0 \\ \Rightarrow X(0) = X(x_L) & = & 0 \end{array}$$

Anders geschrieben:

$$(1) T'(t) = c \cdot T(t), \quad (2) X''(x) = c \cdot X(x)$$

Auf die eingangs gestellte Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq x_L$ werden wir erst später zurückgreifen.

Damit erhalten wir mit (2) ein Eigenwertproblem für X :

$$X''(x) = c \cdot X(x), \quad X(0) = X(x_L) = 0$$

Die Basislösungen dieses Problems kennen wir bereits ($c = c_n$ ist Eigenwert, $X(x) = X_n(x)$ ist Eigenfunktion, A_n ist beliebig):

$$X_n(x) = A_n \cdot \sin(\sqrt{c_n} \cdot x) = A_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{x_L} \cdot x\right), \quad c_n = -\frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2}$$

²Lit.: Siehe z.B. bei Jürgen Eichler, Physik, Grundlagen für das Ing'studium, Vieweg 2004, p. 107

Die Eigenwerte erhält man übrigens durch Einsetzen der Eigenfunktion in die Eigenwertgleichung infolge der 2. Ableitung.

Und der Fall $n = 0$ fällt hier weg, denn dann wäre $X_0(x) = A_0 \cdot \sin(\frac{0 \cdot \pi \cdot x}{x_L}) \equiv 0$, $c_0 = -\frac{0^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} = 0$.

Weiter gilt: $A_{-n} \cdot \sin(\frac{(-n) \cdot \pi \cdot x}{x_L}) = -A_n \cdot \sin(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L})$ bei vorläufig freiem A_n . Für negative n erhalten wir also keine neuen Lösungen.

Nun setzen wir die Eigenwerte in Gleichung (1) ein. Es folgt für $T(t) = T_n(t)$:

$$T_n'(t) = k \cdot c_n \cdot T_n(t) = -k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot T_n(t) \Rightarrow T_n'(t) + k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot T_n(t) = 0$$

Hier kennen wir wiederum die Basislösungen:

$$T_{n,B}(t) = e^{-k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot t}, \quad T_{n,B}(0) = 1, \quad T_n'(t) = B_n \cdot T_{n,B}(t).$$

Zu einem gegebenen k existieren demnach mehrere Lösungen $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$. Solche Lösungen lassen sich jetzt unter Beachtung der gegebenen Differentialgleichung auch strecken und addieren, da alle beteiligten Funktionen die Randbedingungen erfüllen und daher die Summe auch die RBD erfüllen muss. Mit $C_n = A_n \cdot B_n$ können wir mit Hilfe der Basislösungen schreiben, wobei wir z.B. statt $T_{n,B}(t)$ nun kurz $T_n(t)$ setzen:

$$\left| \begin{array}{lcl} C_n \cdot X_n(x) \cdot T_n'(t) & = & k \cdot C_n \cdot X_n''(x) \cdot T_n(t) \\ C_m \cdot X_m(x) \cdot T_m'(t) & = & k \cdot C_m \cdot X_m''(x) \cdot T_m(t) \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow C_n \cdot X_n(x) \cdot T_n'(t) + C_m \cdot X_m(x) \cdot T_m'(t) = k \cdot C_n \cdot X_n''(x) \cdot T_n(t) + k \cdot C_m \cdot X_m''(x) \cdot T_m(t)$$

Lemma:

Mit $u_j(x, t) = C_j \cdot X_j(x) \cdot T_j(t)$ ist die Summe zweier Lösungen

$$u_{\text{Summe}}(x, t) = u_n(x, t) + u_m(x, t)$$

wieder Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Wie wir gesehen haben, existieren unabhängige Lösungen nur für $n > 0$. Daher können wir formulieren:

Lemma:
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot X_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot e^{-k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot t}$$

Wegen der Randbedingung $u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right)$ haben wir für $u(x, 0)$ eine Fourierreihe (Sinusreihe) gegeben. Dabei ist f , wie eingangs erwähnt, eine ungerade, stückweise stetige, $2x_L$ -periodische Funktion.

Demnach haben wir das Problem, die Fourierkoeffizienten c_n zu berechnen. Von den Fourierkoeffizienten und den Fourierreihen wissen wir:

1.

$$\int_{-x_L}^{x_L} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx = x_L \cdot \delta_{mn}$$

δ_{mn} ist das Kronecker-Symbol mit der Bedeutung: $\delta_{mn} = 1$ für $m = n$ und $\delta_{mn} = 0$ sonst.

$$\begin{aligned}
2. \quad \int_{-x_L}^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx &= \int_{-x_L}^{x_L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \int_{-x_L}^{x_L} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot x_L \cdot \delta_{mn} \\
\Rightarrow \int_{-x_L}^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx &= 2 \int_0^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx = C_m \cdot x_L \\
\Rightarrow C_m &= \frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx \quad \text{Damit gilt:}
\end{aligned}$$

Satz:

Die Wärmeleitgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < x_L$ mit den Rand- und Anfangsbedingungen

RBD: $u(0, t) = 0 = u(x_L, t)$ für $t \geq 0$

ABD: $u(x, 0) = f(x)$ für $0 \leq x \leq x_L$

hat bei ungeradem, stückweise stetigem und $2x_L$ -periodischem f die folgende Lösung:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx \right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot e^{-k \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot t}$$

Konsequenz: Sind die Fourierkoeffiziente von der üblichen Gestalt, dass keine Konvergenzprobleme auftreten, so gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-k \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot t} = 0$ und damit auch $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$. Das ist natürlicherweise auch zu erwarten.

Bsp.: Wir berechnen $u(x, t)$ mit *Mathematica* bei folgenden Bedingungen:

$$x_L = 1, \quad k = 1, \quad f(x) = 8x(1 - x^2)$$

Dann stellen wir $u(x, t_n)$ graphisch dar für

$$n = 0., 0.03125, 0.0625, 0.09375, 0.125, 0.15625, 0.1875, 0.21875, 0.25$$

Input:

```

Remove["Global`*"]
xL = 1; k = 1;
f[x_] := 8 x (1 - x^2);
mm = 10; r = 3.5;
Cc[n_] := 2/xL NIntegrate[f[x] Sin[n Pi x /xL], {x, 0, xL}];
u[x_, t_, n_] := Cc[n] Sin[n Pi x /xL] E^(-k t (n Pi/xL)^2);
uApprox[x_, t_, n_] := Sum[u[x, t, j], {j, 1, n}];
graphs = Table[Plot[uApprox[x, t, mm], {x, 0, xL},
  PlotRange -> {0, r}, Ticks -> {{0, 1},
    Range[0, Floor[r]]},
  DisplayFunction -> Identity], {t, 0, 1/4, 1/32}];
graphsarray = Partition[graphs, 3];

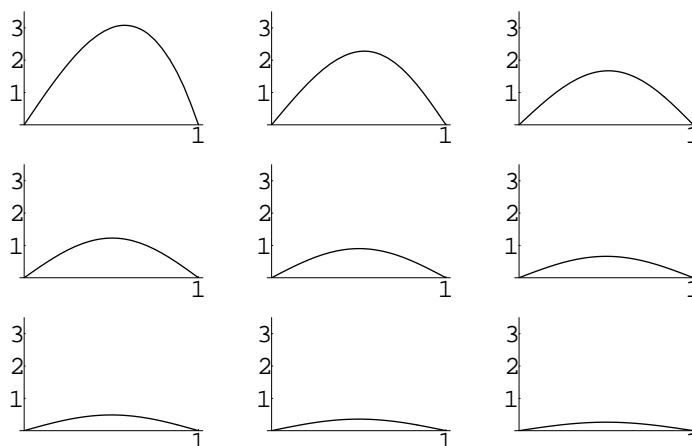
```



```
Show[GraphicsArray[graphsarray],
      DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

Output:

Graphik



Bemerkung:

Es ist auch möglich, Wärmeleitgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformationen zu behandeln. So kann man in $u(x, t)$ die Variable x als Parameter auffassen und die Gleichung bezüglich der Variablen t transformieren: $u(x, t) \circ \bullet U(x, s)$. Wenn man dann im Bildraum die Betrachtungsweise wieder vertauscht und x als Variable und s als Parameter auffasst, so hat man hier eine gewöhnliche Differentialgleichung, die man einfach lösen und als eine Sinusreihe (Fourierreihe mit der Variablen x) schreiben kann. Diese Sinusreihe kann man bezüglich dem Parameter s zurücktransformieren, wodurch man die oben festgestellte Lösung erhält. Die explizite Durchführung des Verfahrens sei als Übung dem Leser überlassen.

Inhomogene Randbedingungen in x

Wir betrachten nun das verwandte Problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_L$$

mit inhomogene Randbedingungen und obigen Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } v(0, t) = a, \quad v(x_L, t) = b \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } v(x, 0) = g(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L$$

Dieses Problem vergleichen wir mit dem oben besprochenen Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_L$$

mit den homogene Randbedingungen und den Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } u(0, t) = u(x_L, t) = 0 \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L$$

Sei u eine Lösung des Problems mit den homogenen Randbedingungen. Es gilt also

$$u(0, t) = u(x_L, t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \quad u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L.$$

Wir setzen nun $v(x, t) = u(x, t) + h(x)$, $h(x) = \frac{(b-a)}{x_L} x + a$.

Die Funktion $h(x)$ hat die folgenden Randwerte:

$$h(0) = \frac{(b-a)}{x_L} \cdot 0 + a = a, \quad h(x_L) = \frac{(b-a)}{x_L} \cdot x_L + a = b - a + a = b.$$

Wegen $u(0, t) = u(x_L, t) = 0$ ist daher $v(0, t) = u(0, t) + h(0) = 0 + a = a$, $v(x_L, t) = u(x_L, t) + h(x_L) = 0 + b = b$. Weiter gilt $g(x) = v(x, 0) = u(x, 0) + h(x) = f(x) + h(x) \Rightarrow g(x) = f(x) + h(x)$. Zudem ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(x, t) + h(x)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial h(x)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 0 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t) + h(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 0 = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

denn h ist eine lineare Funktion, deren 2. Ableitung ja 0 sein muss. Damit gewinnt man folgende Aussage:

Satz: $u(x, t)$ sei Lösung von $\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < x_L$
mit $u(0, t) = u(x_L, t) = 0$ für $t \geq 0$, $u(x, 0) = f(x)$ für $0 \leq x \leq x_L$

Dann ist $v(x, t) = u(x, t) + h(x)$, $h(x) = \frac{(b-a)}{x_L} x + a$ Lösung von
 $\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $0 < x < x_L$ mit $v(0, t) = a$, $v(x_L, t) = b$ für $t \geq 0$,
 $v(x, 0) = g(x) = f(x) + h(x)$ für $0 \leq x \leq x_L$.

Damit kann man die Lösungen des Problems mit inhomogenen Randbedingungen auf die Lösungen des Problems mit homogenen Randbedingungen zurückführen.

8.1.5 Koordinatentransformationen bei Operatoren

Vorbereitung

Im Folgenden benötigen wir den **Laplace-Operator** $\Delta \cdot = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ sowie den **biharmonischen Operator** $\Delta^2 \cdot = \Delta(\Delta \cdot)$ in räumlichen Polarkoordinaten (sphärischen Koordinaten), vorerst allerdings eingeschränkt auf die Grundebene (Polarkoordinaten). Aus diesem Anlass soll hier demonstriert werden, wie man diese Operatoren mit Hilfe von Computeralgebra (hier *Mathematica*) rasch gewinnen kann, wenn man sie aus Zeitgründen nicht von Hand berechnen mag oder keine einschlägige Formelsammlung zur Verfügung hat. Als Input verwenden wir jeweils aus drucktechnischen Gründen die „**FullForm**“.

Input:

```
<<Calculus`VectorAnalysis`
```

↪ Start eines Standardpackages, das aus Platzgründen zum Kern hinzugeladen werden muss.

Definitionen**Input:**

```
MatrixForm [{r, \[Theta], \[CurlyPhi]}]//Transpose ==
MatrixForm [{CoordinatesFromCartesian[{x,y,z}, Spherical]}]//Transpose]
```

Output:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \arctan(x, y) \end{pmatrix}$$

Hier definieren wir die sphärischen Koordinaten eines Punktes P . r ist wie üblich der Abstand von P zum Ursprung, θ ist der Winkel von der positiven z -Achse zum Radiusvektor von P und φ der Winkel von der positiven x -Achse zur Projektion des Radiusvektor von P in die Grundebene. Umgekehrt findet man:

Input:

```
MatrixForm [{r, \[Theta], \[CurlyPhi]}]//Transpose ==
MatrixForm [{CoordinatesFromCartesian[{x,y,z}, Spherical]}]//Transpose]
```

Output:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des totalen Differentials $df = f_r' dr + f_\theta' d\theta + f_\varphi' d\varphi$ erhält man die Ableitung von $f(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z))$ nach x , y oder z . Z.B. nach x :

Input:

```
Dt[f[r[x,y,z], \[Theta][x,y,z], \[CurlyPhi][x,y,z]], x]
```

Output:

$$\begin{aligned} & f^{(1,0,0)}(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) \left(\frac{dz}{dx} r^{(0,0,1)}(x, y, z) + \frac{dy}{dx} r^{(0,1,0)}(x, y, z) + r^{(1,0,0)}(x, y, z) \right) \\ & + f^{(0,1,0)}(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) \left(\frac{dz}{dx} \theta^{(0,0,1)}(x, y, z) + \frac{dy}{dx} \theta^{(0,1,0)}(x, y, z) + \theta^{(1,0,0)}(x, y, z) \right) \\ & + f^{(0,0,1)}(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) \left(\frac{dz}{dx} \varphi^{(0,0,1)}(x, y, z) + \frac{dy}{dx} \varphi^{(0,1,0)}(x, y, z) + \varphi^{(1,0,0)}(x, y, z) \right). \end{aligned}$$

Dabei ist hier $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = 0$. Weiter bedeutet z.B. $f^{(1,0,0)} = f_r'(r, \theta, \varphi)$

Gradient

Für den **Gradienten** $\nabla f = \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} f_x' \\ f_y' \\ f_z' \end{pmatrix}$ einer skalaren Funktion f erhalten wir in sphärischen Koordinaten:

Input:

```
{Grad[f[r, \[Theta], f], Spherical[r, \[CurlyPhi], f]]} //Transpose //MatrixForm
```

Output:

$$\left(\begin{array}{c} f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) \\ \frac{f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \\ \frac{\csc(\theta) f^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi)}{r} \end{array} \right), \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Divergenz

Für die **Divergenz** $\langle \nabla, \vec{f} \rangle = \operatorname{div}(\vec{f}) = f_x' + f_y' + f_z'$ einer Vektorfunktion $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

Input:

```
Div[{
f1[r, \[Theta], \[CurlyPhi]],
f2[r, \[Theta], \[CurlyPhi]],
f3[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]
}, Spherical[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]]
```

Output:

$$\frac{2 f_1(r, \theta, \varphi) + \cot(\theta) f_2(r, \theta, \varphi) + \csc(\theta) f_3^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi) + f_2^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + r f_1^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Rotation

Für die **Rotation** $\nabla \times \vec{f} = \operatorname{rot}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} (f_3)_y' - (f_2)_z' \\ (f_1)_z' - (f_3)_x' \\ (f_2)_x' - (f_1)_y' \end{pmatrix}$ einer Vektorfunktion $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

Input:

```
{Curl[{f1[r, \[Theta], \[CurlyPhi]], f2[r, \[Theta], \[CurlyPhi]],
f3[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]}, Spherical[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]]}
//Transpose//Simplify//MatrixForm
```

Output:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\cot(\theta) f_3(r, \theta, \varphi) - \csc(\theta) f_2^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi) + f_3^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \\ - \frac{f_3(r, \theta, \varphi) - \csc(\theta) f_1^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi) + r f_3^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \\ \frac{f_2(r, \theta, \varphi) - f_1^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + r f_2^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \end{array} \right), \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Laplace-Operator

Für die **Laplace-Operator** $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = f_{x,x}'' + f_{y,y}'' + f_{z,z}''$ einer skalaren Funktion f ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

Input:

Laplacian[f[r,\[Theta],\[CurlyPhi]], Spherical[r,\[Theta],\[CurlyPhi]]//Simplify

Output:

$$\frac{f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 + 2f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r + \csc^2(\theta) f^{(0,0,2)}(r, \theta, \varphi) + \cot(\theta) f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi)}{r^2},$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Biharmonischer Operator

Für den **biharmonischen Operator** $\Delta^2 f = \Delta(\Delta(f))$ einer skalaren Funktion f ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

Input:

Biharmonic[f[r,\[Theta],\[CurlyPhi]], Spherical[r,\[Theta],\[CurlyPhi]]//Simplify

Output:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^4} \cdot (f^{(4,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^4 + 4 f^{(3,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^3 - \cot^2(\theta) f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 + \csc^2(\theta) f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 \\ & - f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 + 2 \csc^2(\theta) f^{(2,0,2)}(r, \theta, \varphi) r^2 + 2 \cot(\theta) f^{(2,1,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 \\ & + 2 f^{(2,2,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 - 2 \cot^2(\theta) f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r + 2 \csc^2(\theta) f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r \\ & - 2 f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r + 4 \csc^4(\theta) f^{(0,0,2)}(r, \theta, \varphi) + \csc^4(\theta) f^{(0,0,4)}(r, \theta, \varphi) \\ & + \cot(\theta) \csc^2(\theta) f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + 2 \cot(\theta) f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) - 2 \cot(\theta) \csc^2(\theta) f^{(0,1,2)}(r, \theta, \varphi) \\ & - 2 \cot^2(\theta) f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi) + \csc^2(\theta) f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi) - f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi) \\ & + 2 \csc^2(\theta) f^{(0,2,2)}(r, \theta, \varphi) + 2 \cot(\theta) f^{(0,3,0)}(r, \theta, \varphi) + f^{(0,4,0)}(r, \theta, \varphi)) \end{aligned}$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Biharmonischer Operator bei ebenen Polarkoordinaten

Nun wollen wir noch den biharmonischen Operator Δ^2 für ebene Polarkoordinaten herleiten und zwar spezialisiert für den Fall, dass die verwendete Funktion f vor Radius, jedoch nicht vom Winkel abhängig ist. Dadurch wird der Ausdruck dann relativ kurz.

Input (Definition der verwendeten Koordinaten und Berechnung des Gradienten):

```
<<Calculus'VectorAnalysis';
```

```
x[r_,\[CurlyPhi]_] := r Cos[\[CurlyPhi]];
y[r_,\[CurlyPhi]_] := r Sin[\[CurlyPhi]];
rr[xx_,yy_] := Sqrt[xx^2+yy^2];
ff[xx_,yy_] := ArcTan[yy/xx];
```

```
grad = {D[f[r,\[CurlyPhi]],r] D[rr[xx,yy],xx]
+D[f[r,\[CurlyPhi]],\[CurlyPhi]] D[ff[xx,yy],xx],
D[f[r,\[CurlyPhi]],r] D[rr[xx,yy],yy]
+D[f[r,\[CurlyPhi]],\[CurlyPhi]] D[ff[xx,yy],yy]}//Simplify
```

Output (Der Schnelle und der Rechnungsumstände halber verzichten wir auf die darstellerisch idealere Spaltenschreibweise):

$$\left\{ \frac{xx f^{(1,0)}(r, \varphi)}{\sqrt{xx^2 + yy^2}} - \frac{yy f^{(0,1)}(r, \varphi)}{xx^2 + yy^2}, \frac{xx f^{(0,1)}(r, \varphi)}{xx^2 + yy^2} + \frac{yy f^{(1,0)}(r, \varphi)}{\sqrt{xx^2 + yy^2}} \right\}$$

Input (Die Anpassung der obigen Form mit den Variablen xx, yy an diejenige mit den Variablen r, φ ist hier nicht wiedergegeben):

```
grad = {-(Sin[\CurlyPhi]*Derivative[0, 1][f][r, \CurlyPhi])/r)
+(Cos[\CurlyPhi]*Derivative[1, 0][f][r, \CurlyPhi]),
(Cos[\CurlyPhi]*Derivative[0, 1][f][r, \CurlyPhi])/r
+(Sin[\CurlyPhi]*Derivative[1, 0][f][r, \CurlyPhi])}
```

Output:

$$\left\{ \cos(\varphi) f^{(1,0)}(r, \varphi) - \frac{\sin(\varphi) f^{(0,1)}(r, \varphi)}{r}, \frac{\cos(\varphi) f^{(0,1)}(r, \varphi)}{r} + \sin(\varphi) f^{(1,0)}(r, \varphi) \right\}$$

Berechnung des Laplace-Operators mit Hilfe von $\text{div}(\text{grad}) = \Delta$:

Input:

```
divGrad = (
D[grad[[1]],r] D[rr[xx,yy],xx]+
D[grad[[1]],\CurlyPhi] D[ff[xx,yy],xx]+
D[grad[[2]],r] D[rr[xx,yy],yy]+
D[grad[[2]],\CurlyPhi] D[ff[xx,yy],yy] //Simplify//InputForm)
/.{xx^2 + yy^2->r^2, xx-> r Cos[\CurlyPhi], yy->r Sin[\CurlyPhi]}/Simplify
```

Output:

$$\frac{f^{(0,2)}(r, \varphi) + r f^{(1,0)}(r, \varphi) + r \sqrt{r^2} f^{(2,0)}(r, \varphi)}{r^2}$$

Input (Die Ableitungen nach φ werden 0 gesetzt, da f nicht von φ abhängen soll):

```
Lapl=(Derivative[0, 2][f][r, \CurlyPhi] +
r*Derivative[1, 0][f][r, \CurlyPhi] +
r*r*Derivative[2, 0][f][r, \CurlyPhi])/r^2;
lap[r_,\CurlyPhi_]=Lapl /. {Derivative[0, 2][f][r, \CurlyPhi] ->0};
lap[r,\CurlyPhi]//InputForm
```

Output:

$$(r * \text{Derivative}[1, 0][f][r, f] + r^2 * \text{Derivative}[2, 0][f][r, f])/r^2$$

Input (Berechnung von Δ^2 für $f(r, \varphi) = f(r)$, nicht abhängig von φ):

```
(r*Derivative[1, 0][lap][r, \CurlyPhi] +
r^2*Derivative[2, 0][lap][r, \CurlyPhi])/r^2 //Simplify
```

Output (*):

$$\frac{f^{(4,0)}(r, \varphi) r^3 + 2 f^{(3,0)}(r, \varphi) r^2 - f^{(2,0)}(r, \varphi) r + f^{(1,0)}(r, \varphi)}{r^3}$$

Beobachtung

Die Herleitung zeigt, dass es ratsam ist, der effizienten Arbeit wegen Computeralgebra-Programme zu nutzen. Vor allem muss man sich dann nicht speziell um zeitraubende Vereinfachungen kümmern, denn bei den heutigen Rechenzeiten ist der Einfluss der Komplexität der Ausdrücke auf die „früher ach so teure Rechenzeit“ meist belanglos. Das gilt auch für nicht so teure Computer.

8.1.6 Lineare Operatoren

Einen **Operator** $L : u \mapsto L(u) \in \mathbb{C}$ resp. $\in \mathbb{R}$ nennen wir nach dem früher Gesagten **linear**, wenn er die folgenden **Linearitätsregeln** erfüllt:

1. $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
2. $L(\lambda u) = \lambda L(u)$

Durch die Abmachung $L^2(u) := L(L(u))$, $L^n(u) := L(L^{n-1}(u))$ definieren wir **Potenzen von Operatoren**. Nun gilt der Satz:

Satz: $L \text{ linear} \Rightarrow L^n \text{ linear}$

Beweis:

Wir zeigen hier $L \text{ linear} \Rightarrow L^2 \text{ linear}$. Daraus folgt dann der Beweis durch Induktion über n .
Sei $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L^2(u) &= L(L(u)) = L(L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)) = L(\lambda_1 L(u_1) + \lambda_2 L(u_2)) = \lambda_1 L(L(u_1)) + \lambda_2 L(L(u_2)) \\ &= \lambda_1 L^2(u_1) + \lambda_2 L^2(u_2). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität der Ableitung einer Funktion mit einer Variablen und des Integrals einer Funktion mit einer Variablen sind auch die uns bekannten Differentialoperatoren *grad*, *div* und Δ linear und wegen dem eben bewiesenen Satz folglich auch $\Delta^2, \dots, \Delta^n$. Entsprechend verhält es sich mit mehrdimensionalen Integralen.

Beispiel des Nachweises für Δ bei zwei Variablen:

In \mathbb{R}^2 gilt mit $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}{\partial y^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \\ &= \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) = \lambda_1 \Delta u_1 + \lambda_2 \Delta u_2. \end{aligned}$$

Konsequenz: Δ^n ist ein linearer Operator.

Wir betrachten die **inhomogene Gleichung** $L(u) = v$ mit der Lösungsmenge \mathbb{L}_{inh} und dazu die **homogene Gleichung** $L(u) = 0$ mit der Lösungsmenge \mathbb{L}_{hom} . v kann dabei wieder eine Funktion sein. Wegen der Linearität folgt sogleich:

$$u_1, u_2 \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow L(u_1) = 0 \text{ und } L(u_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 L(u_1) = 0 \text{ und } \lambda_2 L(u_2) = 0 \\ \Rightarrow 0 = \lambda_1 L(u_1) + \lambda_2 L(u_2) = L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = 0$$

Konsequenz: Mit zwei Lösungen $\in \mathbb{L}_{hom}$ ist auch jede Linearkombination dieser Lösungen $\in \mathbb{L}_{hom}$.

$\leadsto \mathbb{L}_{hom}$ ist ein linearer Raum.

$$u_1, u_2 \in \mathbb{L}_{inh} \Rightarrow L(u_1) = v \text{ und } L(u_2) = v \Rightarrow 0 = v - v = L(u_1) - L(u_2) = L(u_1 - u_2) \\ \Rightarrow u_1 - u_2 \in \mathbb{L}_{hom}$$

Konsequenz: Mit zwei Lösungen $\in \mathbb{L}_{inh}$ liegt die Differenz dieser Lösungen in \mathbb{L}_{hom} .

$$u_1 \in \mathbb{L}_{inh}, u_2 \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow L(u_1) = v \text{ und } L(u_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 L(u_2) = 0 \\ \Rightarrow v = L(u_1) + \lambda_2 L(u_2) = L(u_1 + \lambda_2 u_2) \Rightarrow u_1 + \lambda_2 u_2 \in \mathbb{L}_{inh}$$

Konsequenz: Mit einer Lösung $u_1 \in \mathbb{L}_{inh}$ und einer Lösung $u_2 \in \mathbb{L}_{hom}$ liegt $u_1 + \lambda_2 u_2$ für beliebige λ_2 in \mathbb{L}_{inh} .

Satz: \mathbb{L}_{hom} ist ein linearer Raum und \mathbb{L}_{inh} eine lineare Mannigfaltigkeit. Man kann daher jede beliebige Lösung u_{inh} erhalten als Linearkombination einer speziellen, partikulären Lösung u_{part} und einer Linearkombination von Basislösungen aus \mathbb{L}_{hom} : $u_{inh} = u_{part} + \sum_k \lambda_k u_{k,hom}$.

8.1.7 Zur schwingenden Membran

Für die Auslenkung $u(x, y, t)$ einer **schwingenden Membran** auf einem gegebenen Gebiet G ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \Delta u$$

Dabei kommen üblicherweise Randbedingungen wie $u(x, y, t) = 0$ oder auch $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ für $(x, y) \in \partial G$ ((x, y) auf dem Rand) zur Anwendung. Dabei ist $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Richtungsableitung $\langle \text{grad } u, \vec{e}_n \rangle$ senkrecht zum Rand, d.h. $\vec{e}_n \perp$ Höhenlinie resp. Tangente an die Höhenlinie.

Wir wollen in unserem Rahmen nur den Fall $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p = \text{const.}$ betrachten. Speziell für $p = \text{const.} = 0$ redet man von der **Potentialgleichung**. Die Lösungsfunktionen heissen **harmonische Funktionen** resp. in der Physik auch **Potentiale**, wobei bei der Potentialgleichung üblicherweise $u(x, y) = g(x, y)$ resp. $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y)$ für $(x, y) \in \partial G$ mit einer gegebenen Funktion g gefordert wird. Wie man sofort sieht, ist die Potentialgleichung vom **elliptischen Typ**. Wir heben hervor:

Definition: Funktionen, welche die Potentialgleichung $\Delta u = 0$ erfüllen, heissen **harmonisch**.

Eine Lösungsmenge von $c^2 \cdot \Delta u = 1$ resp. von $\Delta u = \frac{1}{c^2} := p$ kann man mit etwas Phantasie leicht erraten:

$$u(x, y) = (c_1 + \frac{p}{2})x^2 - c_1 y^2 + c_2 x + c_3 y + c_4 + f(x + i y), \quad f(x + i y) = f(z) \text{ holomorph}$$

Dabei sind die c_k beliebige Koeffizienten und $f(x + iy)$ eine komplexe, holomorphe Funktion. Man sieht leicht, dass die Summe der 2. Ableitungen der Polynomanteile nach x und y gerade p ergibt.

Weiter ist $\Delta f = 0$. Denn wegen $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot i$ erhält man $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot \underbrace{(i^2)}_{=-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Man erkennt daraus den Satz:

Satz: Holomorphe Funktionen sind harmonisch. Sie erfüllen die Potentialgleichung.

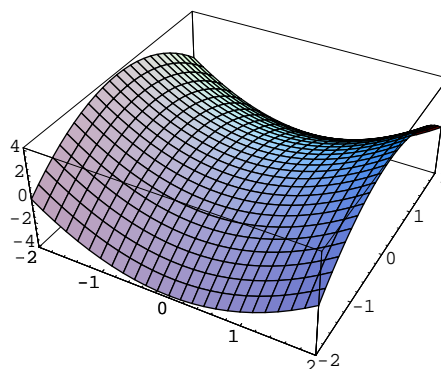
(Hinweis: Vgl. dazu Skript Analysis des Autors.)

Weiter gilt für harmonische Funktionen das wichtige **Maximumprinzip**³:

Satz: Nimmt eine auf einem Gebiet harmonische Funktion im Innern ein Maximum oder Minimum an, so ist sie konstant.

Zum Beweis muss hier auf die Literatur³ verwiesen werden, da die Sache sonst unserem Rahmen entgleitet.

Wir betrachten statt dem Beweis das Beispiel $f(x, y) = x^2 - y^2$. f ist offensichtlich harmonisch. Die Form ist hier die eines „Affensattels“.



Als weiteres Beispiel wollen wir eine parabelförmige Lösung für die Gleichung $\Delta u = p = 6$ finden, welche in den vier Punkten $(\pm 10, \pm 10)$ die Bedingung $u(\pm 10, \pm 10) = 20$ sowie in $(0, 10)$ die Bedingung $u(0, 10) = 0$ erfüllt.

Ansatz: $u(x, y) = c_1 x^2 + c_2 x y_2 + c_3 y_2 + c_4 x + c_5 y + c_6$.

Man findet damit sofort:

$$\Delta u(x, y) = 2c_1 + 2c_3 = 6 \Rightarrow c_1 = 3 - c_3 \Rightarrow u(x, y) = (3 - c_3)x^2 + c_2xy_2 + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6$$

³Lit.: Siehe z.B. René Sperb, Maximum Principles and Their Applications Academic Press 1981

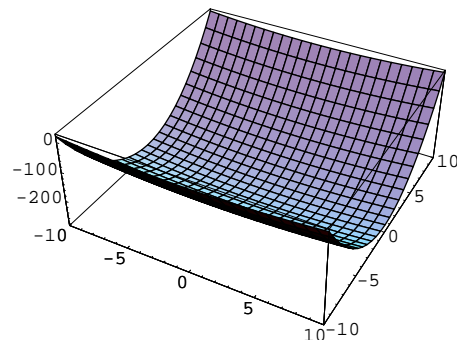
Setzt man hier die Bedingungen

$u(\pm 10, \pm 10) = 20$, $u(0, 10) = 0$ ein,

so findet man die eindeutige Lösung

$$c_2 = c_4 = c_5 = 0, \quad c_3 = \frac{14}{5}, \quad c_6 = -280.$$

Damit wird $u(x, y) = \frac{x^2}{5} + \frac{14y^2}{5} - 280$.



8.1.8 Die Poisson-Gleichung

Die Poisson-Gleichung lautet:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = f(\vec{r}), \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in V, \quad V = \text{gegebenes Volumen}.$$

Dazu sind Randbedingungen gegeben wie z.B. $\Phi(\vec{r}) = 0$ auf ∂V .

Z.B. in der Elektrostatik betrachtet man $f(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$, ρ = Ladungsdichte, ε_0 = Permittivität oder dielektrische Leitfähigkeit des Vakuums.

In der Gravitationstheorie ist $f(\vec{r}) = 4\pi\gamma\rho(\vec{r})$, γ = Gravitationskonstante, ρ = Massenverteilung.

1. Beispiel: Wir wollen hier die folgende einfache Version der Poissongleichung studieren:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = c = \text{const.}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in G = K_r(O), \quad O = (0, 0), \quad \Phi(\vec{r}) = 0 \text{ auf } \partial G.$$

Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen hat die Gleichung $\Delta \Phi(\vec{r}) = 0$, $\Phi(\vec{r}) = 0$ auf ∂G nur die Lösung $\Phi(\vec{r}) = 0$. Für die Gleichung $\Delta \Phi(\vec{r}) = c$, $\Phi(\vec{r}) = 0$ auf ∂G können wir eine Lösung mit Hilfe eines quadratischen Polynoms konstruieren:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{c}{4} \left(\left(x + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \left(x - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) + \left(y + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \left(y - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{c}{4} \left(x^2 + y^2 - 2 \frac{r^2}{\sqrt{2}^2} \right) = \frac{c}{4} (x^2 + y^2 - r^2)$$

Es gilt: $\Delta \Phi(\vec{r}) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{c}{4} \cdot 2 + \frac{c}{4} \cdot 2 = c$ sowie $\Phi(\vec{r}) = \frac{c}{4} (r^2 - r^2) = 0$ für $(x, y) \in \partial G$, d.h. für $x^2 + y^2 = r^2$.

Diese Lösung ist die einzige Lösung. Denn für eine andere Lösung $\Psi(\vec{r})$ wäre ebenfalls $\Delta \Psi(\vec{r}) = c$ und die Randbedingungen wären ebenfalls erfüllt. Man hätte somit $\Delta (\Phi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r})) = c - c = 0 \Rightarrow \Phi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r})$ müsste harmonisch sein sowie die Randbedingungen auch erfüllen. Da nun nach dem Maximumprinzip das Maximum und das Minimum einer harmonischen Funktion auf dem Rand angenommen werden muss, kommt dafür wegen den Randbedingungen nur 0 in Frage. Daher ist $\Phi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r}) \equiv 0$, d.h. $\Phi(\vec{r}) \equiv \Psi(\vec{r})$. Damit ist eine andere Lösung immer mit Φ identisch. Es gibt somit keine andere Lösung. Wir haben die gefundene Lösung also als eindeutig identifiziert.

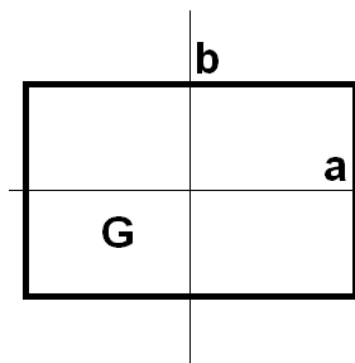
2. Beispiel: Wir betrachten die Poissonsgleichung auf einem Rechteck:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y) = 6, \quad (x, y) \in G$$

$$u(x, y) = g(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \partial G$$

Sei $a = 4, b = 1$

$$\leadsto G = [-4, 4] \times [-1, 1]$$



Lösungsstrategie:

1. Suche eine partikuläre Lösung, z.B. $u_0(x, y) = 3x^2$

2. Mache den Ansatz: $u(x, y) = u_0(x, y) + v(x, y)$

$$\leadsto \Delta v(x, y) = \Delta(u(x, y) - u_0(x, y)) = \Delta u(x, y) - \Delta u_0(x, y) = f(x, y) - f(x, y) = 0 \quad \text{und}$$

$$\leadsto v(x, y) = u(x, y) - u_0(x, y) = g(x, y) - u_0(x, y) \quad \text{auf } \partial G$$

Damit wird das inhomogene Dirichletproblem $\Delta u(x, y) = f(x, y)$ in G , $u(x, y) = g(x, y)$ auf ∂G übergeführt in das homogene Dirichletproblem $\Delta v(x, y) = 0$ in G , $v(x, y) = g(x, y) - u_0(x, y)$ auf ∂G .

Lösung von $\Delta u(x, y) = f(x, y) = \text{const.} = 6$, $G = [-4, 4] \times [-1, 1]$, $u(x, y) \equiv 0$ auf ∂G :

1. Sei $u_0(x, y) = mx^2 + nx + k \Rightarrow \Delta u = 2m = 6 \Rightarrow m = 3$. Wir nehmen aus Symmetriegründen $n = 0$ an. (Wir brauchen nur eine partikuläre Lösung.) Weiter soll k so sein, dass auf einer Seite die Randbedingungen erfüllt sind:

$$u_0(-4, y) = 3(-4)^2 + k = 48 + k = 0 \Rightarrow k = -48 \Rightarrow u_0(x, y) = 3x^2 - 48 = u_0(-x, y).$$

$$\text{Hier gilt: } v(\pm 4, y) = u(\pm 4, y) - u_0(\pm 4, y) = 0 - (3(\pm 4)^2 - 48) = 0 \Rightarrow v(\pm 4, y) = 0$$

$$\text{sowie } v(x, \pm 1) = u(x, \pm 1) - u_0(x, \pm 1) = 0 - (3x^2 - 48) = -3x^2 + 48 = 0 \Rightarrow v(x, \pm 1) = -3x^2 + 48.$$

$$2. u(x, y) = u_0(x, y) + v(x, y) = 3x^2 - 48 + v(x, y) \Rightarrow 6 = \Delta u = 6 + \Delta v \Rightarrow \Delta v = 0$$

$$\Delta v(x, y) = 0 \text{ in } G, v(x, y) = g(x, y) - u_0(x, y) = 0 - u_0(x, y) \Rightarrow v(x, y) = -u_0(x, y) \text{ auf } \partial G.$$

Das Problem $\Delta v(x, y) = 0$, $v(x, y) = -u_0(x, y)$ auf ∂G , kann man mit einem **Separationsansatz** angehen, um **Basislösungen** zu finden:

$$v(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \Rightarrow \Delta v(x, y) = X_{xx}''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y_{yy}''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X_{xx}''(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}''(y)}{Y(y)} = \pm \omega^2 = \text{const.}$$

Man hat damit zwei neue Randwertprobleme: [1]: $\frac{X_{xx}''(x)}{X(x)} = \pm \omega^2$ mit $X(-4) = X(4) = 0$ sowie [2]: $-\frac{Y_{yy}''(y)}{Y(y)} = \pm \omega^2$ mit $X(x) \cdot Y(\pm 1) \rightsquigarrow -3x^2 + 48$. Um für Y ein Randwertproblem formulieren zu können, muss X schon bekannt sein. Daher berechnen wir zuerst X .

Berechnung der Lösung von [1]: $\frac{X_{xx}''(x)}{X(x)} = \pm \omega^2$ mit $X(-4) = X(4) = 0$:

$\rightsquigarrow X_{xx}''(x) = \pm \omega^2 \cdot X(x)$, $X(-4) = X(4) = 0 \rightsquigarrow$ Verwende bekannte Basislösungen:

- $\pm \omega^2 = 0 \Rightarrow X_{xx}''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$,
 $X(-4) = X(4) = -4c_1 + c_2 = +4c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$: Fällt weg.
- $\pm \omega^2 > 0 \Rightarrow X_{xx}''(x) = \omega^2 X(x) \Rightarrow X(x) = c_1 e^{+\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$
 $\Rightarrow X(4) = c_1 e^{4\omega} + c_2 e^{-4\omega} = 0 \Rightarrow c_1 e^{4\omega} = -c_2 e^{-4\omega} \Rightarrow c_1 e^{8\omega} = -c_2$ und
 $\Rightarrow X(-4) = c_1 e^{-4\omega} + c_2 e^{4\omega} = 0 \Rightarrow c_1 e^{-4\omega} = -c_2 e^{4\omega} \Rightarrow c_1 e^{-8\omega} = -c_2$
 $\Rightarrow e^{-8\omega} = e^{8\omega} \Rightarrow \omega = 0$. Widerspruch! \rightsquigarrow Fällt weg.
- $\pm \omega^2 < 0 \Rightarrow X_{xx}''(x) = -\omega^2 X(x) \Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x)$.
 $0 = X(4) = X(-4) \Rightarrow 0 = c_1 \sin(4\omega) + c_2 \cos(4\omega)$ und
 $0 = c_1 \sin(-4\omega) + c_2 \cos(-4\omega) = -c_1 \sin(4\omega) + c_2 \cos(4\omega)$
 $\Rightarrow 2c_1 \sin(4\omega) = 0 \Rightarrow 4\omega = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ und $2c_2 \cos(4\omega) = 0 \Rightarrow 4\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\frac{n\pi}{4}x)$ oder $X(x) = c_2 \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x) \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{4}$, $\omega = \frac{(1+2k)\pi}{8}$
Wegen $v(x, \pm 1) = X(x) \cdot Y(\pm 1) = -3x^2 + 48 = -3(-x)^2 + 48 = v(-x, \pm 1) = X(-x) \cdot Y(\pm 1)$
muss $X(x) = X(-x)$ gelten, d.h. $X(x)$ ist eine gerade Funktion. Da $X(x)$ aus den gefundenen Basislösungen $\sin(\frac{n\pi}{4}x)$ und $\cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x)$ ausgewählt werden muss, kann nur $X(x) = \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x)$ richtig sein, denn der Sinus ist ungerade. Damit fallen die Sinusanteile weg, d.h. $c_1 = 0$. Somit wird $X(x) = X_k(x) = a_k \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x)$ mit $c_2 := a_k$.
- Wir erhalten somit: $-\frac{Y_{yy}''(y)}{Y(y)} = -\omega^2 = -(\frac{(1+2k)\pi}{8})^2 \Rightarrow +Y_{yy}''(y) = +(\frac{(1+2k)\pi}{8})^2 \cdot Y(y)$
 $\Rightarrow Y(y) = Y_k(y) = d_{k,1} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{8}y} + d_{k,2} \cdot e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8}y}$ mit $Y_k(-1) = Y_k(+1) \neq 0$
 $\Rightarrow Y_k(-1) = Y_k(+1) = d_{k,1} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{8}} + d_{k,2} \cdot e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8}} = d_{k,1} \cdot e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8}} + d_{k,2} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{8}}$
 $\Rightarrow d_{k,1} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} + d_{k,2} = d_{k,1} + d_{k,2} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} \Rightarrow d_{k,1} \cdot (e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} - 1) = d_{k,2} \cdot (e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} - 1)$
 $\Rightarrow d_{k,1} = d_{k,2} := \frac{d_k}{2} \Rightarrow Y_k(y) = \frac{d_k}{2} \cdot (e^{\frac{(1+2k)\pi}{8}y} + e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8}y}) = d_k \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}y)$
- $\rightsquigarrow v_k(x, y) = X_k(x) \cdot Y_k(y) = a_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x) \cdot d_k \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}y)$
 $\Rightarrow v_k(x, y) = X_k(x) \cdot Y_k(y) = c_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x) \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}y)$
- Die Allgemeine Lösung erhält man jetzt nach dem Superpositionsprinzip:

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot Y_k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x) \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}y)$$

$$v(x, \pm 1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x) \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}) = -u_0(x, y) = -3x^2 + 48$$

$r_k = c_k \cdot \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)$ sind nun Fourierkoeffizienten zu $n = 1 + 2k$ für die Funktion $-3x^2 + 48$.

$$\text{Es gilt: } r_n = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 (-3x^2 + 48) \cos\left(\frac{n\pi x}{2 \cdot 4}\right) dx = -\frac{768 \left(n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)}{n^3 \pi^3}$$

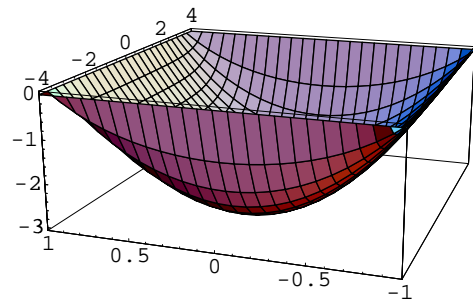
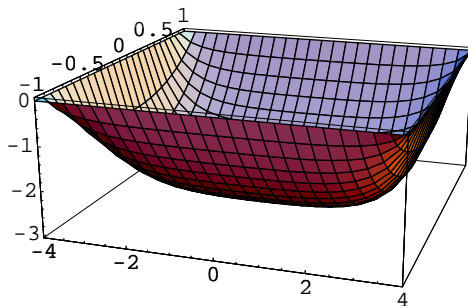
$$\Rightarrow c_k = r_{2k+1} \cdot \left(\cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right) \right)^{-1} = \frac{-\frac{768 \left((1+2k)\pi \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) \right)}{(1+2k)^3 \pi^3}}{\cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)}$$

$$\Rightarrow c_k = -\frac{768 \left((1+2k)\pi \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) \right)}{(1+2k)^3 \pi^3 \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)}$$

Somit folgt:

$$u(x, y) = 3x^2 - 48 + v(x, y), \quad v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{768 \left((1+2k)\pi \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) \right)}{(1+2k)^3 \pi^3 \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)} \cdot \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot y\right)$$

Wir berechnen die Glieder in der letzten Formel bis zu $k = 14$ und ein zweites Mal bis $k = 20$. Dann brechen wir die Summen jeweils ab. Beim Zeichnen von Graphiken mit dem Computer ist bei so verändertem k kein Unterschied zu erkennen. Man erhält folgende Formen:



8.1.9 Exkurs: Wichtige Formeln

Im letzten Abschnitt (Seite 231) haben wir bereits das Maximumprinzip kennengelernt. Im Zusammenhang mit diesem Prinzip und weiter mit dem Laplace-Operator sowie harmonischen Funktionen kennt man eine Anzahl wichtiger Formeln. Einige davon sollen der Vollständigkeit halber hier wiedergegeben werden. (Auf Beweise müssen wir allderdings des gesetzten Rahmens wegen hier verzichten. Man konsultiere dazu die einschlägige Literatur über Analysis und partielle Differentialgleichungen):

Satz:

(Greensche Formel)

$$\int_G (\varphi \Delta \Psi - \Psi \Delta \varphi) dV = \int_{\partial G} \left(\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma$$

Die Greensche Formel „verallgemeinert“ die partielle Integration für den Laplace-Operator.

Satz: (Poissonsche Integralformel)

Vor.: Gegeben sei das Dirichletproblem $\Delta u = 0$ in G

$G =$ Kreisscheibe $K_{r_0}(\vec{0})$, Randbedingungen: $u(\vec{x}) = f(\vec{x})$ auf ∂G

$\leadsto u(\vec{x}) = \tilde{u}(r, \varphi) = f(\varphi)$ auf $\partial K_{r_0}(\vec{0})$

Beh.:

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(t - \varphi) + r^2} dt, \quad r < r_0$$

Aus dieser Formel kann man den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen herleiten:

Satz: (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)

Vor.: Sei $K_{r_0}(x_0, y_0) \subseteq G = D_u$, u harmonisch

Beh.:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t)) dt, \quad r < r_0$$

Aus dem Mittelwertsatz wiederum ist es möglich, auf das Maximumprinzip zu schliessen. Die Erfahrung zeigt, dass diese hier genannten Formeln sehr nützliche Dienste leisten bei der Untersuchung von Differentialgleichungen im Zusammenhang mit harmonischen Funktionen.

8.1.10 Plattengleichung und biharmonischer Operator

Wir betrachten die folgende Gleichung, welche ein Modell für die Biegung einer dünnen Platte darstellt:

$$\Delta^2 u(x, y) = \Delta(\Delta u(x, y)) = \frac{q(x, y) \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot h^3} = \text{const.} \cdot q(x, y)$$

Wir nennen diese Gleichung die **Plattengleichung**. Δ^2 heisst dabei **biharmonischer Operator**. E, ν und h sind in der Physik beheimatete Konstanten, die wir hier nicht weiter besprechen wollen. $q(x, y)$ ist eine Funktion, welche oft auch konstant ist. Wir werden solgleich sehen, dass die Modellierung der Randbedingungen sehr ins Physikalische hineingreifen und die Auffindung einer Lösung daher in der Folge nicht von der Mathematik aus alleine steuerbar ist.

Die Ein Spezialfall der Plattengleichung ist die Gleichung $\Delta^2 u(x, y) = 0$. Es handelt sich dabei um den homogenen Fall der Plattengleichung. Wir wollen die Lösungen dieser Gleichung **biharmonische Funktionen** nennen. Trivialerweise gilt wegen $\Delta u(x, y) = 0 \Rightarrow \Delta^2 u(x, y) = 0$:

Satz: Die Menge der harmonischen Funktionen ist eine echte Teilmenge der biharmonischen Funktionen.

So ist z.B. $\Delta(x^3) = 6x \neq 0$, jedoch $\Delta^2(x^3) = \Delta(6x) = 0$.

Um zu Lösungen der Plattengleichungen zu kommen genügt es also, eine Trivallösung zu finden und dazu Linearkombinationen von biharmonischen Funktionen zu addieren. Das Problem einer genaueren Erforschung der Menge der biharmonischen Funktionen wollen wir hier nicht angehen. Dafür besprechen wir zwei Spezialfälle:

8.1.11 Das Modellierungsbeispiel der an vier Punkten aufgehängten Platte

Sei $\frac{q(x, y) \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot h^3} = \text{const.} \cdot q(x, y) = p = 6$.

Zudem sei eine quadratische Platte mit den Eckpunkten $(\pm x_0, \pm y_0)$ gegeben.

Wir suchen wieder eine achsensymmetrische Lösung bei der Bedingung, dass die Platte an vier Punkten befestigt ist. Daher machen wir den Ansatz für die Auslenkung bzw. Durchbiegung:

$$u(x, y) = c_6 x^4 + c_5 x^2 y^2 + c_4 y^4 + c_3 x^2 + c_2 y^2 + c_1$$

Damit wird:

$$\Delta u(x, y) = 2c_5 x^2 + 12c_6 x^2 + 12c_4 y^2 + 2c_5 y^2 + 2c_2 + 2c_3 \Rightarrow \Delta^2 u(x, y) = 24c_4 + 8c_5 + 24c_6 = 6$$

Weiter stellen wir die „Querkräftebedingung“: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$ für $x = \pm x_0$
und $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$ für $y = \pm y_0$.

$$\leadsto 4c_5 x + 24c_6 x = 0, \quad 24c_4 y + 4c_5 y = 0.$$

Für $\pm x_0$ und $\pm y_0$ erhalten wir jedoch damit nur 2 und nicht 4 Bedingungen. Damit haben wir bis jetzt aber 3 Gleichungen für die Unbekannten c_4, c_5, c_6 . Fordert man weiter noch $u(\pm x_0, \pm y_0) = 0$, so hat man noch eine weitere Gleichung. Weitere Bedingungen kann man mittels der Biegemomente auf dem Rand erhalten, womit die fehlenden Konstanten aufgrund der Modellierung bestimmbar werden. Damit erkennen wir, dass es möglich ist, durch einen Ansatz (hier ein Polynom vom Grade 4) eine Lösung quasi vorauszubestimmen. Denn bei diesem Lösungskonzept geht es nicht um die Frage, welche Lösung aus der Menge aller möglichen Lösungen die richtige sei, sondern um die Frage, ob ein angenommenes Modell für eine Lösung wohl dem Modell der Differentialgleichung der Platte genügen kann und diese Lösung daher nicht zum Vornherein ausgeschlossen werden muss.

Wir haben somit hier infolge unserer **Ansatzmethode** eine **nicht ausschliessbare Lösung** und nicht eine **zwingend einschliessbare** vor uns.

8.1.12 Das Modellierungsbeispiel Kreisplatte

Sei wieder $\frac{q(x, y) \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot h^3} = \text{const.} \cdot q(x, y) = p = 6$. Zudem sei eine kreissymmetrische Platte mit dem Radius R gegeben, welche am Rande gelenkig gelagert ist, d.h. es gilt $u(R \cos(\varphi), R \sin(\varphi)) = 0$.

Um das Problem behandeln zu können, müssen wir zuerst den Laplace-Operator in Polarkoordinaten schreiben. Dazu benutzen wir die Formeln ab Seite 224, speziell Formel (*) von Seite 228.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u(r, \varphi)}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3 u(r, \varphi)}{\partial r^3} \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \frac{1}{r^3} &= p \quad | \cdot r^4 \\ \Rightarrow \frac{\partial^4 u(r, \varphi)}{\partial r^4} r^4 + 2 \frac{\partial^3 u(r, \varphi)}{\partial r^3} r^3 - \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} r^2 + \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} r &= p r^4 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kennt man unter dem Namen „Eulersche Differentialgleichung“. Der Schnelle halber lösen wir sie mit der Maschine:

Input:

```
solv = DSolve[r^4 u''''[r]+2 r^3 u'''[r]-r^2 u''[r]+r u'[r]== p r^4,u,r]//Flatten
```

Output:

$$\left\{ u \rightarrow \text{Function} \left[\{r\}, \frac{p r^4}{64} + \frac{c_2 r^2}{2} - \frac{c_3 r^2}{4} + \frac{1}{2} c_3 \log(r) r^2 + c_4 + c_1 \log(r) \right] \right\}$$

Da bei der Platte $u(0)$ endlich sein muss, muss $c_1 = 0$ sein. Ebenso muss die Krümmung — und damit $u''(r)$ an der Stelle $r = 0$ endlich sein. Somit muss auch der Term $c_3 = 0$ sein. Wir erhalten:

$$u(r) = \frac{p r^4}{64} + \frac{c_2 r^2}{2} + c_4$$

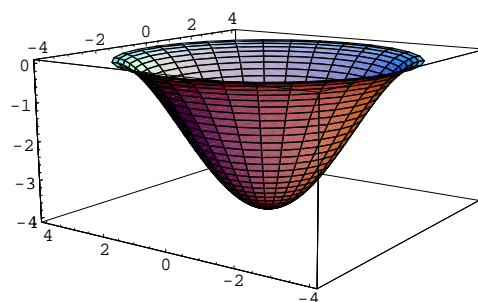
Input:

```
u1[r_] := (u[r] /. solv) /. {C[3] -> 0, C[1] -> 0}; Print["u1(r) = ", u1[r]];
solv1 = Solve[Evaluate[{u1[R] == 0, (u1'[r] /. r -> R) == 0}], {C[2], C[4]}] // Flatten;
Print[solv1];
u2[r_] := u1[r] /. solv1; Print["u2(r) = ", u2[r]];
u3[r_] := u2[r] /. {R -> 4, p -> -1}; Print["u3(r) = ", u3[r]];
ParametricPlot3D[{r Cos[fi], r Sin[fi], u3[r]}, {r, 0, 4}, {fi, 0, 2 Pi}]
```

Man beachte, dass die hier gewählten Werte für R und p nur der gut erkennbaren Dokumentation des Verfahrens dienen, jedoch darüber hinaus keine praktische Bedeutung haben.

Output:

$$\begin{aligned} u1(r) &= \frac{p r^4}{64} + \frac{c_2 r^2}{2} + c_4 \\ \left\{ c_4 \rightarrow \frac{p R^4}{64}, c_2 \rightarrow -\frac{p R^2}{16} \right\} \\ u2(r) &= \frac{p r^4}{64} - \frac{1}{32} p R^2 r^2 + \frac{p R^4}{64} \\ u3(r) &= -\frac{r^4}{64} + \frac{r^2}{2} - 4 \end{aligned}$$



8.1.13 Numerische Methoden

Im Kurs Analysis haben wir die Differentiationsmethode mit Hilfe der zentralen Differenzen kennen gelernt. Wir erinnern uns:

Definition:

1. $y_k' := \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$ heisst **zentraler Differenzenquotient** in $x_k = x_0 + k \cdot h$.
2. $(y_k')_{fw} := \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$ heisst **Vorwärtsdifferenzenquotient** in $x_k = x_0 + k \cdot h$.
3. $(y_k')_{bw} := \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h}$ heisst **Rückwärtsdifferenzenquotient** in $x_k = x_0 + k \cdot h$.

Satz:

Vor.:

Sei $f(x)$, $f(x, y)$ in I genügend oft differenzierbar,
 $x_k = x_0 + k h_x \in I$, $k = 0, 1, \dots, n$, $h = h_x$
 $y_j = y_0 + k h_y \in I$, $k = 0, 1, \dots, n$
 $f(x) := y(x)$ oder $f(x, y) := w(x, y)$

Beh.:

1. $y_k' = f'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O[h^2]$
2. $y_k'' = f''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O[h^2]$
3. $y_k''' = \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_{k-1} - y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2]$
4. $y_k^{(4)} = \frac{y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2]$
5. $\frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial x} = w'_{x|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} - w_{k-1,j}}{2h_x} + O[h - x^2]$
6. $\frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial y} = w'_{y|k,j} \approx \frac{w_{k,j+1} - w_{k,j-1}}{2h_y} + O[h_y^2]$
7. $\frac{\partial^2 f(x_k, y_j)}{\partial x \partial y} = w''_{xy|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j+1} - w_{k+1,j-1} - w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1}}{4h_x h_y} + O[\text{Max}(h_x^2, h_y^2)]$
8. $\frac{\partial^4 f(x_k, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} = w_{xxyy|k,j}^{(4)} \approx O[\text{Max}(h_x^2, h_y^2)] +$

$$\frac{w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1} - 2w_{k+1,j} - 2w_{k,j+1} - 2w_{k,j-1} - 2w_{k-1,j} + 4w_{k,j}}{h_x^2 h_y^2}$$

Auf dieser Basis können wir den Laplace-Operator sowie den biharmonischen Operator diskretisieren und auf partielle Differentialgleichungen anwenden. Da die Indices in den hier nachfolgend behandelten Fällen sternförmig angeordnet sind, sprechen wir von **Differenzesternern**.

Nach Ausführung der notwendigen Additionen erhalten wir als Resultat:

Korollar:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Rightarrow \Delta w_{k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2}$$

$$\Delta^2 f(x, y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \Rightarrow \Delta \Delta w_{k,j} \approx \frac{1}{h^4} (20w_{k,j} - 8(w_{k+1,j} + w_{k-1,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}) + 2(w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1}) + (w_{k+2,j} + w_{k-2,j} + w_{k,j+2} + w_{k,j-2}))$$

8.1.14 Numerische Beispiele: Differenzenverfahren

1. Beispiel:

Wir behandeln das Randwertproblem $y''(x) + x y(x) = (10 - x)$, $y(0) = 0$, $y(10) = 0$. Wir lösen das Problem zuerst einmal exakt mit der Maschine *Mathematica*:

Input

```
Remove["Global`*"];
solv=DSolve[
{y''[x]+ x y[x]== (10-x), y[0]==0, y[10]==0}, y, x]//Flatten;
z[x_]:=y[x]/.solv;
z[x]//N//InputForm
```

Da der Output mit der exakten Lösungsfunktion sehr umfangreich ist und daher hier so nicht wiedergegeben werden kann, formatieren wir diesen Output um. In eine numerische Form umgerechnet wird er kürzer, jedoch auch ungenau. Das Symbol I ersetzen wir noch durch i (imaginäre Einheit). Die **Ausgabe des Outputs** erfolgt bis auf i in der InputForm:

```
(-0.08964587887974669 + 0.15527121690888887 * i) * ((-164.5127163185611 - 6.802642361168156 * i) *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] + (90.44636614419267 - 3.9275073984206585 * i) *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] - (8.761118449750352 + 15.174702286096874 *
i) *
AiryAiPrime[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] + (8.761118449750352 + 15.174702286096874 *
i) *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] * AiryBiPrime[(0.5000000000000001 +
0.8660254037844386 * i) * x] + (107.74890041919937 + 5.258016244624741 *^- 13 * i) * x *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.3333333333333333, 0.6666666666666666, 1.3333333333333333, -0.1111111111111111 *
x^3] - (62.20885666191094 + 3.126388037344441 *^- 13 * i) * x *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.3333333333333333, 0.6666666666666666, 1.3333333333333333, -0.1111111111111111 *
x^3] + (19.637536992104444 + 34.01321180583861 * i) * x^2 *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.6666666666666666, 1.3333333333333333, 1.6666666666666667, -0.1111111111111111 *
x^3] + (11.337737268612731 + 19.63753699210468 * i) * x^2 *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.6666666666666666, 1.3333333333333333, 1.6666666666666667, -0.1111111111111111 *
x^3])
```

Da hier komplexe Funktionen vorkommen, verzichten wir aus Zeitgründen auf den Versuch, damit einen Plot herzustellen. Statt dessen verwenden wir das vorgegebene Programm zur Auffindung einer numerischen Lösung:

Input:

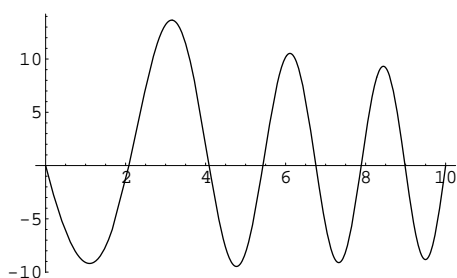
```
Remove["Global`*"];
Nsolv=NDSolve[
{y''[x]+ x y[x]== (10-x),y[0]==0, y[10]==0},y,x]//Flatten;
Plot[y[x]/.Nsolv,{x,0,10}];
```

Output siehe unten!

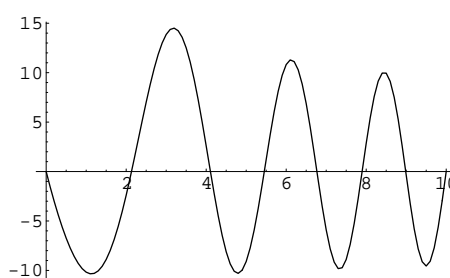
Nun versuchen wir, die Lösung selbst einmal numerisch mit Hilfe von Differenzengleichungen zu berechnen. Nachstehend das Programm:

Input:

```
Remove["Global`*"];
s=100; h=10/s;
x[k_]:=k h;
tab1=Table[x[k],{k,0,s,10/s}];
y[0]=0; y[s]=0;
tab2=Table[y[k],{k,1,s-1}];
y2[k_]:= (y[k+1]-2 y[k]+y[k-1])/h^2;
gleich[k_]:= (y2[k]+x[k] y[k]==(10-x[k]));
solv = Solve[Table[gleich[k],{k,1,s-1}],tab2]//Flatten;
z[k_]:=y[k]/.solv; z[0]=y[0];z[s]=y[s];
tab=Table[{x[k],z[k]}/N,{k,0,s}];
ListPlot[tab,PlotJoined->True];
```

Output:

Hergestellt mit NDSolve (*Mathematica*)



Hergestellt mittels Berechnung mit Hilfe von Differenzengleichungen (*Mathematica*)

2. Beispiel: Verfahren von Richardson, biharmonischer Operator.

Wir behandeln das Randwertproblem (eingespannte Platte)

$$\Delta^2 z(x, y) = \Delta(\Delta(z(x, y))) = 2, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = z(x, 0) = z(x, 10) = 0, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G$$

$$\Rightarrow \frac{dz(x, y)}{dx} = 0 \text{ für } x = 0, x = 10, \quad \frac{dz(x, y)}{dy} = 0 \text{ für } y = 0, y = 10$$

Auf dem Rand kann der zentrale Differenzenquotient nicht ohne Gebietserweiterung verwendet werden. Wir benutzen daher für die Umsetzung der Randbedingungen den Vorwärtsdifferenzenquotient und den Rückwärtsdifferenzenquotient. Daraus schliesst man, dass für $k = 1, k = s - 1, j = 1, j = s - 1$ die Werte der Lösungsfunktion ebenfalls 0 gesetzt werden müssen.

Im Verfahren von Richardson wird ein Rechteckgebiet der Länge nach in $s_k \in \mathbb{N}$ und der Breite nach in $s_j \in \mathbb{N}$ Teilrechtecke aufgeteilt. Dadurch entstehen $s_k \cdot s_j$ gleich grosse Teilrechtecke. Im Beispiel ist $s_k = s_j = s$.

Wenn das gegebene Gebiet jedoch kein Rechtecksgebiet ist, so wählen wir bei derselben Rasterung diejenigen Punkte, welche dem Rande am nächsten liegen, als Randpunkte. Damit verändern wir die Gebietsform ein klein wenig. Dieses Vorgehen kann mit rechtem Aufwand verbunden sein, denn man muss dabei peinlich darauf achten, dass die Anzahl der zu berechnenden Punkte (Variablen) mit der Anzahl Gleichungen übereinstimmt und dass in jeder Zeile und Spalte genügend bekannte Randbedingungen dafür bereitgestellt werden.

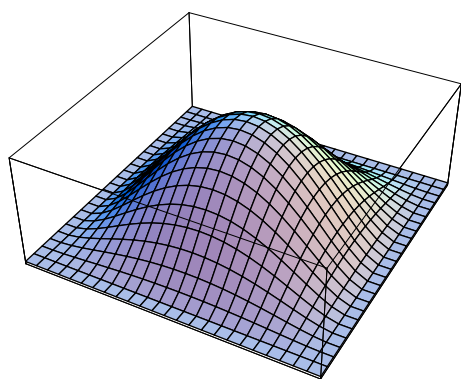
Folgendes Programm liefert nun den Output für unser Beispiel:

Input:

```
Remove["Global`*"];
breite = 10; laenge=breite;
s=24; h=breite/s;
x[k_]:=k h;
y[j_]:=j h;
tab1=Table[{x[k],y[j]},{k,0,s,breite/s},{j,0,s,breite/s}];
z[0,j_]=0; z[s,j_]=0;
z[1,j_]=0; z[s-1,j_]=0;
z[k_,0]=0; z[k_,s]=0;
z[k_,1]=0; z[k_,s-1]=0;
tab2=Table[z[k,j]},{k,2,s-2},{j,2,s-2}]/Flatten;
zBH[k_,j_]:= 1/(h^4) (20 z[k,j]-
8(z[k+1,j]+z[k-1,j]+z[k,j+1]+z[k,j-1])+
2(z[k+1,j+1]+z[k+1,j-1]+z[k-1,j+1]+z[k-1,j-1])+
(z[k+2,j]+z[k-2,j]+z[k,j+2]+z[k,j-2])
);
gleich[k_,j_]:= (zBH[k,j]==2);
solv = Solve[Table[gleich[k,j]},{k,2,s-2},{j,2,s-2}]/Flatten,tab2]/Flatten;
w[k_,j_]:=z[k,j]/.solv;
w[0,j_]=0; w[s,j_]=0;
w[1,j_]=0; w[s-1,j_]=0;
w[k_,0]=0; w[k_,s]=0;
w[k_,1]=0; w[k_,s-1]=0;
tab=Table[w[k,j]//N,{k,0,s},{j,0,s}];
ListPlot3D[tab,Axes->False];
Print["Maximale Höhe = ",w[s/2,s/2]//N];
```

Output:

Maximale Höhe = 21.1238



Die Berechnung erfolgte mit Hilfe von Differenzengleichungen und *Mathematica 5.2* auf einem alten PC aus dem Jahre 2003. Bei den verwendeten 25×25 Punkten ist das Programm genügend leistungsfähig, sodass der Output sofort erscheint.

Da der Graph als geplottete Liste erzeugt worden ist, werden hier bei der Grundeinstellung die Achsen nach den verwendeten Indices skaliert statt nach Länge und Breite. Um den Programmieraufwand für eine dem Problem angepasste Skalierung zu sparen, wurde diese weggelassen.

Hinweis: Wenn irgend eine partielle Differentialgleichung in eine Differenzengleichung umgewandelt wird, so sind jeweils die **Konvergenzbedingungen** zu beachten. Z.B. bei zwei Variablen x und y können h_x und h_y nicht beliebig gewählt werden. Abhängig von der Gleichungsart muss für die Sicherung der Konvergenz üblicherweise eine gewisse Beziehung zwischen h_x und h_y bestehen. Man konsultiere dazu die Fachliteratur.

3. Beispiel: Verfahren von Richardson, Potentialproblem (Dirichletproblem).

Wir behandeln das Randwertproblem (Potentialproblem)

$$\Delta z(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = \sin(y \frac{\pi}{10}), \quad z(x, 0) = \sin(x \frac{\pi}{10}), \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G.$$

In diesem Fall müssen wir den Operator Δ diskretisieren:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Rightarrow \Delta w_{k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2},$$

$$\Delta f(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2} = 0$$

Folgendes Programm liefert nun den Output für unser Beispiel:

Input:

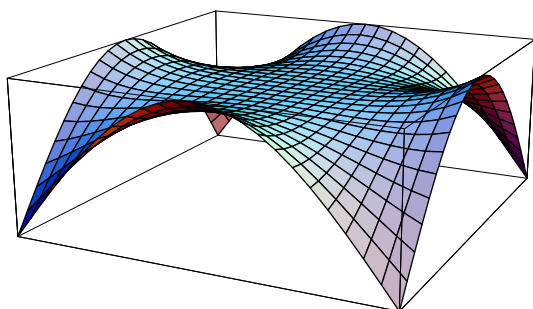
```
Remove["Global`*"];
gleichungen[
s_] := Module[{breite, h, x, y, k, j, z, tab1, tab2, fkt, zBH, solv, w, tab},
  breite = 10; laenge = breite;
  h = breite/s;
  x[k_] := k h;
  y[k_] := k h;
  fkt[x_, y_] := 0;
  tab1 = Table[{x[k], y[j]}, {k, 0, s, breite/s}, {j, 0, s, breite/s}]/N;
  tab2 = Table[z[k, j], {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}] // Flatten;
  z[0, j_] := Sin[j Pi /s] // N;
  z[s, j_] := Sin[j Pi /s] // N;
```

```

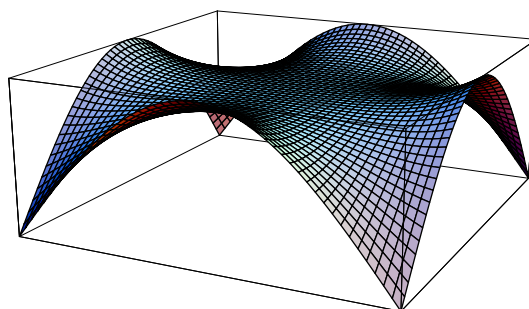
z[k_, 0] := Sin[k Pi /s] // N;
z[k_, s] := Sin[k Pi /s] // N;
zBH[k_, j_] := 1/(h^2) (-4 z[k, j] + z[
    k + 1, j] + z[k - 1, j] + z[k, j + 1] + z[k, j - 1]);
gleich[k_, j_] := (zBH[k, j] == 0);
solv = Solve[Table[gleich[k, j], {k, 1,
    s - 1}, {j, 1, s - 1}] // Flatten, tab2] // Flatten;
w[k_, j_] := z[k, j] /. solv;
w[0, j_] = Sin[j Pi /s] // N; w[s, j_] = Sin[j Pi /s] // N;
w[k_, 0] = Sin[k Pi /s] // N; w[k_, s] = Sin[k Pi /s] // N;
tab = Table[w[k, j] // N, {k, 0, s}, {j, 0, s}];
ListPlot3D[tab, Axes ->
    False, ViewPoint -> {-2.682, -1.311, 0.856}, PlotRange -> {0, 1}];
Print["Zentrale Höhe = ", w[s/2, s/2] // N];];
gleichungen[24];
gleichungen[50];
gleichungen[80];
gleichungen[100];

```

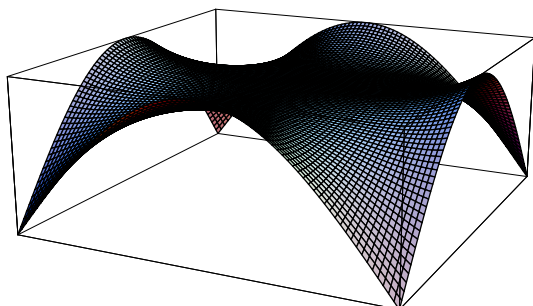
Output:



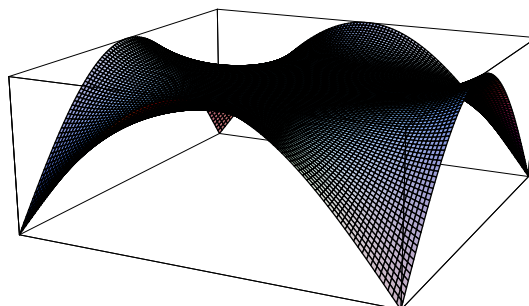
$s = 24$, zentrale Höhe = 0.798711



$s = 50$, zentrale Höhe = 0.797451



$s = 80$, zentrale Höhe = 0.797221



$s = 100$, zentrale Höhe = 0.797168

8.1.15 Numerische Beispiele: Iterationsverfahren

Das Gauss–Seidelschen Relaxationsverfahren

Oben haben wir beim biharmonischen Operator mit $25 \cdot 25 = 625$ Punkten resp. Gleichungen gearbeitet. Nimmt man mehr Punkte, so kann je nach Aufgabe und Punktzahl die Rechenzeit untragbar gross werden. Für viele Bedürfnisse ist jedoch eine höhere Genauigkeit erforderlich, z.B. $1000 \cdot 1000 = 10^6$ Punkte resp. Gleichungen. In diesem Fall kann es einfacher sein, eine Iteration zu versuchen.

Dabei geht man von gegebenen Differenzensternen resp. vergleichbaren Gebilden z.B. der Art $w_{k,j} = q(w_{k-2,j}, w_{k-1,j-1}, w_{k-1,j}, w_{k-1,j+1}, \dots)$ aus.

Man kann nun für eine gegebene Gleichung $\mathcal{D}(z(x, y)) = f(z(x, y), x, y)$ eine Iteration folgender Art versuchen:

1. Bestimme aus dem zugehörigen Differenzenstern die notwendigen Gleichungen für die Werte $w_{k,j}$.
2. Wähle für alle Punkte, an denen der Funktionswert unbekannt ist, eine vernünftige Startnäherung $w_{k,j}^0 = c_{k,j}$.
3. Iteriere das System nach Umschreibung der Gleichungen in Rekursionsgleichungen, z.B.

$$w_{k,j}^{n+1} = q(w_{k-2,j}^n, w_{k-1,j-1}^n, w_{k-1,j}^n, w_{k-1,j+1}^n, \dots)$$

4. Falls sich die Werte quasi stabil verhalten, so hat man vielleicht eine Lösung gefunden. Ohne die Beschaffung von Konvergenzkriterien zum jeweiligen Problem kann es aber leicht zu Irrtümern kommen. Probleme sind hier **numerische Instabilität** und **langsame Konvergenz**, so dass Abbruchbedingungen fälschlicherweise greifen, also den Programmabbruch auslösen. Man kann das Resultat kontrolliere durch Überprüfung der Gleichung $\mathcal{D}(z(x, y)) = f(z(x, y), x, y)$, welche für diese Überprüfung wiederum zu diskretisieren ist. Bei langsamer Konvergenz kann jedoch die Überprüfung bei Mangel an Genauigkeit keine Information liefern. Nachfolgende Beispiele können das veranschaulichen.
5. Bezüglich Konvergenzbeweisen muss des Rahmens wegen auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen werden.

1. Beispiel: Relaxationsverfahren, Potentialproblem (Dirichletproblem).

Wir behandeln wiederum wie vorhin das Randwertproblem (Potentialproblem)

$$\Delta z(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = \sin(y \frac{\pi}{10}), \quad z(x, 0) = \sin(x \frac{\pi}{10}), \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G.$$

$$\frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2} = 0 \Rightarrow w_{k,j} = \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{4}$$

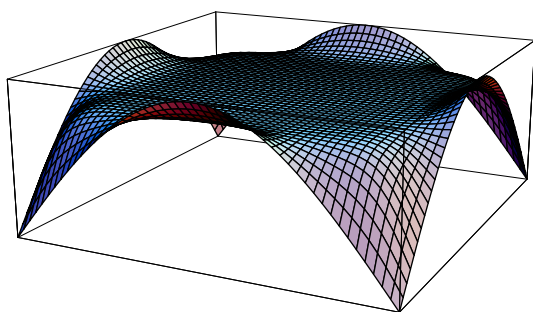
Diese Gleichung können wir in eine Iterationsgleichung verwandeln:

$$w_{k,j,n} = \frac{w_{k+1,j,n-1} + w_{k-1,j,n-1} + w_{k,j+1,n-1} + w_{k,j-1,n-1}}{4}$$

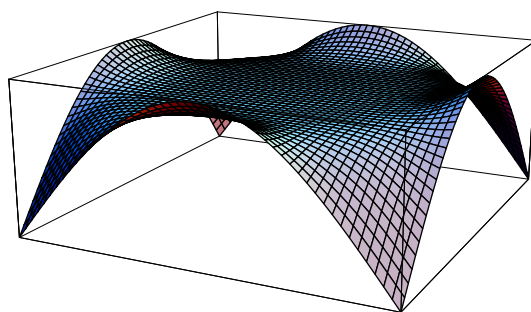
$$|w_{k,j,n}| \leq \text{Max}(|w_{k+1,j,n-1}|, |w_{k-1,j,n-1}|, |w_{k,j+1,n-1}|, |w_{k,j-1,n-1}|)$$

Da die Werte auf dem Rande gegeben sind und für das Dirichletproblem das Maximumprinzip gilt, können die Werte von $w_{k,j,n}$ das Intervall der Randextrema nicht verlassen. Daraus kann man auf die Konvergenz schließen. Wie wir aber sehen werden, ist die Konvergenz sehr langsam. Wir starten unsere Iteration mit konstanten Werten im innern: $wert = c$.

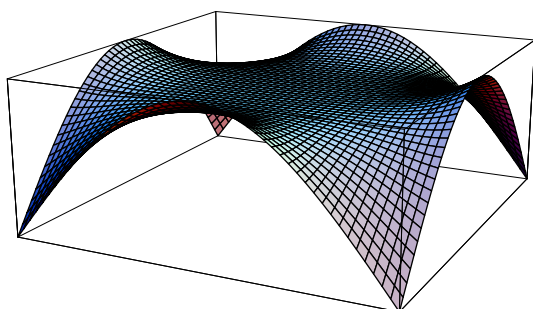
Output (hier mit $wert = c = 0.797221183398142 = \text{Resultat von vorhin}$):



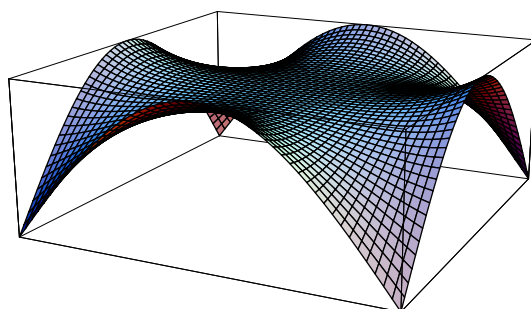
20 Schritte, zentrale Höhe = 0.797221



50 Schritte, zentrale Höhe = 0.797221



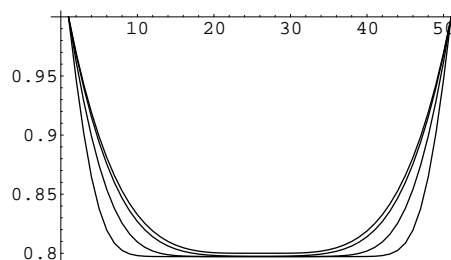
100 Schritte, zentrale Höhe = 0.797418



1000 Schritte, zentrale Höhe = 0.800046

Hier sieht man das Verhalten der Kurven in der Mitte des Bildes.

D.h. für $x = \frac{Laenge}{2}$ oder $y = \frac{Breite}{2}$.



Verwendetes Programm (Input):

```
Remove["Global`*"];
bild[s_, end_, wert_] := Modul[{breite, fkt, h, x, y, k, j, u, w, uu},
  Remove[u, w, uu, fkt, x, y];
  breite = 10; laenge = breite;
  h = breite/s; x[k_] := k h; y[j_] := j h;
  fkt[x_, y_] := wert;
  tab1 = Table[{x[k], y[j]}, {k, 0, s, breite/s}, {j, 0, s, breite/s}];
  tab2 = Table[z[k, j, n], {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}] // Flatten;
  u[k_, j_, 0] = fkt[x[k], y[j]];
  u[0, j_, n_] := Sin[j Pi /s]; u[s, j_, n_] := Sin[j Pi /s];
  u[k_, 0, n_] := Sin[k Pi /s]; u[k_, s, n_] := Sin[k Pi /s];
  w[0, j_, n_] := Sin[j Pi /s]; w[s, j_, n_] := Sin[j Pi /s];
  w[k_, 0, n_] := Sin[k Pi /s]; w[k_, s, n_] := Sin[k Pi /s];
  Do[(w[k, j, 1] = (u[k + 1, j, 0] + u[k - 1, j, 0] + u[k, j + 1, 0]
    + u[k, j - 1, 0])/4), {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}];
  Do[(uu[k, j, 0] = w[k, j, 1] // N), {k, 0, s}, {j, 0, s}];
  For[n = 1, n = end,
    Table[w[k, j, 1] = (uu[k + 1, j, 0] + uu[k - 1, j, 0]
```

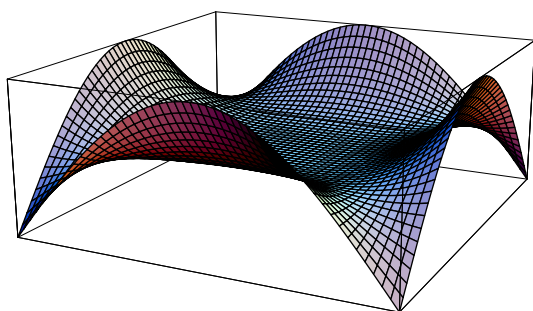


```

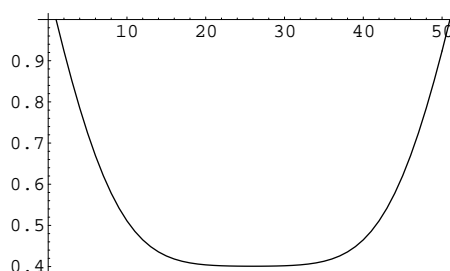
+ uu[k, j + 1, 0] + uu[k, j - 1, 0])/4)// N, {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}];
Table[(uu[k, j, 0] = w[k, j, 1]), {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}];
n++;];
tab3D = Table[w[k, j, 1] // N, {k, 0, s}, {j, 0, s}];
tab2D = Table[w[k, s/2, 1] // N, {k, 0, s}];
(*Print[tab];*)
pl3D[s, end, wert] = ListPlot3D[tab3D, Axes ->
    False, ViewPoint -> {-2.682, -1.311, 0.856}, PlotRange -> {0, 1}];
pl2D[s, end, wert] = ListPlot[tab2D, PlotJoined -> True];
Print["Zentrale Höhe = ", w[s/2, s/2, 1] // N]; end];
s = 50; end = 20; wert = 0.797221183398142;
bild[50, end, 0.797221183398142];
bild[50, 50, 0.797221183398142];
bild[50, 100, 0.797221183398142];
bild[50, 1000, 0.797221183398142];
Show[pl2D[s, 20, wert], pl2D[s, 50, wert], pl2D[s, 100, wert], pl2D[s, 1000, wert]];

```

Eine Iteration mit $end = 100$ Schritten, $s = 50$ Intervallen und einem Startwert der erwarteten Funktion von $wert = c = 0.4$ ergibt:

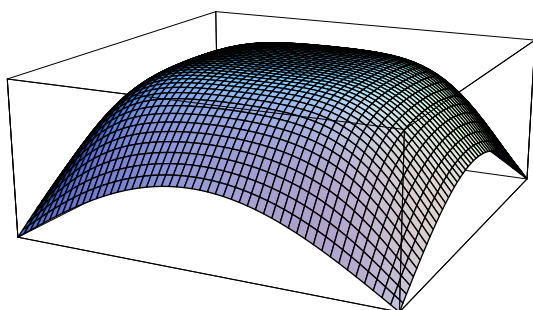


Zentrale Höhe = 0.400824

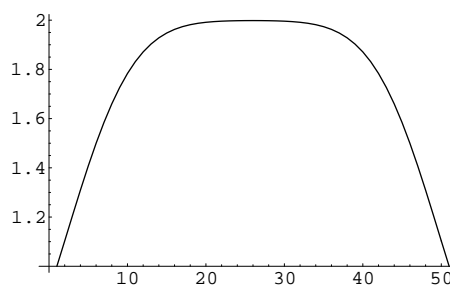


Wie man sieht, ist bei einer Starthöhe von 0.4 in 100 Schritten die erwartete zentrale Höhe ≈ 0.8 längst noch nicht erreicht: Es hat sich dort praktisch noch nichts bewegt.

Eine Iteration mit $end = 100$ Schritten, $s = 50$ Intervallen und einem Startwert der erwarteten Funktion von $wert = c = 2.0$ ergibt:



Zentrale Höhe = 1.9983

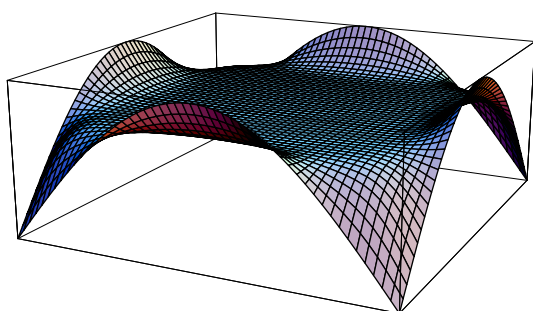


Wie man wiederum sieht, ist auch hier bei einer Starthöhe von 2.0 in 100 Schritten die erwartete zentrale Höhe ≈ 0.8 längst noch nicht erreicht. Um ein brauchbares Resultat zu erhalten, muss end sehr gross gewählt werden.

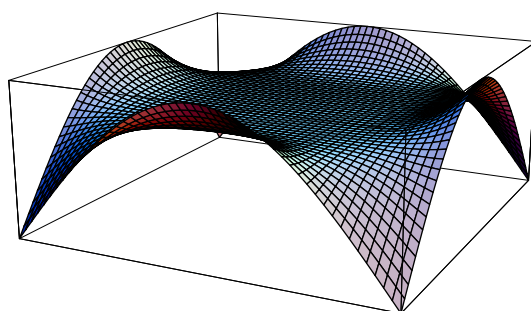
Wir untersuchen noch das Verhalten der Iteration bei einer Starthöhe (Funktionswerte) $wert = c = 0.7$:

```
s=50;end=20;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
s=50;end=50;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
s=50;end=100;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
s=50;end=3000;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
Show[p12D[50,20,0.7],p12D[50,50,0.7],p12D[50,100,0.7],p12D[50,3000,0.7]];
```

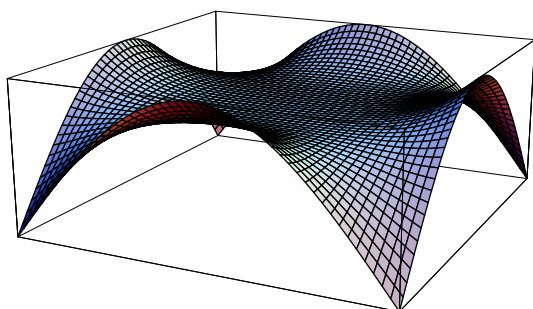
Output (hier mit $wert = c = 0.7$):



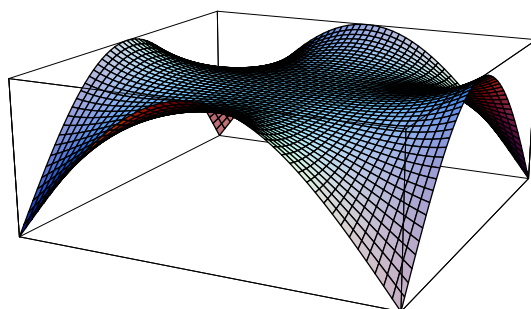
20 Schritte, zentrale Höhe = 0.7



50 Schritte, zentrale Höhe = 0.7

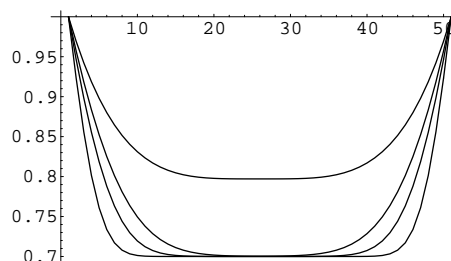


100 Schritte, zentrale Höhe = 0.700351



3000 Schritte, zentrale Höhe = 0.797081

Bei 3000 Schritten dauerte die Wartezeit zur Berechnung und Generierung des 3D-Graphen bei Verwendung eines PS's aus dem Jahre 2003 nur ein paar Sekunden. Man sieht jedoch, dass bei einem beliebig geschätzten und gewählten Startwert ohne eine grosse Schrittzahl mit diesem Verfahren nichts auszurichten ist.



2. Beispiel: Relaxationsverfahren, Problem der eingespannten Platte:

Wir behandeln wie auf Seite 241 das Randwertproblem:

$$\Delta^2 z(x, y) = \Delta(\Delta(z(x, y))) = 2, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = z(x, 0) = z(x, 10) = 0, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G$$

$$\Rightarrow \frac{dz(x, y)}{dx} = 0 \text{ für } x = 0, \quad x = 10, \quad \frac{dz(x, y)}{dy} = 0 \text{ für } y = 0, \quad y = 10$$

Zu iterieren wäre hier das System der Gleichungen (in jedem innern Punkt eine Gleichung):

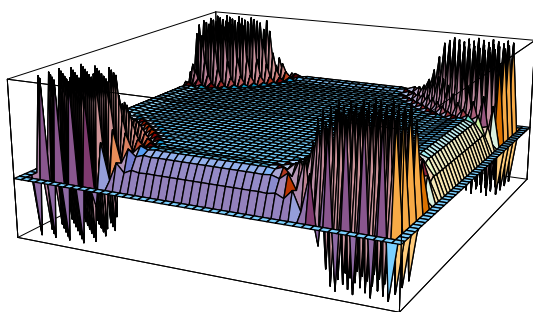
$$\begin{aligned} u(k, j, n) = & \frac{1}{20} (fkt(x(k), y(j)) h^4 - u(k-2, j, n-1) - 2u(k-1, j-1, n-1) \\ & + 8u(k-1, j, n-1) - 2u(k-1, j+1, n-1) - u(k, j-2, n-1) + 8u(k, j-1, n-1) + 8u(k, j+1, n-1) \\ & - u(k, j+2, n-1) - 2u(k+1, j-1, n-1) + 8u(k+1, j, n-1) - 2u(k+1, j+1, n-1) - u(k+2, j, n-1)) \end{aligned}$$

Wir verwenden das folgende Programm:

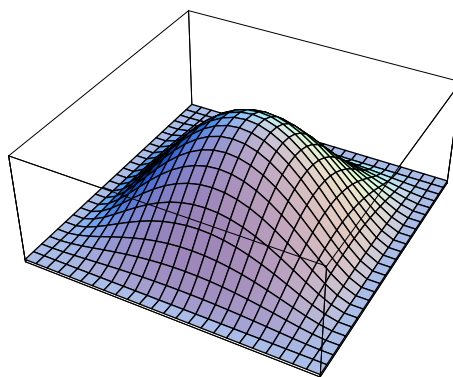
Input:

```
Remove["Global'"];
end = 20; fkt[x_, y_] := 0.2;
breite = 10; laenge = breite; s = 48; h = breite/s;
x[k_] := k h; y[j_] := j h;
tab1 = Table[{x[k], y[j]}, {k, 0, s, breite/s}, {j, 0, s, breite/s}];
tab2 = Table[z[k, j, n], {k, 2, s - 2}, {j, 2, s - 2}] // Flatten;
solv = Solve[1/(h^4) (20 u[k, j, n] - 8(u[k + 1, j, n - 1]
+ u[k - 1, j, n - 1] + u[k, j + 1, n - 1] + u[k, j - 1, n - 1])
+ 2(u[k + 1, j + 1, n - 1] + u[k + 1, j - 1, n - 1] + u[k - 1, j
+ 1, n - 1] + u[k - 1, j - 1, n - 1]) + (u[k + 2, j, n - 1]
+ u[k - 2, j, n - 1] + u[k, j + 2, n - 1] + u[k, j - 2, n - 1]))
== fkt[x[k], y[j]], {u[k, j, n]}] // Flatten;
w[kk_, jj_, nn_] := (u[k, j, n] /. solv) /. {k -> kk, j -> jj, n -> nn};
u[k_, j_, 0] = 0;
u[0, j_, n_] = 0; u[s, j_, n_] = 0;
u[1, j_, n_] = 0; u[s - 1, j_, n_] = 0;
u[k_, 0, n_] = 0; u[k_, s, n_] = 0;
u[k_, 1, n_] = 0; u[k_, s - 1, n_] = 0;
w[0, j_, n_] = 0; w[s, j_, n_] = 0;
w[1, j_, n_] = 0; w[s - 1, j_, n_] = 0;
w[k_, 0, n_] = 0; w[k_, s, n_] = 0;
w[k_, 1, n_] = 0; w[k_, s - 1, n_] = 0;
Do[
  Do[w[k, j, n], {k, 2, s - 2}, {j, 2, s - 2}];
  Do[u[k, j, n] = w[k, j, n], {k, 2, s - 2}, {j, 2, s - 2}]
, {n, 1, end}];
tab = Table[w[k, j, end] // N, {k, 0, s}, {j, 0, s}];
ListPlot3D[tab, Axes -> False, ViewPoint -> {-2.682, -1.311, 0.856}];
```

Output (hier mit Startwert 0.2, 48×48 Intervalle, 20 Iterationsschritte):



Erhaltene Situation, beginnende Divergenz



Erwartete Situation

Wie man beobachten kann, funktioniert das Verfahren beim biharmonischen Operator nicht. Auch kann man aus unserer Rekursionsgleichung keine sofort ins Auge springende Abschätzung gewinnen, welche auf eine Konvergenz hindeuten würde.

Konsequenz:

Bevor von einem erhaltenen Resultat auf eine Konvergenz geschlossen werden kann, muss ein Konvergenzbeweis vorliegen. Es könnte sich auch um eine Scheinkonvergenz handeln, welche innerhalb der numerischen Genauigkeit in der Rechnung nicht von einer Divergenz unterscheidbar ist. Da es sich beim verwendeten Iterationsverfahren um eine Approximation einer Lösung eines Gleichungssystems handelt, das selbst wiederum nur eine Approximation liefert, zeigt sich die Sache hier als doppelt kritisch. Daher ist ein nicht begründetes Resultat unbrauchbar.

Bemerkung zur Methode der finiten Elemente:

Auf den ersten Blick scheint es aufwändiger, statt einem Rechtecksgitter ein der Geometrie des zu untersuchenden Gebiets angepasstes Gitter zu verwenden. Jedoch zeigen die Verfahren der finiten Elemente, welche diese Idee nutzbar machen, dass die Effizienz recht gross sein kann. Zu nennen sind die **Verfahren von Ritz** und **von Galerkin**. (Mehr darüber in einem der weiter hinten folgenden Abschnitte mit Hilfe der unten dargestellten Variationsrechnung.)

8.2 Schritte in die Variationsrechnung

8.2.1 Der Begriff der ersten Variation

In der Absicht, weitere Methoden zur Modellierung mathematischer Beschreibungen physikalischer oder technischer Vorgänge zu finden, befassen wir uns noch mit den Grundideen der Variationsrechnung. Dabei handelt es sich um eine mathematische Methode, welche auf Leonard Euler zurückgeht.

Demonstrationsmodell: Als Demonstrationsmodell wählen wir in Anlehnung an die fachliche Tradition ein **Minimumproblem**, welches wir physikalisch interpretieren können. Wir betrachten das Integral

$$E(w) = \int_{G=V} J(\vec{x}, w, \nabla w) dV.$$

Dabei ist es hilfreich, bei $E(w)$ an eine Energie zu denken. $w = w(\vec{x})$ soll eine Funktion sein aus der Klasse der im Gebiet $G = V \in \mathbb{R}^3$ differenzierbaren Funktionen mit fix gegebenen Randwerten:

$$w \in M = \{w(\vec{x}) \mid \vec{x} = \overrightarrow{OP}, (P \in G \Rightarrow w(\vec{x}) \in \mathcal{D}_{x,y,z}), (P \in \partial G \Rightarrow w(\vec{x}) = g(\vec{x}))\}$$

Gesucht: Eine Funktion $u(\vec{x})$ so, dass $E(w)$ minimal auf M .

Annahme: Sei $u(\vec{x})$ eine Funktion, die $E(w)$ in M minimiert. Sei $\varphi(\vec{x})$ eine genügend differenzierbare Funktion mit $\varphi(\vec{x}) = 0$ auf ∂G . Sei $w(\vec{x}, \varepsilon) = u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x}) \Rightarrow w(\vec{x}, \varepsilon) \in M$.

$\Rightarrow w(\vec{x}, \varepsilon)$ nimmt das Minimum $u(\vec{x})$ in M für $\varepsilon = 0$ an. $\Rightarrow \frac{\partial E(w(\vec{x}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0$.

Definition:
$$\frac{\delta E}{\delta u} := \frac{\partial E(w(\vec{x}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial E(u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$$

 $\leadsto \frac{\delta E}{\delta u}$ heisst **erste Variation** von E in **Richtung** φ .

Konsequenz: Wenn u eine minimalisierende Funktion für E ist, so ist an der Stelle u die erste Variation von E in jede Richtung gleich 0 (d.h. für alle zulässigen φ).

Bemerkung:

$E(w)$ ist ein **Funktional**. Mit Funktional bezeichnet man in der Mathematik meist eine Funktion aus einem Vektorraum V in den Körper K , über dem der Vektorraum betrachtet wird. Der Vektorraum ist oft ein Funktionenraum, d.h. ein Vektorraum, dessen Elemente reell- oder komplexwertige Funktionen sind. Ein Funktional ist somit eine Funktion auf Funktionen. Das Gebiet der **Funktionalanalysis** erhielt seinen Namen, da es aus dem Studium solcher Funktionale entstand.

8.2.2 Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung

Im Folgenden schreiben wir kurz: $w_x' := w_x$, $w_x'' := w_{xx}$ u.s.w. Es gilt dann mit $w_x = u_x + \varepsilon \varphi_x$, ...:

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta u} &= \frac{\partial E(w(\vec{x}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial E(u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x}))}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_G \frac{\partial J(\vec{x}, \overbrace{u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x})}^{=w}, \overbrace{\nabla(u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x}))}^{=(w_x, w_y, w_z)^T})}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} dV = \\ &= \int_G \left(\frac{\partial J(\vec{x}, \dots)}{\partial \vec{x}} \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varepsilon}}_{=0} + \frac{\partial J(\dots, w, \dots)}{\partial w} \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi} + \frac{\partial J(\dots, w_x)}{\partial w_x} \underbrace{\frac{\partial w_x}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi_x} + \frac{\partial J(\dots, w_y)}{\partial w_y} \underbrace{\frac{\partial w_y}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi_y} + \frac{\partial J(\dots, w_z)}{\partial w_z} \underbrace{\frac{\partial w_z}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi_z} \right) dV \\ &= \int_G \left(\frac{\partial J(\dots, w, \dots)}{\partial w} \varphi + \frac{\partial J(\dots, w_x)}{\partial w_x} \varphi_x + \frac{\partial J(\dots, w_y)}{\partial w_y} \varphi_y + \frac{\partial J(\dots, w_z)}{\partial w_z} \varphi_z \right) dV = 0 \quad \forall \varphi \end{aligned}$$

Wir verwenden nun den Divergenzsatz von Gauss, z.B. für den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} r s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\Rightarrow \int_G \underbrace{\text{div } \vec{v}}_{=r_x s + r s_x} dV = \int_{\partial G} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dO \Rightarrow \int_G \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial J}{\partial w_x} \right) \cdot \varphi + \frac{\partial J}{\partial w_x} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) dV = \int_{\partial G} \frac{\partial J}{\partial w_x} \cdot \underbrace{\varphi}_{\partial G: \varphi=0} dO = 0$$

Damit erhalten wir:
$$\int_G \frac{\partial J}{\partial w_x} \varphi_x dV = - \int_G \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} \right) \varphi dV. \quad \text{Ebenso für } y \text{ und } z.$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\delta E}{\delta u} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_G \left(\frac{\partial J}{\partial w} \cdot \varphi - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} \right) \varphi - \left(\frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} \right) \varphi - \left(\frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} \right) \varphi \right) dV$$

$$\Rightarrow 0 = \int_G \varphi \cdot \left(\frac{\partial J}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} \right) dV \quad \forall \varphi \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} = 0$$

Definition:
$$\frac{\partial J}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} = 0$$

heisst **Euler–Lagrange–Differentialgleichung**.

Bemerkung: Bei der Euler–Lagrange–Differentialgleichung handelt es sich um eine **partielle** Differentialgleichung.

Damit können wir eine notwendige Bedingung für eine Minimalfunktion $w = u$ von $E(w)$ folgern:

Satz: **Vor.:**
$$u = w \text{ minimisiert } E(w) = \int_{G=V} J(\vec{x}, w, \nabla w) dV$$

Beh.:
$$\frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial u_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial u_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial u_z} = 0$$

Damit lässt sich aus einer Minimalitätsforderung für eine Funktion $E(w) = \int_{G=V} J(\vec{x}, w, \nabla w) dV$, welche ein physikalisches System beschreibt, eine partielle Differentialgleichung, die Euler–Lagrange–Differentialgleichung, als mathematisches Modell herleiten. Man hat so das physikalische System **mathematisch modelliert** resp. in die Sprache der Mathematik übersetzt, wo man mit mathematischen Methoden Lösungen gewinnen kann.

Wir wollen uns jetzt einigen Anwendungsbeispielen zuwenden.

8.2.3 Die Herleitung der Potentialgleichung

Wir wissen: $\text{grad}(u) = \nabla u \Rightarrow \langle \text{grad}(u), \text{grad}(u) \rangle = |\text{grad}(u)|^2 = |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. Dabei ist $|\text{grad}(u)|$ die Richtungsableitung von u in der Richtung der grössten Steigung im betrachteten Punkt. Damit wollen wir ein Potential modellieren, indem wir fordern, dass $|\text{grad}(u)|^2$ im Mittel möglichst klein sein soll, d.h. dass das Integral über $|\text{grad}(u)|^2$ pro Volumen möglichst klein werden soll. Bei konstantem Volumen muss damit $\int_G |\nabla u|^2 dV$ minimal werden. Damit können wir wie folgt schliessen:

Sei $\int_G |\nabla u|^2 dV \rightarrow \text{Min}$, $u = g$ auf ∂G . Wir setzen: $J(\vec{x}, u, \nabla u) = |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$.

Hier ist $\frac{\partial J}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial J}{\partial u_x} = 2u_x, \dots$

Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung lautet damit: $0 - 2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$.

u erfüllt also die Potentialgleichung. u ist daher eine Potentialfunktion.

8.2.4 Die Kettenlinie

Eine zwischen zwei horizontal auseinanderliegenden Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ aufgehängte Kette nimmt bekanntlich etwa die Form einer Parabel an. Wir werden aber gleich erfahren, dass es sich bei dieser Form nicht um eine exakte Parabel handelt. Um später eine Handhabe für das Studium der

Abweichungen zur Parabel zu haben, wollen wir die Differentialgleichung der Kettenlinie herleiten. Wir gehen dabei von der physikalisch begründeten Feststellung aus, dass die Kette eine Form annimmt, in der ihre potentielle Energie minimal ist. Sonst müsste sie sich ja bewegen, um den energietiefsten Zustand zu erreichen. Daher muss $\int_{x_1}^{x_2} dE_{pot} = \int_{x_1}^{x_2} dm g y(x)$ minimal sein. Wir können hier also die Variationsrechnung einsetzen.

Es gilt: $m = \rho \cdot V \Rightarrow dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A ds$. Dabei ist A ein angenommener gleichmässiger Querschnitt und ds die infinitesimale Kettenlänge.

Wir wissen, dass gilt: $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \Rightarrow dm = \rho \cdot A \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$.

Damit wird $E_{pot} = \int_{x_1}^{x_2} g \cdot \rho \cdot A \cdot y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = c \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$
mit $J(x, y(x), y'(x)) = c y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}$.

Auf J können wir nun die Euler–Lagrange Differentialgleichung anwenden:

$$\begin{aligned} \leadsto \frac{\partial J}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial J}{\partial y'} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (c y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} (c y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}) \right) = 0 \\ \leadsto 0 &= \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y \cdot 2 y'}{2 \sqrt{1 + (y')^2}} \right) = \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y' y' + y y'') \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y y' \cdot 2 y' y''}{2 \sqrt{1 + (y')^2}}}{(\sqrt{1 + (y')^2})^2} \\ \leadsto 0 &= (1 + (y')^2)^{3/2} - \left(((y')^2 + y y'') \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y (y')^2 y''}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) \\ \leadsto 0 &= (1 + (y')^2)^2 - (((y')^2 + y y'') (1 + (y')^2) - y (y')^2 y'') \\ &= 1 + 2 (y')^2 + (y')^4 - (y')^2 - (y')^4 - y y'' - y y'' (y')^2 + y (y')^2 y'' = 1 + (y')^2 - y y'' \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine **erste Form der Differentialgleichung der Kettenlinie**:

$$\Rightarrow y y'' - (y')^2 = 1$$

Differenzieren nach x ergibt:

$$0 = 2 y' y'' - y' y'' - y y''' = y' y'' - y y''' = \frac{y' y'' - y y'''}{(y'')^2} = \left(\frac{y}{y''} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{y}{y''} = c \Rightarrow y = c y''$$

Da $c = 0$ für die Lösung wegfällt (mit „unendlicher Kraft“ gestreckte Kette), können wir mit $\gamma = \frac{1}{c}$ auch schreiben: $y'' - \gamma y = 0$. Von dieser homogenen Gleichung kennen wir die Basislösungen: $y(x) = c_1 e^{\sqrt{\gamma} x} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma} x}$. Dies führt für negative γ auf Sinus und Cosinus, welche in unserem Fall nicht in Frage kommen. Für positive γ erhalten wir als Basislösungen die Exponentialfunktionen $e^{\sqrt{\gamma} x}$ und $e^{-\sqrt{\gamma} x}$, aus denen wir durch Basiswechsel die neue Basis $\{\cosh(\sqrt{\gamma} x), \sinh(\sqrt{\gamma} x)\}$ gewinnen.

Nehmen wir an, dass die Kette symmetrisch im Koordinatensystem liegt, d.h. ihr Minimum auf der y -Achse annimmt, so muss wegen $y(-x) = y(x)$ der \sinh -Anteil wegfallen. Als Lösung bleibt:

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{\gamma} x)$$

Setzt man diese Lösung in die Gleichung $y y'' - (y')^2 = 1$ ein, so folgt:

$$c_1 \cosh(\sqrt{\gamma} x) c_1 \gamma \cosh(\sqrt{\gamma} x) - (c_1 \sqrt{\gamma} \sinh(\sqrt{\gamma} x))^2 = c_1^2 \gamma \underbrace{(\cosh^2(\sqrt{\gamma} x) - \sinh^2(\sqrt{\gamma} x))}_{=1} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{c_1^2}$$

Wir setzen $c_1 = a \Rightarrow$ im Falle einer symmetrischen Lösung erkennen wir: $y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

a wird durch die Randbedingungen festgelegt. Eine Rechnung ergibt, dass a gerade der Krümmungsradius im Minimum der Kettenlinie ist.

8.2.5 Ein isoperimetrisches Problem und die Lagrange-Funktion

Situation: Gegeben sei die Länge l einer unbekannten Kurve C sowie zwei Punkte $P_1 = P_1(x_1, 0)$ und $P_2 = P_2(x_2, 0)$ auf der x -Achse. C soll von P_1 nach P_2 führen. Selbstverständlich setzen wir dabei voraus, dass $l \geq |x_2 - x_1|$ ist.

Aufgabe: Bestimme C so, dass der Inhalt der zusammen mit der x -Achse **umschlossenen Fläche maximal** wird. Einschränkung: C soll durch eine Funktionskurve einer integrierbaren Funktion $u : x \mapsto y = u(x)$ beschrieben werden können, also rechtseindeutig sein. Der Flächeninhalt soll damit als Integral berechenbar sein $\leadsto A(u) = \int_{x_1}^{x_2} u(x) dx$.

Wenn $P_1 = P_2$ gilt, so vermutet man wahrscheinlich sofort, dass die Kurve ein Kreis sein muss. Denn der Kreis ist diejenige Kurve, bei welcher die Krümmung konstant ist. Und wenn die Fläche möglichst gross sein soll, so muss wohl die Krümmung möglichst überall möglichst klein sein, um möglichst viel zu umschliessen. Denn grosse Krümmung bedeutet wenig umschliessen. Daraus könnte man vermuten, dass die Krümmung überall gleich klein sein muss. Das wollen wir nun mit den Methoden der Variationsrechnung exakt untersuchen.

Sei $A(w) := E(w) = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx$, $J(x, w(x), w_x'(x)) = w(x)$. \leadsto Gesucht ist eine Funktion $u(x)$ mit $E(u) = \text{Min}(E(w))$, $w \in M = \{w(x) \mid w(x_1) = w(x_2) = 0\}$. Dabei gilt noch die **Nebenbedingung** $l = N(w) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(w_x'(x))^2 + 1} dx = \text{const.}$ Mit $E(w)$ und $N(w)$ bilden wir nun die Lagrange-Funktion:

Definition: $L(w, \lambda) := E(w) + \lambda N(w)$ heisst **Lagrange-Funktion** zu E und N .

Da $N(w) = N(u) = \text{const.}$ ist, können wir für $L(w, \lambda)$ unmittelbar die Eigenschaft festhalten:

Satz: Für $N(w) = N(u) = \text{const.}$ ist mit $E(u)$ auch $L(w, \lambda)$ zu gegebenem konstantem λ minimal.

Korollar: Damit erfüllt $L(w, \lambda)$ die Euler-Lagrange-Differentialgleichung.

Folgerung: $L(w, \lambda) = \int_{x_1}^{x_2} (w(x) + \lambda \sqrt{(w_x'(x))^2 + 1}) dx \rightarrow \text{Min} = L(u, \lambda)$.

$$\Rightarrow J(x, u, u_x', \lambda) = u(x) + \lambda \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial u_x} = 0.$$

$$\leadsto \frac{\partial(u(x) + \lambda \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1})}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial(u(x) + \lambda \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1})}{\partial u_x} = 1 - \frac{d}{dx} \lambda \frac{2 u_x'}{2 \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\left(\frac{d}{dx} \frac{u_x'}{\sqrt{(u_x')^2 + 1}}\right)} = \frac{\sqrt{(1 + u'(x)^2)^3}}{u''(x)} = \rho(x) = \text{Krümmungsradius.}$$

Da die Minimalitätsbedingung unter der Voraussetzung eines konstanten λ gilt, finden wir eine Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda} = \frac{u''(x)}{\sqrt{(1 + u'(x)^2)^3}}$. Bekanntlich ist diejenige Kurve, bei der die

Krümmung konstant ist, ein Kreis. Von diesem Kreis wissen wir damit, dass er durch die Punkte $(x_1, 0)$ und $(x_2, 0)$ geht, dass die Kurvenlänge $= l$ ist und dass der Kreismittelpunkt wegen der Krümmung und der Forderung nach einer Funktion nicht auf derselben Seite der x -Achse liegen kann wie die Kurve $u(x)$. $u(x)$ soll ja Funktion und nicht nur Abbildung sein. Aus geometrischen Gründen liegt der Kreismittelpunkt auf der Mittelsenkrechten durch $(x_1, 0)$ und $(x_2, 0)$: $P_m = P_m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_m\right)$.

Damit wird $r = \rho = \sqrt{(x_2 - x_m)^2 + y_m^2}$ und $(u(x) + y_m)^2 + (x - x_m)^2 = r^2$. Daraus kann man eine Gleichung für $u(x) = u(x, y_m)$ herleiten. Aus der Bedingung $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(u_x')^2 + 1} dx$ folgt dann y_m . Die Durchführung der Berechnung von y_m und damit von $u(x)$ sei dem Leser überlassen.

8.2.6 Das Prinzip der kleinsten Wirkungen und erste Variation

Das Prinzip

Definition:

Als **Wirkung** oder **Wirkungsintegral** bezeichnen wir in der Mechanik den Ausdruck

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin}(t) - E_{pot}(t)) dt.$$

(Entsprechend für die Elektrodynamik.)

Pierre-Louis Moreau de Maupertuis und allgemeiner William Rowan Hamilton haben ein Prinzip formuliert, das eine Bewegung eines Körpers oder den Zustand eines Systems bezüglich der Wirkung A beschreibt. Dieses Prinzip ist in der Physik akzeptiert. Wir setzen es daher als physikalisch gegeben voraus.

Das Prinzip der kleinsten Wirkungen: Die Zustandsänderung eines Systems resp. die Bewegung eines Körpers ohne äusseren Eingriff erfolgt in der Mechanik in der Weise, dass das Wirkungsintegral A minimal wird, d. h. dass die erste Variation von $A = A(w)$ gleich 0 wird.

$w = w(t)$ ist dabei eine Ortsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit, ein Potential u.s.w. Es gilt daher der Satz:

Satz:
$$\frac{\delta A}{\delta u} := \left. \frac{\partial A(w(\vec{t}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial A(u(t) + \varepsilon \varphi(t))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{und damit}$$

$$J(t, u, u_t) = E_{kin}(t, u, u_t) - E_{pot}(t, u, u_t) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial u_t} = 0$$

Beispiel 1: Ein Massenpunkt in einem Gravitationsfeld

Es ist $A = \int_{t_1}^{t_2} J(t, u, u_t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin}(t, u, u_t) - E_{pot}(t, u, u_t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (u_t'(t))^2 - m \cdot g \cdot u(t) \right) dt.$

$$\leadsto \frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial u_t} = \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (u_t'(t))^2 - m \cdot g \cdot u(t))}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (u_t'(t))^2 - m \cdot g \cdot u(t))}{\partial u_t} = 0$$

$$\Rightarrow -m \cdot g - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_t'(t) = -m \cdot g - \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_t''(t) = 0 \Rightarrow F = m \cdot g = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot u_t''(t).$$

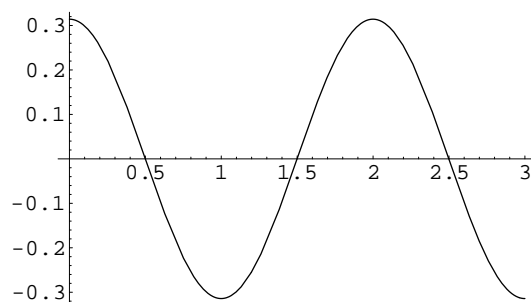
Wir erhalten somit das bekannte Bewegungsgesetz (Fallgesetz) einer Masse m im Gravitationsfeld mit der Feldstärke g .

Beispiel 2: Das mathematische Pendel im Gravitationsfeld

Wir betrachten das mathematische Pendel mit einer Masse m an einem Faden mit der Pendellänge l und dem Auslenkungswinkel φ im Gravitationsfeld mit der Feldstärke g . Es wird somit $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2$ und $E_{pot} = m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi))$.

$$\begin{aligned} \text{Damit erhalten wir } J(t, \varphi, \varphi_t) &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2 - m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi)) \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \varphi_t} = ? \\ \frac{\partial J}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \varphi_t} &= \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2 - m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi)))}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2 - m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi)))}{\partial \varphi_t} \\ &= -m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\varphi) - m \cdot r^2 \cdot \varphi_{tt}'' \Rightarrow \varphi_{tt}'' + \frac{g}{r} \cdot \sin(\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Interessanterweise hat hier die Masse keinen Einfluss auf die Auslenkung, denn sie fällt aus der Gleichung heraus. Wir lösen das Problem für $g = 10$, $r = 1$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{8}$ und $\varphi'(0) = 0$. Die Lösung suchen wir am einfachsten numerisch im Bereich $t \in [0, 3]$. Damit erhalten wir eine Vorstellung von der Lösung. (Dabei benutzen wir *Mathematica*).



Output

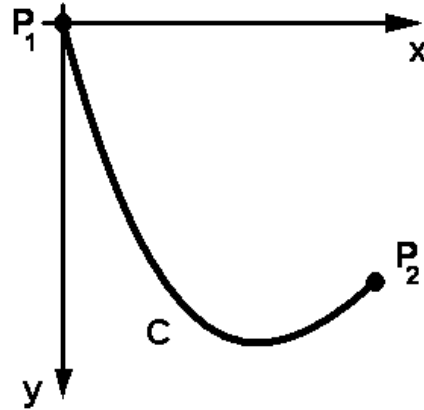
Input:

```
a=b;
solv=NDSolve[{f'[t]+ 10 Sin[f[t]]==0, f[0]==Pi/10, f'[0]==0},f[t],{t,b}];
Plot[f[t]/.solv,{t,0,b}];
```

8.2.7 Bernoullis Brachystochronen-Problem

In nebenstehender Skizze ist eine Kurve C von $P_1 = P_1(0, 0) = P_1(x_1, y_2)$ nach $P_2 = P_2(x_2, y_2)$ gezeigt, wobei der einfache Fall $x_1 = x_2$ hier nicht studiert werden soll. Die Kurve kann daher als Funktionskurve $y(x)$ verstanden werden. Der einfacheren Rechnung wegen ist die y -Achse nach unten gerichtet. P_2 soll weiter unten liegen als P_1 . Setzt man nun in P_1 eine kleine Kugel hin und lässt man diese Kugel rollen oder ohne namhaften Widerstand gleiten, so gelangt sie nach P_2 .

Frage: Für welche Kurve braucht die Kugel die kürzeste Zeit um nach P_2 zu gelangen?



Zur Vereinfachung wollen wir die Rotationsenergie oder die in die Reibung geleitete Energie nicht beachten.

Problem: Es gilt somit eine Kurve C in der Form $y = y(x)$ zu finden, für welche die gesamte Durchlaufzeit $T(x_2, y_2)$ minimal ist. t sei dabei die laufende Zeit.

Zur Lösung wollen wir die Euler-Lagrange-Differentialgleichung nutzen und zu diesem Zweck ein Minimumproblem formulieren.

Wir beginnen mit der Energiebilanz $E_{pot} + E_{kin} = E_{total} = E_{initial} = 0$. Denn zu Beginn ist die Energie in $P_1 = P_1(0, 0)$ gleich 0.

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = -E_{pot} = -m g (-y) \Rightarrow v = \sqrt{2 g y}$$

$$\text{mit } x = x(t), \quad y = y(t), \quad v = v(t) = \sqrt{(x_t'(t))^2 + y_t'(t))^2}.$$

$$\text{Nun gilt: } v \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}}}{\Delta t} \cdot \Delta x$$

$$\leadsto v = \sqrt{2 g y} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{dt} \cdot dx \Rightarrow \text{Separation: } dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2 g y}} dx = \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2 g y}} dx$$

$$T(t_1) = \int_0^{t_1} dt = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2 g y}} dx \rightarrow \text{Min} \Rightarrow J(x, y, y_x') = \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2 g y}}$$

Damit können wir auf $J(x, y, y_x')$ die Euler-Lagrange-Differentialgleichung anwenden: $\frac{\partial J}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} = 0$.

Wenn wir die Gleichung $\frac{\partial J}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} = 0$ mit y_x multiplizieren, so bringt uns das weiter. Dabei beachten wir, dass J nicht explizit von x abhängig ist, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial J}{\partial x}$ also 0 ist.

$$\leadsto 0 = \frac{\partial J}{\partial y} \cdot y_x - y_x \cdot \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} = \frac{\partial J}{\partial y} \cdot y_x + \left[\frac{\partial J}{\partial y_x} \cdot y_{xx} \right] - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} \right) \cdot y_x - \left[\frac{\partial J}{\partial y_x} \cdot y_{xx} \right] = \frac{d}{dx} (J - J_{y_x} \cdot y_x).$$

Damit ist die totale Ableitung $\frac{d}{dx} (J - J_{y_x} \cdot y_x) = 0$, also der Ausdruck $J - J_{y_x} \cdot y_x = \text{const.}$

$$\leadsto J - J_{y_x} \cdot y_x = \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{2y_x \cdot y_x}{2\sqrt{1 + (y_x')^2} \sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \cdot \frac{1 + (y_x')^2 - (y_x')^2}{\sqrt{1 + (y_x')^2}} = \text{const.}$$

$$\leadsto c_1 = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (y_x')^2}} \Rightarrow y = \frac{c_2}{1 + (y_x')^2} \quad \text{oder} \quad y_x' = \pm \sqrt{\frac{c_2}{y} - 1}$$

Mit $c_2 = 2r$ finden wir:

$$(y_x')^2 = \frac{c_2 - y}{y} := \frac{2r - y}{y}$$

Diese Gleichung kennt man als die **Zykloidengleichung** $(y_x')^2 = \frac{2r - y}{y}$.

Mit Hilfe von $y_t' = y_x' \cdot x_t'$ kann man nun verifizieren, dass die folgende parametrisierte Kurve (Zykloide) das Problem löst resp. $(y_x')^2 = \frac{2r - y}{y}$ erfüllt:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t - \sin(t)) \\ y(t) &= r(1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

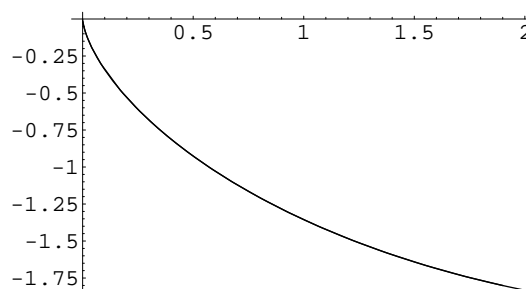
Wir testen das Gefundene anhand eines Beispiels mit *Mathematica*. Dazu wählen wir $r = 1$ und erzeugen die Kurven einerseits numerisch als Lösungskurve der Differentialgleichung und andererseits als Plot der parametrisierten Zykloide:

Input:

```
r=1;
x[t_]:=r (t-Sin[t]);
y[t_]:=-r (1-Cos[t]);
p1=ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2.5},
DisplayFunction->Identity];
sol=NDSolve[{y1'[x1]==Sqrt[2r/y1[x1]-1], y1[0]== 0.0001}, y1[x1],{x1,2}]
p2=Plot[-y1[x1]/.sol,{x1,0.001,2},
DisplayFunction->Identity];
Show[p1,p2,
DisplayFunction-> $DisplayFunction];
```

Output:

Die beiden Kurven liegen ununterscheidbar übereinander!



8.2.8 Variation und finite Elemente: Triangulationsmethode

Die Idee der Umkehrung der Methode mittels Euler–Lagrange

Problem: Gegeben ist für ein einfach zusammenhängendes Gebiet G das Randwertproblem:

$$a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u = d, \quad (x, y) \in G, \quad \text{RBD: } u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial G$$

Hier handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Potentialgleichung. Für $a = b = 1$ und $c = 0$ erhalten wir $\Delta u = d$.

Die Gleichung $a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u - d = 0$ können wir als Euler–Lagrange–Gleichung interpretieren:

$$\begin{aligned} a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u - d &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \frac{a \cdot u_x^2}{2} + \frac{\partial}{\partial u_y} \frac{b \cdot u_y^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} c \cdot u^2 - d \cdot u \right) = 0 \\ \leadsto \frac{\partial}{\partial u} \left(d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \frac{a u_x^2}{2} + \frac{\partial}{\partial u_y} \frac{b u_y^2}{2} \right) &= 0 \leadsto \text{setze } J(x, u, \nabla u) = d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 + \frac{a u_x^2}{2} + \frac{b u_y^2}{2} \end{aligned}$$

Konsequenz:

Eine Lösung von

$$E(u) = \int_G J(x, u, \nabla u) \, dx \, dy \rightarrow \text{Min}$$

mit $J(x, u, \nabla u) = d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 + \frac{a u_x^2}{2} + \frac{b u_y^2}{2}$, $u(x, y) = g(x, y)$ in ∂G , ist auch Lösung des Problems $a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u = d$ in G , $u(x, y) = g(x, y)$ auf ∂G .

Konzept: Statt eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung zu suchen, kann man daher auch versuchen u derart zu konstruieren, dass damit $E(u)$ minimiert wird, wobei die Randbedingungen erfüllt sein müssen. (In der Fachsprache sagt man an Stelle von *minimal* auch, dass u **stationär** wird.)

Dieses Konzept wollen wir nun in eine Methode umgießen:

Die Idee zur Methode nach Ritz

Wir wähle eine linear unabhängige Menge von „**Basisfunktionen**“ wie folgt:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= g(x, y), \quad (x, y) \in \partial G \\ u_k(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \partial G, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Damit machen wir den **Ansatz**:

$$u(x, y) \approx u_A(x, y) := u_0(x, y) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y), \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Die c_k , $k = 1, \dots, n$ müssen dabei so gewählt werden, dass $u_A(x, y) := u_{c_1, \dots, c_n}(x, y)$ das Funktional $E(w)$ über der Menge der Funktionen $u_0(x, y) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y)$ minimiert.

$u_A(x, y)$ erfüllt wegen den Randwerten $u_0(x, y) = g(x, y)$ und $u_k(x, y) = 0$ auch die Randbedingungen, ist

also ein Kandidat für die gesuchte Funktion. Für ein auffindbares absolutes Minimum haben wir dann die beste Approximation über der gegebenen Funktionenmenge M gefunden. Daher gilt für das Minimum:

$$E(u) \approx E(u_A) = E\left(u_0(x, y) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y)\right) := E(c_1, \dots, c_n) = \text{Min}(M)$$

Als notwendige Bedingung für das gesuchte Minimum können wir daher wie üblich setzen:

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Sei nun $u = u_A$. Wegen $E(u) = \int_G J(x, u, \nabla u) dx dy = \int_G d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 + \frac{a u_x^2}{2} + \frac{b u_y^2}{2} dx dy$ finden wir in $J(x, u, \nabla u)$ die c_k in den Termen u , u^2 , u_x^2 und u_y^2 . Da die c_k in u linear eingehen, kommen sie danach in den genannten Termen quadratisch oder linear vor. $E(u)$ ist also eine quadratische Funktion von den c_k , $k = 1, \dots, n$. Somit erscheinen diese c_k in $\frac{\partial E}{\partial c_k}$ höchstens linear.

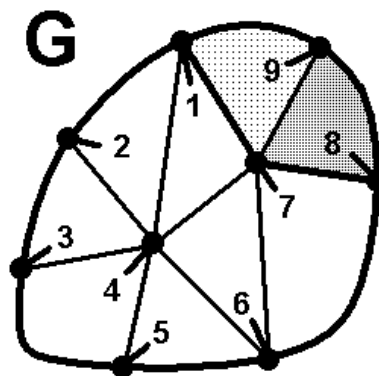
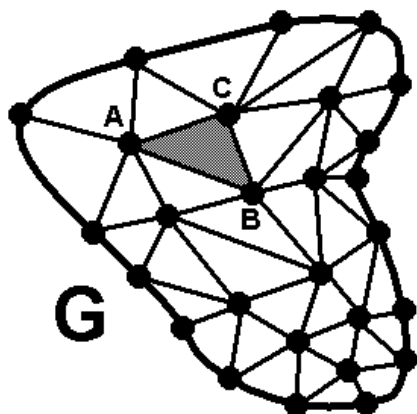
Konsequenz:

Das System $\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0$, $k = 1, \dots, n$ ist ein lineares Gleichungssystem in den c_k . Wir haben hier n Gleichungen und n Unbekannte. In der Regel können wir ein solches Gleichungssystem mit Hilfe einer entsprechend grossen Matrix schreiben.

Nun ist noch die Frage zu klären, wie eine etwaige Basis $\{u_k \mid k = 0, \dots, n\}$ konstruiert werden soll und ob die zu erwartende grosse Matrix sich allenfalls als Bandmatrix schreiben lässt, was wegen der damit verbundenen vereinfachten Berechnungsmöglichkeiten ja wünschenswert wäre.

Triangulationsmethode, Basiswahl, Komposition der Funktion

Eine mögliche Wahl einer Basis stützen wir auf eine **Triangulation** von G . Unter Triangulation verstehen wir dabei eine Einteilung des Gebiets G in n Dreiecke, wobei jene „Dreiecke“, welche an den Rand stossen, auch eine „krumme Kante“ haben dürfen (siehe Bilder unten). Wir sind dann natürlich bestrebt die Einteilung so fein zu machen, dass diese Ungereimtheit zu keinem grossen Fehler führt.



Wir betrachten im linken Bild das Dreieck $\triangle ABC := \triangle A_k B_k C_k$. In diesem Dreieck definieren wir $u_k(x, y)$ wie folgt:

$$u_{k,\alpha,\beta,\gamma}(x,y) = \begin{cases} \alpha_k x + \beta_k y + \gamma_k & (x,y) \in \triangle ABC \\ 0 & (x,y) \notin \triangle ABC \end{cases}$$

Dabei wählen wir zu jedem k die Koeffizienten $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ auf drei Arten, so dass gilt:

$$\begin{aligned} (A) \quad & u_{k,\alpha,\beta,\gamma} = u_{k,A} : u_{k,A}(B_k) = u_{k,A}(C_k) = 0, \quad u_{k,A}(A_k) = 1, \\ (B) \quad & u_{k,\alpha,\beta,\gamma} = u_{k,B} : u_{k,B}(C_k) = u_{k,B}(A_k) = 0, \quad u_{k,B}(B_k) = 1, \\ (C) \quad & u_{k,\alpha,\beta,\gamma} = u_{k,C} : u_{k,C}(A_k) = u_{k,C}(B_k) = 0, \quad u_{k,C}(C_k) = 1. \end{aligned}$$

Mit $u_{k,A}$, $u_{k,B}$ und $u_{k,C}$ können wir jetzt eine neue Funktion u_k konstruieren, welche in den Eckpunkten A_k, B_k, C_k einsetzbare Werte zulässt. Wir setzen:

$$u_k(x,y) := c_{k,A} \cdot u_{k,A} + c_{k,B} \cdot u_{k,B} + c_{k,C} \cdot u_{k,C}$$

Diese Funktion u_k nimmt ausserhalb des Dreiecks \triangle_k immer den Wert 0 an und innerhalb des Dreiecks sowie auf dem Rande erhalten wir aufgrund der Linearkombination von drei Ebenengleichungen wieder eine Ebenengleichung, welche in den Eckpunkten die eingegebenen Werte $c_{k,A}, c_{k,B}, c_{k,C}$ annimmt. Mit solchen Funktionen können wir G überziehen und so eine Funktion $u = \sum_{k=1}^n u_k(x,y)$ definieren, welche an den Dreiecksrändern nahtlos zusammengeschweisst, also stetig und daher integrierbar ist, und für welche in den Eckpunkten die Funktionswerte als Parameter definierbar sind. Unerfasst bleibt hier einzig noch die ungenaue Approximation des Randes, was aber bei vernünftigen Rändern und vernünftigen Randfunktionen $g(x,y)$ kein Problem für unser Integral $E(u)$ mit sich bringt.

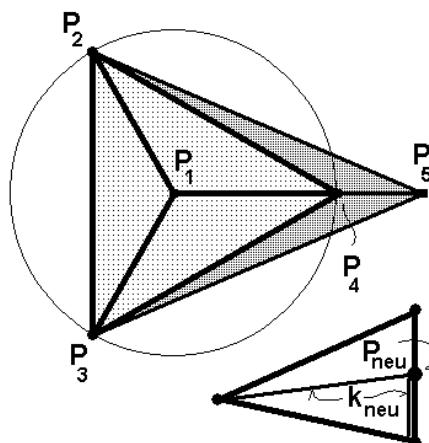
Ein Organisationsproblem entsteht noch infolge möglicher „wilder Triangulationen“. In jedem Dreieck \triangle_k gilt es einen Punkt A_k , einen Punkt B_k und einen Punkt C_k zu bezeichnen. Doch wie soll man dabei vorgehen? Wir wollen darüber kurz nachdenken und erinnern uns zu diesem Zweck an den eulerschen Polyedersatz.

Nach diesem Satz gilt bei einem räumlichen Polyeder die Beziehung $e + f - k = 2$. (e = Eckenzahl, f = Flächenzahl, k = Kantenzahl). Schneidet man ein Polyeder längs einer Kante auf und dehnt es dann in die Ebene aus, so gilt dort wegen dem Duplizieren der Kante beim Aufschneiden: $e + f - (k+1) = 2 - 1 \Rightarrow e + f - k = 1$. Bei einem regelmässigen n -Eck als Beispiel finden wir aussen n Ecken und bei einer regulären Triangulation noch eine Ecke im Zentrum. Man hat daher $n+1$ Ecken, $2n$ Kanten und n Flächen. $(n+1) + n - (2n) = 1$ ist erfüllt. Aber einen eindeutigen unwillkürlichen Bezug zwischen Ecken und Flächen zwecks einfacher Abzählbarkeit lässt sich hier wegen $e \neq f$ nicht stiften.

Hinweis: Wir verwenden hier die Sprache der Graphentheorie. *Ecke* bedeutet ein zu beachtender Zusammenstosspunkt von Kanten, auch Knoten genannt. In einer Ecke stossen bei unserer Triangulation immer mindestens drei Kanten zusammen. (Vgl. Kapitel „Graphentheorie“ im Skript „Diskrete und angewandte Mathematik“ des Autors, zu finden auf <http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html>, aufgeführt in der Liste unter dem zitierten Link als „Themen aus der diskreten Mathematik“.)

Wählen wir nun eine Triangulation, welche gleich viele Flächen wie Ecken aufweist, so gilt: $2e = k + 1$. Wir wollen eine solche Triangulation hier eine **EGF-Triangulation** nennen. (EGF-Triangulation ist die Abkürzung für „Ecken gleich Flächen-Triangulation“.) Die Kantenzahl muss daher bei einer solchen EGF-Triangulation immer ungerade sein. Solche Triangulationen sind möglich. Im erwähnten rechten Bild oben gilt $k = 17$, $e = f = 9$. Löscht man aber z.B. beim Dreieck mit der Nummer 9 die Aussenkante weg, so bleiben 16 Kanten, 8 Flächen und 9 Ecken. Die notwendige Zuordnungsart der Flächen zu den Ecken ist dann also nicht mehr möglich, da $8 \neq 9$ ist.

Wir wollen nun zeigen, dass der natürlich triangulierte Graph eines regulären n -Ecks mit zentralem Punkt immer zu einer EGF-Triangulation erweitert werden kann. Nebenstehend ist als einfachstes Beispiel ein reguläres Dreieck mit zentralem Punkt gezeigt. Hier ist $e = 4$, $f = 3$ und $k = 6$. Allgemein ist bei einem solchen n -Eck $e = n + 1$, $f = n$ und $k = 2n$, also $e + f - k = n + 1 + n - 2n = 1$. Fügt man nun aussen einen weiteren Punkt P_{n+2} an (in der Skizze P_5), so wird $e = n + 2$. Verbindet man diesen Punkt P_{n+2} mittels drei neuen Kanten mit drei aufeinanderfolgenden Nachbarnpunkten wie in der Skizze gezeigt, so entstehen zwei neue Flächen. Dann gilt:



$$e + f - k = (n + 2) + (n + 2) - (2n + 3) = 2n - 2n + 4 - 3 = 1 \Rightarrow e_{\text{neu}} = f_{\text{neu}}$$

Damit können wir hier einen neuen Satz formulieren:

Satz: Die natürliche Triangulation eines regulären und damit auch eines beliebigen konvexen n -Ecks lässt sich durch anfügen eines einzigen äusseren Punktes in eine EGF-Triangulation verwandeln. Es existieren somit unendlich viele EGF-Triangulationen.

Weiter kann man in einem bestehenden Dreieck immer eine neue Ecke in eine bestehende gewählte Kante setzen und dann diese neue Ecke mit der im Dreieck gegenüberliegenden Ecke verbinden. (Siehe Skizze oben, Teilfigur rechts.) Dadurch entsteht ein neuer Graph mit einer Ecke mehr, zwei Kanten mehr und auch einer Fläche mehr. Man hat dann $e + f - k = (e + 1) + (f + 1) - (k + 2) = 1$. Das ergibt einen weiteren Satz:

Satz: Eine EGF-Triangulation kann durch einsetzen einer Ecke in eine bestehende Kante in einem Dreieck und durch verbinden dieser neuen Ecke mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks in eine neue EGF-Triangulation verwandelt werden, welche eine Fläche mehr besitzt.

Damit kann man jetzt beliebig EGF-Triangulationen erzeugen.

Bei einer EGF-Triangulation kann man die Flächen und die darauf bezogenen Ecken von 1 bis n durchnummerieren. Zum Dreieck \triangle_k gehört so die Ecke P_k , welche wir bezüglich diesem Dreieck A_k nennen. B_k und C_k kann man nun bezüglich \triangle_k durch Abzählung nach rechtsdrehendem Umlauf ebenfalls eindeutig definieren. Da eine Ecke immer zu mehreren Dreiecken gehört, bekommt sie so bezüglich jedem anstossenden Dreieck eine andere Nummer. A_9 kann daher in einem bestimmten Fall z.B. durchaus gleich B_4 sein u.s.w.

Schliesslich bekommen wir bei diesem Verfahren eine Funktion $u_{\text{innen}}(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y)$, welche in den innern Punkten die Parameterwerte c_k aufweist und auf dem Rande die Werte 0. Diese Funktion überlagern wir mit einer analog konstruierten Funktion $u_0(x, y)$, welche in den Randpunkten die gegebenen Randwerte und in den innern Punkten immer den Wert 0 aufweist. $u(x, y) = u_0(x, y) + u_{\text{innen}}(x, y)$ enthält damit n Parameter c_1, \dots, c_n , welche durch die numerische

Auswertung von $E(u) = \int_G J(x, u, \nabla u) dx dy$ in ein quadratisches Polynom mit n Variablen c_k einfließen. Wir erhalten also die Zuordnung $E(u_A) \rightarrow p_2(c_1, \dots, c_n)$. Daraus bestimmen wir die c_k als Lösung des linearen Gleichungssystems $\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n$.

Beim Lösen des erwähnten Gleichungssystems muss wie erwähnt darauf geachtet werden, dass man die Vorteile von Bandmatrizen ausnutzen kann.

Weitere Methoden

Solange keine praktische Erfahrung mit der Sache der finiten Elemente vorliegt, macht es wenig Sinn, auf das anschnittsweise vorgestellte und in diesem Sinne besprochene Verfahren weitere Theorie aufzubauen. An dieser Stelle soll nur noch auf weitere Themenkreise oder Methoden hingewiesen werden:

1. Die Methode des gewichteten Fehlers (Orthogonalisierungsmethode nach Galerkin).
2. Die Kollokationsmethode resp. Methode der kleinsten Quadrate.

8.2.9 Weitere Probleme

Weitere interessante Probleme, welche sich mit Hilfe der Variationsrechnung gut modellieren lassen:

1. Weitere praktisch nützliche Kurvengleichungen
2. Das Doppelpendel
3. Der elektrische Schwingkreis (siehe auch Seite 80)
4. Das Brechungsgesetz (Snellius)
5. Wellenphänomene

Des beschränkten Rahmens wegen verzichten wir hier auf weitere Ausführungen zu diesen Problemen wie auch allgemein auf weitere Ausführungen zur Variationsrechnung. Man konsultiere dazu die einschlägige Literatur oder versuche selbst, eine Lösung zu finden.

Eine Herleitung mit Animation zum Doppelpendel findet man unter

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>

Mit Hilfe der Variationsrechnung gelingt jetzt auch der Einstieg in die heute in der Anwendung sehr weit verbreitete Theorie der **finiten Elemente**, angewandt auf partielle Differentialgleichungen.

Eine ausführliche Darstellung der heute üblichen Verfahren übersteigt jedoch den hier möglichen Rahmen. Der Leser ist gebeten, in dieser Sache wiederum die einschlägige Fachliteratur zu konsultieren.

8.3 Schwingungen und partielle Differentialgleichungen

8.3.1 Die homogene Wellengleichung, Voraussetzungen

Die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2})(u) = v(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$$

trägt in der Physik den Namen **Wellengleichung**, da ihre Lösungen zur Modellierung der Ausbreitung von Wellen in diversen Gebieten benutzt werden können (Mechanik, Akustik, Elektrodynamik, moderne Physik u.s.w.). Wir wollen diesen Namen hier ebenfalls benutzen. Die Funktion $u = u(x_1, x_2, \dots, x_N, t) := u = u(\vec{x}, t)$ nennen wir für unsere Bedürfnisse kurz **Auslenkung** oder **Amplitude**.

Speziell betrachten wir die **homogene Wellengleichung** auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ oder } \Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(u) = \square u = 0$$

Definition:

$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ heisst **d'Alembert-Operator** (auch **Quablaoperator** oder **Viereckoperator**).

Voraussetzung:

Das betrachtete Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^N$ soll hier einfach zusammenhängend und beschränkt sein. Wegen den Fraktalen setzen wir noch fest: $\dim(\partial G) = N - 1$. Zur Beschreibung der notwendigen Randbedingungen gehen wir, sofern nicht anders vermerkt, von einer vernünftigen (nicht fraktalen) Zerlegung des Randes in zwei disjunkte Teilmengen aus: $\partial G = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \{\}$. M_1 und M_2 seien dabei stückweise zusammenhängend und glatt. Weiter sei $c \neq 0$.

Auf M_1 gelte die homogene **Dirichlet'sche** Randbedingung: $u(x_1, \dots, x_N, t) = 0$, $(x_1, \dots, x_N) \in \partial G$.

Auf M_2 gelte die **von Neumann'sche** Randbedingung: $\frac{\partial u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \vec{n}} = 0$, $(x_1, \dots, x_N) \in \partial G$.

Randbedingungen lassen sich damit **mischen**: $\alpha u(x_1, \dots, x_N, t) + \beta \frac{\partial u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \vec{n}} = 0$ mit $u(x_1, \dots, x_N, t) = 0$ auf M_1 und $\frac{\partial u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \vec{n}} = 0$ auf M_2 .

Daneben muss man natürlich für die Variable t noch Anfangsbedingungen stellen.

8.3.2 Separationsansatz und stehende Welle

Ziel: Wir wollen Lösungen der homogenen Wellengleichung suchen, welche stehende Wellen oder Schwingungen von Punkten aus Kurven, Flächen oder Volumen darstellen. Diese Schwingungen sollen bei praktischen Beispielen verwendet werden können.

Methode: Zur Erreichung des Ziels machen wir den Separationsansatz $u(\vec{x}, t) := U(\vec{x}) \cdot T(t)$. Die so angesetzte Funktion setzen wir in der homogenen Wellengleichung $c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ein, wodurch wir eine Separation erreichen können:

$$\begin{aligned}
c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 (U(\vec{x}) \cdot T(t))}{\partial x_i^2} &= T(t) \cdot c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} = T(t) \cdot \Delta U(\vec{x}) = \frac{\partial^2 (U(\vec{x}) \cdot T(t))}{\partial t^2} = U(\vec{x}) \cdot \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = U \cdot T'' \\
&\Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \cdot \frac{\Delta U(\vec{x})}{U(\vec{x})} = \text{const.} := \pm \omega^2
\end{aligned}$$

$\frac{T''(t)}{T(t)}$ ist hier nur noch von t abhängig und $c^2 \cdot \frac{\Delta U(\vec{x})}{U(\vec{x})}$ nur noch von \vec{x} . Damit ergeben sich zwei getrennt behandelbare Gleichungen:

$$T''(t) = \pm T(t) \cdot \omega^2 \quad \text{und} \quad c^2 \cdot \Delta U(\vec{x}) = \pm U(\vec{x}) \cdot \omega^2$$

1. Wir behandeln zuerst $T''(t) - T(t) \cdot \omega^2 = 0$. Hier kennen wir die Basislösungen $e^{\pm \omega t}$ resp. $\sinh(\omega t)$, $\cosh(\omega t)$. $\leadsto (e^{\pm \omega t})'' = \omega^2 e^{\pm \omega t} \Rightarrow (e^{\pm \omega t})'' - \omega^2 e^{\pm \omega t} = 0$. Problem: Die reelle Exponentialfunktion liefert uns zwar eine Lösung, jedoch keine Schwingung. Wir erhalten bloss eine monotone Funktion, die entweder mit der Zeit t über alle Massen wächst oder sich gedämpft asymptotisch der t -Achse annähert. Diese Lösung dürfen wir daher für den Zweck der Beschreibung von Schwingungen **verwerfen**.

2. $T''(t) + T(t) \cdot \omega^2 = 0$. Hier kennen wir die Basislösungen ebenfalls: $e^{\pm i \omega t}$ resp. $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$.

Wir machen den Ansatz: $T(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = \tilde{A} e^{i \omega t} + \tilde{B} e^{-i \omega t}$.
 $\Rightarrow T(t)'' = -\omega^2 A \sin(\omega t) - \omega^2 B \cos(\omega t) = -\omega^2 T(t) \Rightarrow T(t)'' = -\omega^2 T(t)$.

Hier erhalten wir mit \sin und \cos eine Schwingung. Damit ergibt sich:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 = c^2 \cdot \frac{\Delta U(\vec{x})}{U(\vec{x})} \Rightarrow c^2 \Delta U + \omega^2 U = 0 \Rightarrow \Delta U + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0$$

Die partielle Differentialgleichung für $U(\vec{x})$ trägt in der Physik oder der Elektrotechnik auch den Namen **Helmholtz-Gleichung**.

Wir setzen: $\frac{\omega^2}{c^2} = \lambda > 0 \leadsto \omega = c \cdot \sqrt{\lambda}$. (ein eventuelles Vorzeichen ist in c enthalten.)

Damit können wir zusammenfassen:

Resultat:

Die gefundenen Lösungen der Wellengleichung $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(u) = 0$, welche auf „Schwingungen“ führen, sind durch Funktionen der Form $u(\vec{x}, t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot T(t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$ gegeben.

Da $u(\vec{x}, t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot T(t)$ durch $T(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ zeitlich gestreckt wird, haben wir eine **stehende Welle** vor uns. $U_\lambda(\vec{x})$ ist dabei Lösung der **Helmholtz-Gleichung** $\Delta U_\lambda + \lambda U_\lambda = 0$.

Die Lösungen von $U_\lambda(\vec{x}) = 0$ heissen **Knoten**, **Knotenlinien**, **Knotenflächen** u.s.w.

8.3.3 Schwingung eines dünnen Balkens

Wir betrachten einen beidseitig eingespannten **dünnen Balken**, den wir vereinfacht als eine **Saite** verstehen können. Dabei soll die Form des Querschnitts vernachlässigbar sein. Damit haben wir räumlich ein 1-dimensionales Problem vor uns. In der Physik wird dafür folgendes Modell erarbeitet:

$$u_{tt} = c \cdot u_{xx} = c \Delta(u), \quad u(0, t) = u(x_L, t) = 0 \quad (\partial G), \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, x_L]$$

Dabei schreiben wir kurz: $u_{tt}'' := u_{tt}$, $u_{xx}'' := u_{xx}$. f und g sind gegebene Funktionen.

Weiter ist $c^2 = \frac{\sigma}{\rho}$. σ bedeutet die Spannung, ρ die Längendichte (Masse pro Länge).

Wir wissen: $u(\vec{x}, t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot T(t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot (A \sin(\omega(t)) + B \cos(\omega(t)))$, $(U_\lambda)_{xx} + \lambda \cdot U_\lambda = 0$.

Hier gilt es nun, die Helmholtz-Gleichung $(U_\lambda)_{xx} + \lambda \cdot U_\lambda = 0$ unter Berücksichtigung der homogenen Randbedingungen zu lösen, wobei wir die dazu möglichen Basisfunktionen wiederum kennen. Wegen den homogenen Randbedingungen kommen wiederum keine Exponentialfunktionen resp. der Sinus- und Cosinus hyperbolicus-Funktionen in Betracht, wie man sich sofort durch Nachrechnung überzeugt. Damit bleibt als Kandidatenmenge die parametrisierte Linearkombination:

$$U_\lambda(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda} x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda} x), \quad \lambda > 0$$

Die Randbedingungen ergeben:

$$0 = U_\lambda(0) = \alpha \Rightarrow \alpha = 0, \quad U_\lambda(x_L) = \beta \sin(\sqrt{\lambda} x_L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \cdot x_L = k \cdot \pi \neq 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}.$$

(k kann keine negativen Werte tragen, denn es gilt $\sqrt{\lambda}, x_L, \pi > 0$.)

Mit der Helmholtz-Gleichung ist ein **Eigenwertproblem** gegeben. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen sind somit:

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{x_L^2}, \quad U_k(x) = \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

Mit $\omega = c \cdot \sqrt{\lambda} = c \cdot \frac{k \pi}{x_L}$ erhalten wir als Basisfunktionen der Schwingungsgleichung des dünnen Balkens:

$$u_k(x, t) = U_k(x) \cdot T_k(t) = \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right) + B \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right)\right)$$

Für $k = 1$ ergibt sich so die **Grundschiwingung**, für $k = 2$ die **1. Oberschiwingung** u.s.w.

Da die Helmholtz-Gleichung $u_{tt} = c u_{xx}$ eine homogene Gleichung ist, können wir auf die obigen Basisfunktionen das Superpositionsprinzip anwenden um die Anfangsbedingungen zu erfüllen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A_k \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right) + B_k \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right)\right) \\ \Rightarrow f(x) = u(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \underbrace{\left(A_k \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right) + B_k \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right)\right)}_{=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \cdot B_k \\ g(x) = u_t(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A_k \underbrace{\frac{c \cdot k \pi}{x_L} \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right)}_{=1} + B_k \underbrace{\left(-\frac{c \cdot k \pi}{x_L}\right) \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right)}_{=0}\right) \end{aligned}$$

Damit haben wir:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} \cdot x\right), \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{c \cdot k\pi}{x_L} \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} \cdot x\right)$$

Jetzt sind die Funktionen f und g als Fourierreihen erkannt. Speziell in diesem Beispiel sind es Sinusreihen. A_k und B_k können daher mit Hilfe der Fourierkoeffizienten berechnet werden:

$$A_k = \frac{2}{c k \pi} \int_0^{x_L} g(x) \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} x\right) dx, \quad B_k = \frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} x\right) dx$$

Diese Fourierkoeffizienten kann man bei geeigneten gegebenen Funktionen f und g damit bis zu einem gewissen $k = m$ berechnen und damit die gesuchte Lösung approximieren:

$$u_{approx}(x, t) = \sum_{k=1}^m \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A_k \sin\left(\frac{c \cdot k\pi}{x_L} t\right) + B_k \cos\left(\frac{c \cdot k\pi}{x_L} t\right) \right)$$

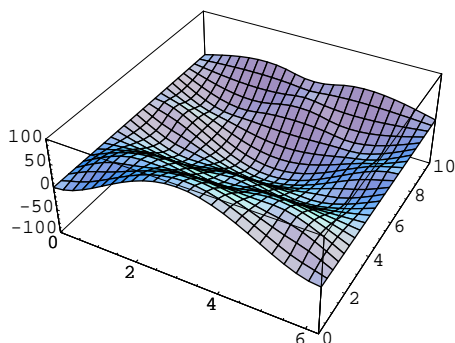
Beispiel

Seien $c = 1$, $x_L = 2\pi$, $f(x) = x^2(x - 2\pi)^2$, $g(x) = -\frac{x^7}{645120} + \frac{x^5}{3840} - \frac{x^3}{48} + \frac{x}{2}$, $m = 17$

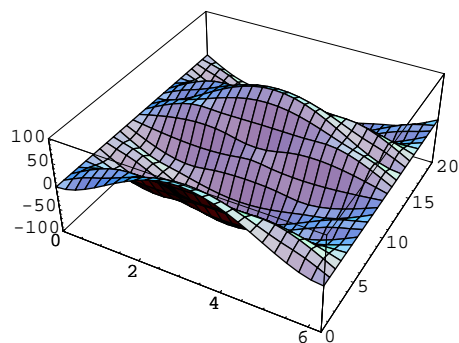
Input: (Mathematica)

```
Remove["Global`*"];
c=1; xL=2 Pi; f[x_]:= x^2 (x-2 Pi)^2;
g[x_]:=x/2 - x^3/48 + x^5/3840 - x^7/645120; m=17;
A[k_]:= 2/(c k Pi) Integrate[g[x] Sin[k Pi x/xL],{x,0,xL}]/N//Chop;
B[k_]:= 2/xL Integrate[f[x] Sin[k Pi x/xL],{x,0,xL}]/N//Chop;
tab1 = Table[{A[k]//Chop,B[k]//Chop},{k,1,m}];
AA[k_]:=tab1[[k]][[1]]; BB[k_]:=tab1[[k]][[2]];
uApprox[x_,t_,m_]:= Sum[Sin[k Pi x/xL] (AA[k] Sin[c k Pi t/xL]
+BB[k] Cos[c k Pi t/xL]),{k,1,m}];
Plot3D[uApprox[x,t,m],{x,0,xL},{t,0,20}]
```

Output:



Plot für $t = 10$



Plot für $t = 20$

Die weitere praktische Durchführung dieses Unterfangens soll in den Übungen erledigt werden.

8.3.4 Die schwingende dünne Platte

Eine dünne Platte soll hier als vereinfachtes Modell einer Bodenplatte, einer Decke, einer Wand oder einer in der Technik genutzten Membran dienen. Man denke etwa an die Membran einer Trommel. Aus dem Grunde der in der Technik bei Bodenplatten am häufigsten vorkommenden Rechtecksform wollen wir uns beim theoretischen Studium auf **rechteckige Platten** beschränken. Für andere Formen muss die Herleitung entsprechend angepasst werden. Weiter können wir das auf Seite 265 gefundene Resultat betreffend der stehenden Wellen und der Helmholtz-Gleichung verwenden.

Sei also:

$$G = I_x \times I_y = [0, a] \times [0, b], \quad x \in I_x = [0, a], \quad y \in I_y = [0, b], \quad u(x, y, t) = U_\lambda(x, y) \cdot (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$$

$u_\lambda(x, y)$ erfüllt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \Delta U_\lambda(x, y) + \lambda U_\lambda(x, y) &= 0, & (x, y) \in G \\ U_\lambda(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial G \\ U_\lambda(0, y) = U_\lambda(a, y) &= 0, & x \in I_x \\ U_\lambda(x, 0) = U_\lambda(x, b) &= 0, & y \in I_y \end{aligned}$$

Separationsansatz:

$$U(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \Rightarrow \Delta U_\lambda + \lambda \cdot U_\lambda = \Delta (X(x) \cdot Y(y)) + \lambda \cdot (X(x) \cdot Y(y)) = X_{xx} \cdot Y + X \cdot Y_{yy} + \lambda \cdot X \cdot Y = 0$$

Wenn wir die letzte Gleichung mit $X \cdot Y$ kürzen, erhalten wir eine Separation:

$$\frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} + \lambda = 0 \Rightarrow \frac{X_{xx}}{X} + \lambda = -\frac{Y_{yy}}{Y} := \pm \mu^2$$

Man beachte, dass in $\frac{X_{xx}}{X} + \lambda = -\frac{Y_{yy}}{Y}$ die linke Seite nur von x und die rechte Seite nur von y abhängig ist. Beide Seiten müssen für sich also konstant sein ($= \pm \mu^2 \rightsquigarrow$ Separation). Daher müssen hier also zwei Gleichungen bestehen:

$$\frac{X_{xx}}{X} + \lambda = \pm \mu^2, \quad -\frac{Y_{yy}}{Y} = \pm \mu^2$$

- Der Fall „–“: Da wir die Basislösungen kennen, können wir den Fall $Y(y) = e^{\pm \mu y}$ resp. $Y(y) = A \sinh(\pm \mu y) + B \cosh(\pm \mu y)$ ausschliessen, denn sonst würde folgen:
 $-\frac{Y_{yy}}{Y} = -\mu^2 \Rightarrow \frac{Y_{yy}}{Y} = \mu^2$ ist gültig, wie die Nachkontrolle zeigt. Jedoch funktioniert dies mit unseren Randbedingungen nicht:
 $U(x, 0) = 0 = X(x) \cdot Y(0) = X(x) \cdot (A \sinh(\pm \mu \cdot 0) + B \cosh(\pm \mu \cdot 0)) = X(x) \cdot (A \cdot 0 + B \cdot 1)$
 $\Rightarrow 0 = X(x) \cdot B \Rightarrow B = 0$, da ja $X(x) \not\equiv 0$ sein muss (sonst wäre $u(x, y) \equiv 0$).
 $\Rightarrow U(x, b) = X(x) \cdot A \cdot \sinh(\pm \mu \cdot b) = 0 \Rightarrow A \cdot \sinh(\pm \mu b) = 0 \Rightarrow A = 0$ oder $\mu = 0$.
 Das aber würde wiederum zu $U(x, y) = 0$ führen: Widerspruch!

Daher können wir den Fall „–“ wegstreichen.

- Es bleibt noch der Fall „+“: $-\frac{Y_{yy}}{Y} = +\mu^2 \Rightarrow Y_{yy} + \mu^2 Y = 0$. Hier kennen wir wiederum die Basislösungen $\sin(\mu y)$ und $\cos(\mu y) \rightsquigarrow Y(y) = A \sin(\mu y) + B \cos(\mu y)$.

Ein etwaiges Vorzeichen von μ spielt beim Cosinus wegen der Symmetrie keine Rolle. Beim Sinus könnte man ein solches in den Koeffizienten A „verpacken“. Einsetzen der Randbedingungen ergibt nun:

$$\begin{aligned} Y(0) = 0 &= A \sin(0) + B \cos(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = B \Rightarrow B = 0, \\ Y(b) = 0 &= A \cdot \sin(\mu b) + 0 \cdot \cos(\mu b) = A \sin(\mu b) \Rightarrow \mu b = n \pi \Rightarrow \mu = \frac{n \pi}{b}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Eine Forderung $n \in \mathbb{Z}$ ist nicht notwendig, denn das Vorzeichen von n lässt sich in A „verpacken“. Zudem fällt $n = 0$ weg, da dies nur zur Nulllösung führen würde.

$$\leadsto \mu_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \text{ ist } \mathbf{Eigenwert} \text{ und } s_n(y) = \sin\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \text{ ist } \mathbf{Eigenfunktion} \text{ von } Y_{yy} + \mu^2 Y = 0.$$

Zudem gilt im Falle „+“:

$$\frac{X_{xx}}{X} + \lambda = +\mu^2 = +\frac{n^2 \pi^2}{b^2} \Rightarrow X_{xx} + \left(\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) X = 0$$

Hier muss wiederum $\left(\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) > 0$ gelten, ansonst wir Exponentialfunktionen resp. hyperbolische Funktionen als Lösungen erhalten würden, mit denen die Randbedingungen bei $x = 0$ und bei $x = a$ nicht erfüllbar wären, wie man sofort nachkontrolliert. Daher bleiben als Basislösungen für $X(x)$ nur noch sin und cos:

$$X(x) = A \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} x\right) + B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} x\right)$$

Die Randbedingungen bewirken:

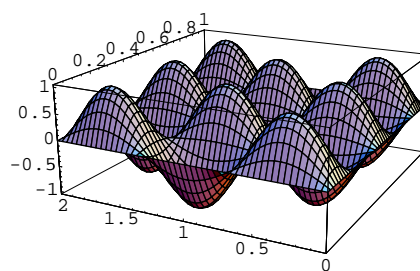
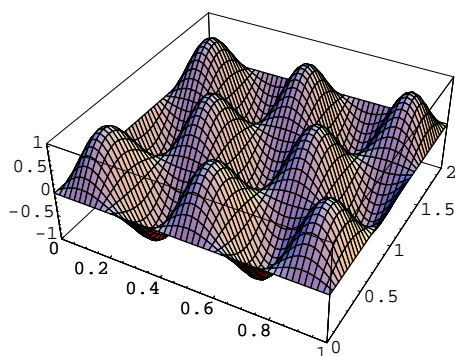
$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow X(0) = 0 = A \cos(0) + B \sin(0) = A \Rightarrow A = 0. \\ x = a &\Rightarrow X(a) = 0 = 0 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} a\right) + B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} a\right) = B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} a\right). \\ &\Rightarrow \sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \cdot a = m \cdot \pi \text{ mit } a > 0, \quad \sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda = \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \cdot \pi^2}{b^2} \end{aligned}$$

Damit kennen wir die Eigenwerte und die Eigenfunktionen von $X_{xx} + \left(\lambda_n - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) X = 0$:

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad \left(\lambda_{m,n} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad X_m = \sin\left(\frac{m \pi}{a} \cdot x\right)$$

$$U_{m,n}(x, y) = X_m(x) \cdot Y_n(y) = \sin\left(\frac{m \pi}{a} \cdot x\right) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{n \pi}{b} \cdot y\right)}_{=s_n}$$

Für den Fall $a = 1$, $b = 2$, $n = 3$, $m = 4$ zeigt das Bild von $U_{m,n}(x, y)$ eine Eierschachtel wie in den nachstehenden Figuren wiedergegeben. Anschliessend ist der *Mathematica-Code* zu finden.



Code:

```
a=1; b=2; n=3; m=5;
f[x_,y_]:=Sin[m Pi/a x] Sin[n Pi/b y];
Plot3D[f[x,y],{x,0,a},{y,0,b},PlotPoints->50];
Plot3D[f[x,y],{x,0,a},{y,0,b},PlotPoints->50,ViewPoint->{-2.648,-1.364, 0.972}];
```

$U(x, y, t)$ erhalten wir jetzt wie gewohnt durch Superposition, indem wir die Anfangsbedingungen erfüllen. Denn wir sind ja von einer homogenen Gleichung, der Helmholtz-Gleichung $\Delta u_\lambda(x, y) + \lambda \cdot u_\lambda(x, y) = 0$, ausgegangen. Mit den „Zutaten“ erhalten wir:

$$\Rightarrow u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right)}_{=U_{m,n}(x,y)} \cdot \underbrace{(A_{m,n} \sin(\omega_{m,n} t) + B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t))}_{=T_{m,n}(t), \text{ siehe Seite 265}}$$

$$\omega = c \cdot \sqrt{\lambda} \Rightarrow \omega_{m,n} = c \cdot \sqrt{\lambda_{m,n}}, \quad \lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Nun befassen wir uns noch mit den Anfangsbedingungen: $u(x, y, 0) = f(x, y)$, $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$.

Beispiel:

Wir nehmen als Beispiel einmal an, dass sich $u(x, y, t)$ beim Start zeitlich noch nicht so sehr ändert, d.h. dass gilt: $g(x, y) \equiv 0$. Dann erhalten wir:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot (A_{m,n} \sin(\omega_{m,n} \cdot t) + B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} \cdot 0))$$

$$\Rightarrow u_t(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot (A_{m,n} \cdot \omega_{m,n} \cdot \underbrace{\cos(\omega_{m,n} \cdot 0)}_{=1} - B_{m,n} \cdot \omega_{m,n} \cdot \underbrace{\sin(\omega_{m,n} \cdot 0)}_{=0})$$

$$\Rightarrow u_t(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot A_{m,n} \cdot \omega_{m,n} = g(x, y) \equiv 0 \Rightarrow A_{m,n} = 0$$

Denn eine Sinusreihe ist nur dann identisch 0, wenn alle Koeffizienten 0 sind.

Da zudem $\omega_{m,n} = c \cdot \sqrt{\lambda_{m,n}} = c \cdot \sqrt{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} = c \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \neq 0$ gilt, muss $A_{m,n} = 0$ sein.

$$\Rightarrow u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot (B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} \cdot t))$$

$$\Rightarrow u(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \underbrace{(B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} \cdot 0))}_{=1} = f(x, y)$$

Somit ist wegen (*) $f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot B_{m,n}$ eine Fourierreihe (Sinusreihe) in x und in y . Wir können daher versuchen, die Fourierkoeffizienten zu berechnen. Dazu machen wir den Ansatz:

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n}(y) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right)$$

$$\text{Daraus können wir folgern: } B_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) dx.$$

$$B_m(y) \text{ ist wegen (*) wieder eine Sinusreihe in } y: \quad B_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right).$$

$$\text{Daraus folgt: } B_{m,n} = \frac{2}{b} \int_0^b B_m(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) dy = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) dy dx \text{ sowie}$$

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right).$$

Damit lassen sich die Fourierkoeffizienten und damit $u(x, y, t)$ approximieren:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^N \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \left(\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) dy dx \right) \cos(c \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \cdot t)$$

Beispiel

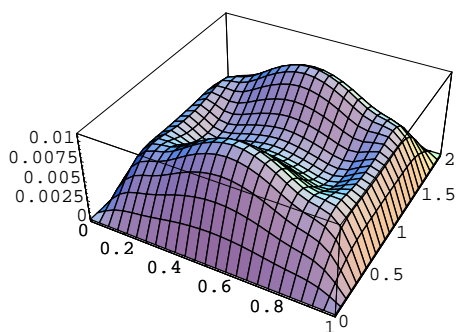
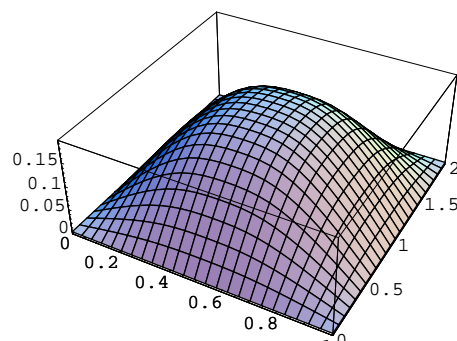
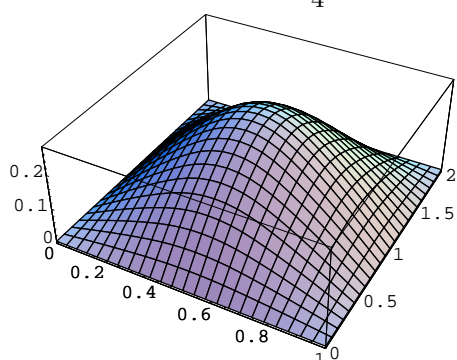
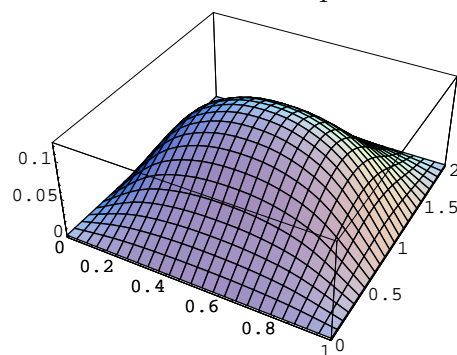
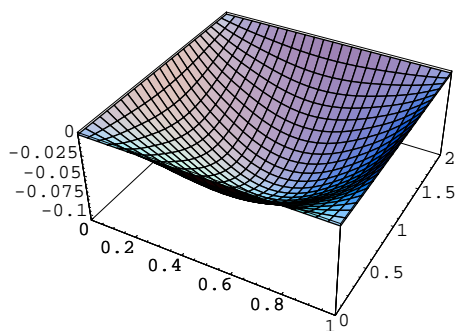
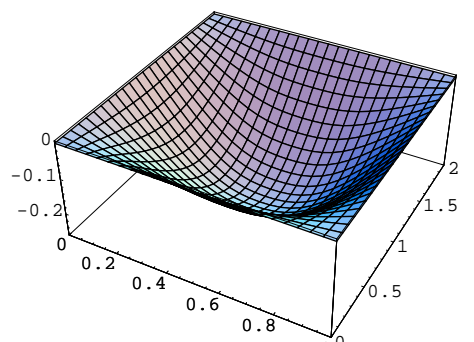
Seien $c = 1$, $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = x(x-a)y(y-b)$, $g(x) = 0$, $mm = 9$, $nn = 9$.
Die Parameter mm und nn bedeuten die maximalen Werte für die Indices m und n .

Input: (*Mathematica*)

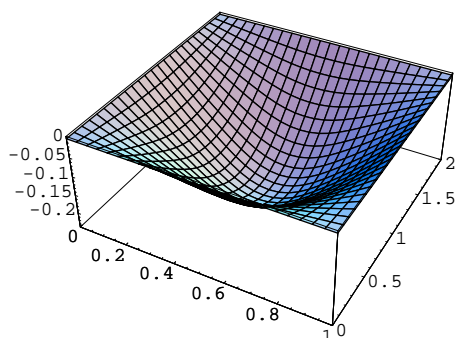
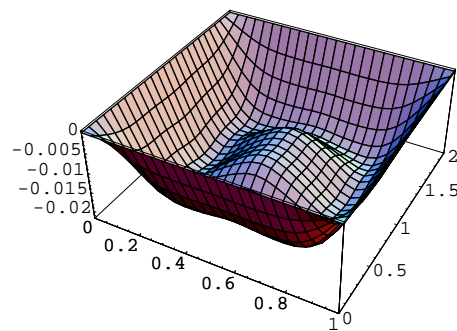
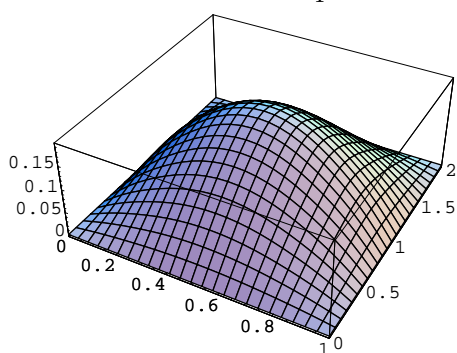
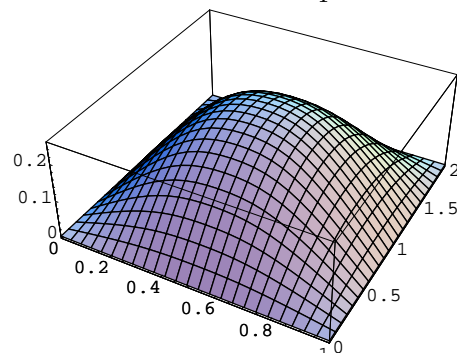
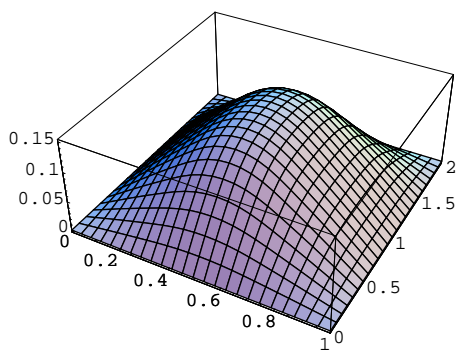
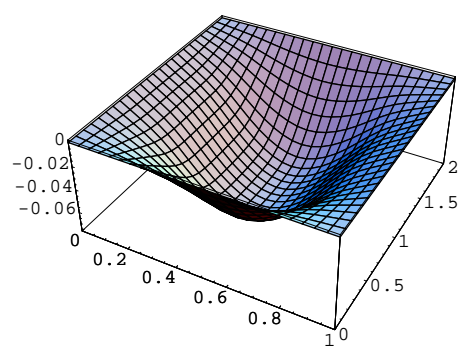
```
Remove["Global`*"];
c=1; a=1; b=2; f[x_,y_]:= x (x-a) y(y-b); g[x_]:=0; mm=9; nn=9;
A[m_,n_]:= 4/(a b) Integrate[f[x,y] Sin[m Pi x/a] Sin[n Pi y/b],
    {x,0,a},{y,0,b}]/N//Chop;
tab1 = Table[A[m,n],{m,1,mm},{n,1,nn}];
AA[m_,n_]:=tab1[[m]][[n]];
tab2 = Table[AA[m,n],{m,1,mm},{n,1,nn}];
uApprox[x_,y_,t_,mm_,nn_]:= Sum[Sin[m Pi x/a] Sin[n Pi y/b] AA[m,n]
    * Cos[c Pi t Sqrt[(m^2)/(a^2)+(n^2)/(b^2)]],{m,1,mm},{n,1,nn}];
Table[p[t]=Plot3D[uApprox[x,y,t/4+Pi,mm,nn],{x,0,a},{y,0,b}],{t,0,11}];
```

Output:

Nachstehend sind die Schwingungszustände für $t = \pi, \pi + \frac{1}{4}, \pi + \frac{2}{4}, \dots, \pi + \frac{11}{4}$ wiedergegeben.

Plot für $t = \pi + \frac{0}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{1}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{2}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{3}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{4}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{5}{4}$

Um mehr zu sehen, müsste man eine grössere Anzahl Bilder bei einer kleineren zeitlichen Distanz ploten und damit eine Animation herstellen. Es ist leider aus verständlichen Gründen nicht möglich, dies auf Papier wiederzugeben. Ein interessantes Phänomen wird jedoch auch schon hier sichtbar: Die zwischendurch auftretende Delle (Beule nach innen), welche aber sogleich wieder verschwindet. Weil ich diese Beule nicht erwartet habe, nenne ich sie scherzhalber die **Überraschungsbeule**.

Plot für $t = \pi + \frac{6}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{7}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{8}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{9}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{10}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{11}{4}$

Für weitere praktische Rechnungen sei hier auf die Übungen verwiesen.

8.3.5 Ausblick über Eigenwerte und Eigenfunktionen

Ohne Beweis sei noch auf einen allgemeinen Sachverhalt betreffend Helmholtzgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und ihre Eigenwerte und Eigenfunktionen verwiesen.

Sei $\Delta u + \lambda u = 0$ in G , $u = 0$ auf $M_1 \subset \partial G$ und $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ auf $M_2 \subset \partial G$. Dann gilt:

Satz:

1. Für die Eigenwerte ist $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$.
Für $M_1 \neq \{\}$ findet man $0 < \lambda_1$. Sonst gilt $0 = \lambda_1$
2. Zu λ_k existieren höchstens endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen (Basis). Jede Eigenfunktion zu λ_k ist Linearkombination der Basis.
3. Für $\lambda_k \neq \lambda_j$ ist $u_k \perp u_j$, d.h. es gilt $\int_G u_k u_j dG = 0$
4. Jede Funktion auf G lässt sich in der Basis der u_k in eine Reihe entwickeln:

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(\vec{x}), \quad \{\vec{x} \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ orthonormiert}, \quad c_k = \int_G f(\vec{x}) \cdot u_k(\vec{x}) dG$$

8.4 Fouriertransformationen und partielle Diff'gleichungen

8.4.1 Entwicklung der Methode an einem Beispiel

Bsp.: Wir studieren das Beispiel einer einfachen Wellengleichung mit nur einer Ortsvariablen. Sei dabei $|u(x, t)|$ beschränkt und $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\begin{aligned} c^2 u''_{xx} - u''_{tt} &= 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(x, 0) &= f(x) & x \in \mathbb{R}, (ABD) \\ u_t'(x, 0) &= g(x) & x \in \mathbb{R}, (ABD) \end{aligned}$$

Wir machen den Separationsansatz: $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Daraus folgt:

$$X \cdot T''_{tt} = c^2 \cdot X''_{xx} \cdot T \Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot X \cdot T''_{tt} = X''_{xx} \cdot T \Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''_{tt}}{T} = \frac{X''_{xx}}{X} := \pm \lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Da die linke und die rechte Seite der letzten Gleichung von verschiedenen Variablen abhängen, erhalten wir daraus zwei separate Gleichungen. Jeweils der linke Ausdruck ist gleich $\pm \lambda^2$. \leadsto

$$T''_{tt} = \pm \lambda^2 c^2 T \quad \text{und} \quad X''_{xx} = \pm \lambda^2 \cdot X$$

Je nach „+“ oder „-“ erhalten wir damit die Lösungspaare:

$$T = C_1 \cdot e^{\pm \lambda c t}, \quad X = C_2 \cdot e^{\pm \lambda x} \quad \text{und} \quad T = A \cdot e^{\pm i \lambda c t}, \quad X = B \cdot e^{\pm i \lambda x}$$

Das ergibt die folgenden Kombinationen:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= C_1 \cdot e^{i \lambda (x - c t)} \\ u_2(x, y) &= C_2 \cdot e^{i \lambda (x + c t)} \\ u_3(x, y) &= C_3 \cdot e^{-i \lambda (x - c t)} \\ u_4(x, y) &= C_4 \cdot e^{-i \lambda (x + c t)} \end{aligned}$$

Diese vier Funktionen lassen sich trigonometrisch als Linearkombinationen von $\cos(\pm\lambda(x+ct)) = \cos(\lambda(x+ct))$ und $\cos(\pm\lambda(x-ct)) = \cos(\lambda(x-ct))$ sowie $i \sin(\pm\lambda(x+ct)) = \pm i \sin(\lambda(x+ct))$ und $i \sin(\pm\lambda(x-ct)) = \pm i \sin(\lambda(x-ct))$ linear zusammensetzen. Dafür genügt aber schon die Basis $\{\cos(\lambda(x+ct)), \cos(\lambda(x-ct)), i \sin(\lambda(x+ct)), i \sin(\lambda(x-ct))\}$. Diese Basis lässt sich, wie man leicht sieht, aus $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ gewinnen, womit $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ als Basislösungen genügen. Damit ist bei gegebenen λ die folgende Funktion $u_\lambda(x, t)$ eine Lösung:

$$u_\lambda(x, t) = C_1(\lambda) \cdot e^{i\lambda(x-ct)} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda(x+ct)} = e^{i\lambda x} \cdot (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda ct})$$

Wir definieren nun:

$$l := \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \nu := \frac{c}{l}, \quad \omega = 2\pi\nu \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \nu = \frac{c}{l} = \frac{c\lambda}{2\pi} \Rightarrow \lambda c = \omega$$

Damit wird:

$$u_\lambda(x, t) = e^{i\lambda x} \cdot (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\omega t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\omega t})$$

Nun gilt für $c^2 u''_{xx} - u''_{tt} = 0$ das „Superpositionsprinzip“: Zu zwei Lösungen $u_{\lambda_1}(x, t)$ und $u_{\lambda_2}(x, t)$ ist auch jede Linearkombination $\alpha u_{\lambda_1}(x, t) + \beta u_{\lambda_2}(x, t)$ Lösung. Speziell ist also $u_{\lambda_1}(x, t) + u_{\lambda_2}(x, t)$ eine Lösung. Da für λ einzig die Forderung $\lambda \in \mathbb{R}$ gemacht worden ist, kann λ nicht als diskreter Summationsindex angenommen werden. Statt von einer Summenlösung mit beliebig vielen Summanden müssen wir daher von einer Integrallösung als „Superposition“ ausgehen:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\omega t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\omega t}) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda ct}) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

Dabei erhalten wir als Anfangsbedingungen für $t = 0$ die Anfangsintegrale:

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = f(x) \quad \text{und}$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = g(x)$$

Diese Integrale erkennen wir aber als die **Fourier-Rücktransformaten** von $v(\lambda) := (C_1(\lambda) + C_2(\lambda))$ und von $w(\lambda) := i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda))$. Daher sind $v(\lambda)$ und $w(\lambda)$ die **Fourier-Transformierten** von $f(x)$ und $g(x)$.

Dazu kennen wir die Formeln:

$$v(\lambda) := (C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

$$w(\lambda) := i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

$$\Rightarrow C_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left(v(\lambda) - \frac{w(\lambda)}{i\lambda c} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) - \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right), \quad C_2(\lambda) = \frac{1}{2} \left(v(\lambda) + \frac{w(\lambda)}{i\lambda c} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) + \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda ct}) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) - \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right) \right) (\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) + \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right) (\lambda) \cdot e^{i\lambda ct} \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hat{f}}{2} (e^{-i\lambda ct} + e^{i\lambda ct}) - \frac{1}{\lambda c} \frac{\hat{g}}{2i} (e^{-i\lambda ct} - e^{i\lambda ct}) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f} \cos(\lambda ct) - \frac{1}{\lambda c} \hat{g} \sin(\lambda ct) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

Folgerung: Damit erhalten wir die folgende **Lösung** von $c^2 u''_{xx} - u''_{tt} = 0$ und obigen Anf'bed.:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(\lambda) \cos(\lambda ct) - \frac{1}{\lambda c} \hat{g}(\lambda) \sin(\lambda ct) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda \quad \text{mit}$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx, \quad \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

8.4.2 Beispiel einer konkreten Anwendung

Bsp.: Sei $c = 1$ und $f(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 0$ sonst. Sei $g(x) = 0$. Damit ergibt sich:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(\lambda)}{\lambda}, \quad \hat{g}(\lambda) = 0.$$

Z.B. für die Werte $x = 1$ und $t = 1$ erhält man mit der Formel für $u(x, t)$ den Wert $u(1, 1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
 $u(x, t)$ kann also jetzt berechnet werden.

8.5 Zur Idee der Greenschen Funktion

8.5.1 Einführung und Begriff

Sei B jetzt ein Gebiet im \mathbb{R}^n , ∂B vernünftig. Sei $P_0 \in B$, $P, P_k \in \bar{B}$, $\bar{b} = B \cup \partial B$.

Der Einfachheit halber verwenden wir hier als Bezeichnungen für die Punkte P_k die bisher für die gewöhnlichen eindimensionalen Variablen verwendeten Buchstaben: $x = P$, $x_k = P_k$, $z = P_0$. Damit können wir schreiben:

Definition: Eine Funktion $G_z : B \setminus \{z\} \mapsto \mathbb{R}$ heisst **Greensche Funktion** des Laplace-Operators $\Delta \Leftrightarrow$

1. $\forall z \in B, x \in \partial B \quad \lim_{x_n \rightarrow x} G_z(x_n) = 0$
2. $\forall z \in B \quad \Delta G_z(x) = \delta(z) \quad (\delta = \text{Dirac-Distribution})$

Sei nun die „Testfunktion“ $\varphi(x)$ eine vernünftige (genügend oft diff'bare u.s.w.) Funktion mit $\varphi(x) = 0$ auf ∂B . Dann gilt für das Skalarprodukt nach der Greenschen Formel:

$$\langle \Delta G_z(x), \varphi(x) \rangle = \int_B G_z(x) \cdot \Delta \varphi(x) dB = \underbrace{\int_B \underbrace{\Delta G_z(x)}_{\delta(z)} \cdot \varphi(x) dB}_{\varphi(z)} + \underbrace{\int_{\partial B} \underbrace{G_z(x)}_{=0} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \vec{n}} d\sigma}_{=0} - \underbrace{\int_{\partial B} \frac{\partial G_z(x)}{\partial \vec{n}} \underbrace{\varphi(x)}_{=0} d\sigma}_{=0}$$

$$\Rightarrow \int_B G_z(x) \cdot \Delta \varphi(x) dB = \varphi(z), \quad \Delta \varphi(x) = f(x) \Rightarrow \int_B G_z(x) \cdot f(x) dB = \varphi(z)$$

Damit erhalten wir den folgenden Satz:

Satz: Das Dirichlet-Problem $\Delta u(x) = f(x)$ in B , $u(x) = 0$ auf ∂B wird durch die Greensche Funktion gelöst wie folgt:

$$u(z) = \int_B G_z(x) \cdot f(x) dx \quad \text{oder} \quad u(x) = \int_B G_z(x) \cdot f(z) dz$$

Aus der zweiten Formel kann man folgern:

$$\Delta u(x) = \Delta \int_B f(z) G_z(x) dB = \int_B f(z) \Delta G_z(x) dB = \int_B f(z) \delta(x - z) dB = f(x) \\ \Rightarrow u(x) \text{ löst unser Dirichlet-Problem.}$$

8.5.2 Ein Schulbeispiel

Wir wollen hier noch das bekannte Beispiel der Potentialfunktion $\gamma_z(x)$ einer Punktladung in z studieren. Diese Funktion entpuppt sich nämlich als eine Greensche Funktion. Aus der Physik weiss man, dass für das besagte Potential gilt:

$$\gamma_z(x) = -\frac{1}{4\pi|x-z|}, \quad x, z \in \mathbb{R}^3, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \gamma_z(x) = 0$$

Dabei dürfen wir wegen der Möglichkeit der Translation o.B.d.A. $z = 0$ annehmen.

$$\leadsto \gamma_0(x) := \gamma(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} = -\frac{1}{4\pi r} := \gamma(r).$$

$\gamma(r)$ ist eine vernünftige, diff'bare Funktion ausser für $r = 0$.

Für das Folgende schreiben wir den Laplace-Operator Δ in Polarkoordinaten, denn $\gamma(r)$ ist zentralsymmetrisch (siehe Seite 224):

$$\Delta \varphi(r) = \frac{d^2 \gamma}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\gamma}{dr} \Rightarrow \Delta \gamma(r) = -\frac{1}{4\pi} (-2r^{-3} - 2r^{-1}(-1)r^{-2}) \Big|_{r \neq 0} \rightarrow 0 \quad \text{mit } r \rightarrow 0$$

Wir benutzen nochmals die Greensche Formel wie vorhin: $\int_B (\varphi \Delta \Psi - \Psi \Delta \varphi) dV = \int_{\partial B} (\varphi \frac{\Psi}{n} - \Psi \frac{\varphi}{n}) d\sigma$

Sei nun $\Psi = \gamma$, φ = Testfunktion mit $\varphi(x) = 0$ auf dem Rand und vernünftigen Ableitungen. Da $\gamma(x)$ im Ursprung nicht als reelle Funktion definiert ist, berechne wir:

$$\begin{aligned} \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} (\varphi \Delta \Psi - \Psi \Delta \varphi) dV &= \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} (\varphi \underbrace{\Delta \gamma}_{=0} - \gamma \Delta \varphi) dV = \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} -\gamma \Delta \varphi dV \\ &= \int_{\partial B} (\varphi \frac{\Psi}{n} - \Psi \frac{\varphi}{n}) d\sigma = \int_{\partial(\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0))} \underbrace{\left(\underbrace{\varphi \frac{\gamma}{n}}_{!} - \underbrace{\gamma \frac{\varphi}{n}}_{!} \right)}_{=0, \quad r \rightarrow \infty} d\sigma = \int_{\partial K_r(0)} (\varphi \frac{\gamma}{n} - \gamma \frac{\varphi}{n}) d\sigma \end{aligned}$$

1. Wegen der Zentralsymmetrie von $\gamma(r)$ gilt in bezüglich der Kugeloberfläche:

$$\left| \int_{\partial K_r(0)} \gamma \frac{\varphi}{n} d\sigma \right| = |\gamma| \cdot \left| \int_{\partial K_r(0)} \frac{\varphi}{n} d\sigma \right| \leq \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \cdot (4\pi r^2 \cdot \text{Max}(\text{grad}(\varphi))) = r \cdot \text{Max}(\text{grad}(\varphi)) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0$$

2. Wegen der Zentralsymmetrie von $\gamma(r)$ ist $\frac{\gamma}{\vec{n}} \parallel \vec{r} \Rightarrow \frac{\gamma}{\vec{n}} = -\gamma'(r)$. Das Minuszeichen entsteht, weil der Gradient in Richtung des stärksten Wachstums von $\gamma(r) = -\frac{1}{4\pi r}$ zeigt, also weg vom Ursprung. \vec{n} dagegen zeigt zum Ursprung hin. $\gamma(r)$ ist konstant auf der Kugeloberfläche.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\partial K_r(0)} \varphi \frac{\gamma}{\vec{n}} d\sigma &= -\gamma'(r) \int_{\partial K_r(0)} \varphi d\sigma = (-(-(4\pi r)^{-1})') \cdot (4\pi r^2 \varphi(\xi)) \Big|_{\xi \in K_r(0)} \\ &= (-1) \cdot (4\pi)^{-1} \cdot r^{-2} \cdot (4\pi r^2) \cdot \varphi(\xi) \Big|_{\xi \in K_r(0)} = -\varphi(\xi) \Big|_{\xi \in K_r(0)} \rightarrow -\varphi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} -\gamma \Delta \varphi dV &= \int_{\partial K_r(0)} \left(\varphi \frac{\gamma}{\vec{n}} - \gamma \frac{\varphi}{\vec{n}} \right) d\sigma = -\varphi(\xi) \Big|_{\xi \in K_r(0)} - r \cdot \text{Max}(\text{grad}(\varphi)) \rightarrow -\varphi(0) - 0 \text{ für } r \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} \gamma \Delta \varphi dV \rightarrow \varphi(0) \quad \text{für } r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\gamma(r) = -\frac{1}{4\pi r}$ ist also Greensche Funktion zu $\Delta u(x) = f(x)$ in \mathbb{R}^3 und $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Daher können wir zu diesem jetzt hier dargestellten Problem gleich $u(x)$ mit Hilfe dieser Greensche Funktion berechnen. Die dabei entstehende Formel ist bekannt unter dem Namen „Poissonsche Formel“.

Korollar:

(Poissonsche Formel)

Vor.:

$$\Delta u(x) = f(x) \text{ in } \mathbb{R}^3, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

Beh.:

$$u(x) = -\frac{1}{r\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(z)}{|x-z|} dz$$

Bemerkung:

Bei der Anwendung der Methode mit der Greenschen Funktion besteht das grosse **Problem** darin, die gesuchte **Greensche Funktion zu konstruieren**. Im uns gesetzten engen Rahmen ist es nicht möglich darauf weiter einzugehen. Der Leser möge dazu die sehr umfangreich vorhandene Fachliteratur über partielle Differentialgleichungen konsultieren.

Zu gewissen oft vorkommenden Differentialoperatoren und Randbedingungen findet man heute die zugehörigen Greenschen Funktionen auch in „Formeln- und Tafelbüchern“ tabelliert.

8.6 Bemerkung zur Delta-Funktion

Auf Seite 77 ist bemerkt worden, dass die früher gegebene Einführung der Delta-Funktion nicht ganz der sonst üblichen Art in der Mathematik entspricht. Daher soll hier die Sache nochmals auf eine andere Weise dargestellt werden.

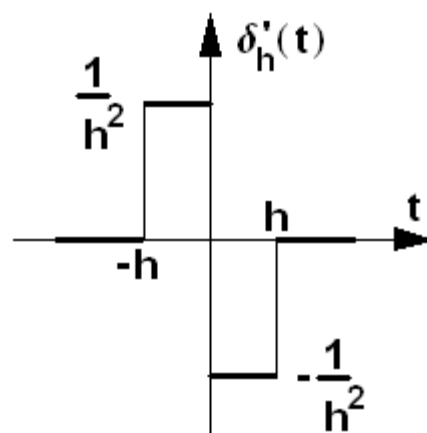
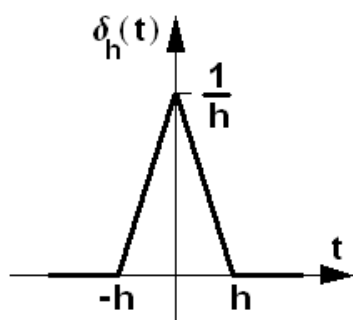
Die **Delta-Funktion** $\delta(t)$ ist eine **verallgemeinerte Funktion**. Wir definieren sie hier wie folgt:

Definition:
$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t),$$

wobei $\delta_h(t)$ die im linken Bild unten dargestellte Funktion ist.

Die Delta-Funktion hat also an der Stelle $t = 0$ einen „Pic“. Im rechten Bild ist die Ableitung $\delta'_h(t)$ von $\delta_h(t)$ gezeichnet.

Definition:
$$\delta'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta'_h(t)$$

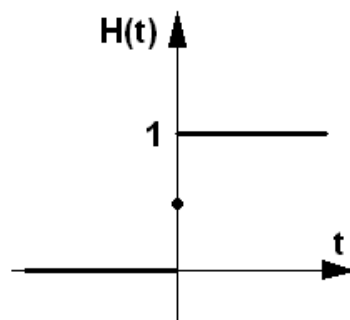


Die Ableitung der so definierten Delta-Funktion kann man hier mit Hilfe der linksseitigen und der rechtsseitigen Ableitung von $\delta_h(t)$ gewinnen.

Weiter definieren wir hier die **Heaviside-Sprungfunktion** wie folgt:

Definition:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



$H(t - a)$ ist verschobene Sprungfunktion mit Sprung an der Stelle $t = a$. Ebenso ist $\delta(t - a)$ ist verschobene Delta-Funktion mit Pic an der Stelle $t = a$.

Wie man unter Verwendung von $\delta_h(t)$, $\delta_h'(t)$ u.s.w. und des Grenzübergangs nachvollziehen kann, haben $\delta(t)$, $\delta'(t)$ und $H(t)$ u.s.w. die folgenden Eigenschaften:

1. $t \neq 0 \Rightarrow \delta(t) = 0 \quad \delta(0) = +\infty$
2. $\delta(t)$ ist gerade: $\delta(t) = \delta(-t)$
3. $\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t)$, $a \neq 0$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$, $\delta(0) = +\infty$, $\int_{-a}^a \delta'(t) dt = 0$ für $a > 0$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} |\delta^{(n)}(t)| dt = +\infty$ für $n \geq 1$
6. $\int_{-\infty}^t \delta(q) dq = H(t)$
7. $H(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(t) + 1)$
8. $H'(t) = \delta(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}'(t) \Rightarrow \operatorname{sgn}'(t) = 2 H'(t)$
9. $f(t) \delta(t - a) = f(a) \delta(t - a)$ für f stetig in $t = a$ (denn $\delta(t - a) = 0$, $t \neq a$)
10. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$ für f stetig in $t = a$, $\int_{-\infty}^t \delta(q - a) dq = H(t - a)$
11. $(f(t) - f(a)) \delta'(t - a) = f'(a) \delta(t - a)$ für f' stetig in $t = a$
 $\leadsto f(t) \delta'(t - a) = f(a) \delta'(t - a) + f'(a) \delta(t - a)$
12. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - a) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \delta(t - a) dt = -f'(a)$ für f' stetig in $t = a$
13. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^{(n)}(t - a) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t) \delta(t - a) dt = (-1)^{(n)} f^{(n)}(a)$ für $f^{(n)}$ stetig in $t = a$
14. $f(t) \delta^{(n)}(t - a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \delta^{(n-k)}(t - a)$
15. $f * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$
16. U.s.w.

8.7 Ausblick

Der bis jetzt zum Thema „partielle Differentialgleichungen“ besprochene Stoff behandelt nur Grundschritte in dieses Gebiet. Weiterer grundlegender Stoff ist hier weggelassen worden. Speziell sei daraus auf folgende Gebiete hingewiesen:

1. Die Weiterführung der Methode der Greenschen Funktion und die Umformung von Differentialgleichungen in Integralgleichungen sowie deren Lösung. Zur Greenschen Funktion gehört die Theorie der Distributionen.
2. Weitere Methoden aus dem Gebiet der Variationsrechnung.
3. Behandlung der Wellengleichung, Methode von d'Alembert, Methode der Charakteristiken.
4. Diverse diskrete oder numerische Verfahren wie Taylor-Methoden oder die Methoden der finiten Elemente, die zum Teil an anderer Stelle dargestellt sind.
5. Diverse praktische Beispiele, auch aus dem Gebiet der Hydrodynamik, oder Diffusionsprobleme im Zusammenhang mit dem Bauwesen.

Der geneigte Leser ist gebeten, im Falle des Bedarfs solcher Kenntnisse wiederum auf die einschlägige Literatur zurückzugreifen, die in sehr reichlicher Masse vorhanden ist.

Kapitel • Chapitre 9

Mathematische Modellierung (Anhang 3) — Annexe 3 (sans traduction)

- *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. Momentanément, la traduction française manque encore.*

In diesem Kapitel sind einige Beispiele von praktischen Anwendungen aus dem Interessebereich von Ingenieuren dargestellt. Ein spezieller Augenmerk wird dabei auf die Darstellungen der Überlegungen bei den Modellbildungen gelegt, welche hier in der Regel zu Differentialgleichungen als Modelle der beschriebenen Realität führen.

9.1 Einige Kurven

9.1.1 Die Klothoide

Modellierung

Die **Klothoide** ist bekannt als diejenige Kurvenart, nach welcher u.a. Biegungen von Strassen geformt werden müssen, damit diese möglichst gefahrlos befahren werden zu können.

Zur Modellierung einer idealen Kurvenform verwenden wir folgende Überlegung: Will man z.B. mit einem Auto von einer geraden Strecke in eine Kurve einbiegen, so kann das nur unter der Bedingung geschehen, dass man ab Kurvenbeginn langsam und „gleichmässig“ am Steuerrad zu drehen beginnt. Aus Erfahrung weiss man, dass abrupte Drehungen am Steuerrad den Wagen zum Schleudern bringen können.

Die langsame und gleichmässige Drehung des Steuerrades wird dann über einen Zahnrad- oder Gelenkmechanismus übersetzt in eine langsame und gleichmässige Änderung des Winkels der Räder zur Mittelachse des Wagens. Statt der Mittelachse kann man auch eine andere Achse für die Betrachtung benutzen. So ist es statthaft zu sagen, dass die Winkeländerung der Ebene durch die Vorderräder beziehungsweise die Winkeländerung des Normalenvektors oder einer etwaigen vorderen Radachse pro Zeiteinheit konstant sein muss. Wenn wir annehmen, dass es sich um ein altmodisches Fahrzeug handelt, welches eine vordere, bewegliche und eine hintere, fixe Radachse besitzt, so muss bei einer gleichmässigen Drehung am Steuerrad der Winkel zwischen der hinteren und vorderer Radachse ebenso gleichmässig zunehmen.

Hört man auf mit der Drehung am Steuerrad, so bleibt der Winkel zwischen den Radachsen konstant und der Wagen fährt einen Kreis mit konstanter Krümmung, d.h. einer konstanten Änderung des Tangentenwinkels pro Zeiteinheit. Dreht man wieder gleichmässig am Steuerrad, so nimmt die Änderung des Tangentenwinkels gleichmässig zu, d.h. die Krümmung wird gleichmässig grösser. (Die Krümmung ist im Skript „Analysis“ definiert worden als die Änderung des Tangentenwinkels pro Bogenlänge, was bei konstanten Reisegeschwindigkeit gleichbedeutend ist mit der Änderung des Tangentenwinkels pro Zeit.)

Daher erheben wir zur Modellierung einer idealen gefahrlosen Kurve die Forderung, dass wegen der gleichmässigen Drehung am Steuerrad die Kurvenkrümmung beim Durchfahren mit konstanter niedriger Geschwindigkeit gleichmässig zunehmen muss.

Das ergibt mit κ = Krümmung und L = Bogenlänge folgende **Modellierungsbedingung**:

$$\frac{d\kappa}{dL} = c = \text{const.}$$

Aus dieser Differentialgleichung für $\kappa(L)$ folgt: $\kappa = c \cdot L + C_1$.

Da beim Kurvenbeginn, d.h. für $L = 0$, die Krümmung κ gleich null sein muss, folgt:

$$\kappa(L) = c \cdot L$$

Sei τ der Winkel zwischen der Tangente an die Kurve und der vorangegangenen geraden Strecke.

Dann gilt wegen der Definition der Krümmung: $\kappa = \frac{d\tau}{dL} = c \cdot L \Rightarrow \tau = c \cdot L^2 + C_2$

Da τ als Winkel der Tangente zur vorangegangenen geraden Strecke bei Kurvenbeginn null sein muss, folgt für $L = 0$ dass gilt: $0 = c \cdot 0^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$. Damit wird:

$$\tau = c \cdot L^2$$

Wir betrachten die Kurve in einem Koordinatensystem mit der x -Achse parallel zur vorangegangenen geraden Strecke. Dann gilt an der Kurve die Beziehung: $(\Delta L)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ mit $\Delta x \approx \cos(\tau) \cdot \Delta L$

und $\Delta y \approx \sin(\tau) \cdot \Delta L$. Dabei ist $\tau = c \cdot L^2$. (Der Leser ist gebeten, sich selbst dazu eine Skizze zu machen.) Das führt zu

$$\begin{aligned} dx &= \cos(c \cdot L^2) dL \\ dy &= \sin(c \cdot L^2) dL \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei separierte Differentialgleichungen vor uns. Die Integration ergibt:

$$\begin{aligned} x_0 &= \int_0^{L_0} \cos(c \cdot L^2) \cdot dL \\ y_0 &= \int_0^{L_0} \sin(c \cdot L^2) \cdot dL \end{aligned}$$

Als Vektor geschrieben erhalten wir die **Vektorfunktion der Klothoide** oder **Spinnlinie** oder auch **Cornu-Spirale** :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} \cos(c \cdot t^2) \\ \sin(c \cdot t^2) \end{pmatrix} dt$$

Allgemeiner werden zentrisch gestreckte solche Kurven ebenfalls **Klothoiden** genannt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \int_0^L \begin{pmatrix} \cos(c \cdot t^2) \\ \sin(c \cdot t^2) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} a \sqrt{\frac{\pi}{2c}} \text{FresnelC}\left(\sqrt{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} L\right) \\ a \sqrt{\frac{\pi}{2c}} \text{FresnelS}\left(\sqrt{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} L\right) \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

FresnelC und *FresnelS* sind die **Fresnel Cosinus**- und **Fresnel Sinus**-Integrale. In heute üblichen Computeralgebraprogrammen sind diese Funktionen implementiert und können daher verwendet werden.

Wir wollen hier nicht auf die technischen Feinheiten eingehen, mit welchen in der Verkehrstechnik die Klothoiden-Parameter behandelt und die Kurven damit eingeteilt werden. Erwähnt werden soll hier nur der Fall $a = 1$ und $c = \frac{1}{2}$:

Definition:

Die Klothoide $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2} \cdot t^2) \\ \sin(\frac{1}{2} \cdot t^2) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \text{FresnelC}\left(\frac{L}{\sqrt{\pi}}\right) \\ \sqrt{\pi} \text{FresnelS}\left(\frac{L}{\sqrt{\pi}}\right) \end{pmatrix}$ heisst **Einheitsklothoide**.

Plot und Approximation

Sir wollen nun einerseits die Einheitsklothoiden plotten. Andererseits ist es sehr einfach, die Fresnel-Integrale durch Potenzreihen darzustellen und diese im Vergleich zur exakten Kurve graphisch zu zeigen. Wir verwenden der Einfachheit halber dazu *Mathematica*:

Input 1

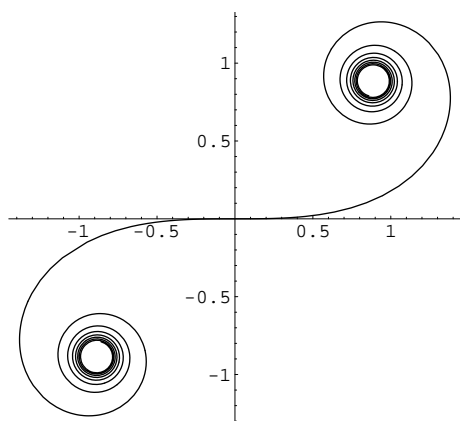
```
v[xL_]:= {Integrate[Cos[t^2 /2], {t,0,xL}], Integrate[Sin[t^2 /2], {t,0,xL}]};
ParametricPlot[Evaluate[v[xL]], {xL,-10,10}, AspectRatio->Automatic]
```

Input 2

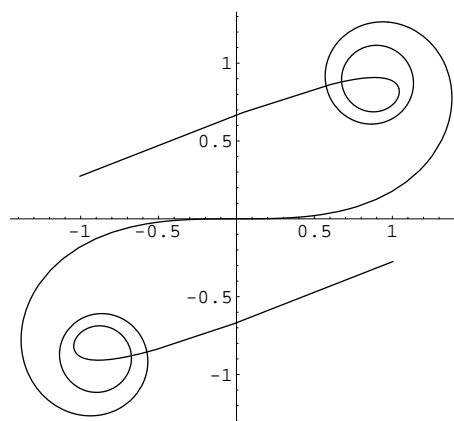
```
n=70; b=5.6;
vPot[xL_]:= {Integrate[Normal[Series[Cos[t^2 /2], {t,0,n}]], {t,0,xL}],
Integrate[Normal[Series[Sin[t^2 /2], {t,0,n}]], {t,0,xL}]};
p2=ParametricPlot[Evaluate[vPot[xL]], {xL,-b,b}, AspectRatio->Automatic]
```

Input 3 (Überlagerung der beiden Graphiken)

```
Show[p1,p2]
```

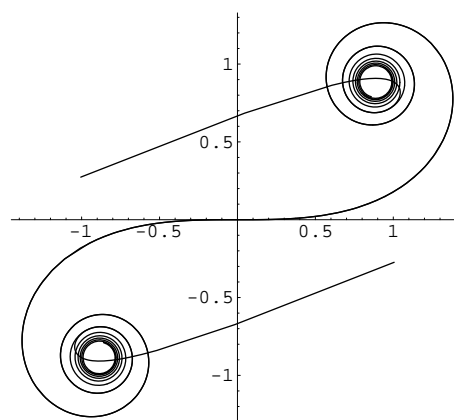
Output

Kurve exakt



Kurve mit Potenzreihe bis zur Ordnung 70

Rechts sieht man die Überlagerung der exakt gerechneten Kurve und derjenigen Kurve, welche mit Potenzreihen bis zur Ordnung 70 erzeugt worden ist. Die letztere reist plötzlich aus nach „Irgendwohin“, abhängig von der Abbruchordnung der Potenzreihe.

**9.1.2 Kettenline contra Seilkurve**

Auf Seite 254 haben wir herausgefunden, dass eine Kettenlinie in der Form einer Cosinus hyperbolicus-Funktion dargestellt beschrieben werden muss. Unter Berücksichtigung von Verschiebungen im Koordinatensystem ergibt sich: $y(x) = a \cosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + y_0$. a ist dabei der Krümmungsradius im tiefsten Punkt der Kettenlinie.

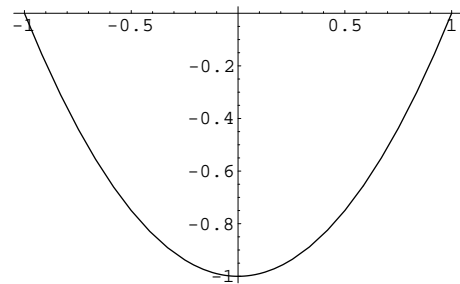
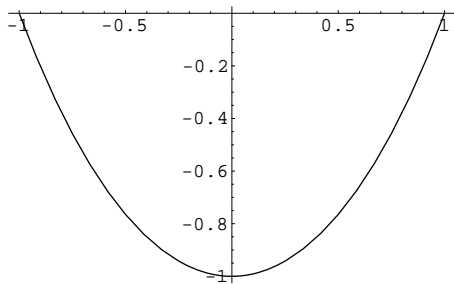
Zur Vereinfachung nehmen wir hier folgende Werte an:

$$a = \frac{1}{\cosh(1) - \cosh(0)}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{\cosh(0)}{\cosh(1) - \cosh(0)} - 1$$

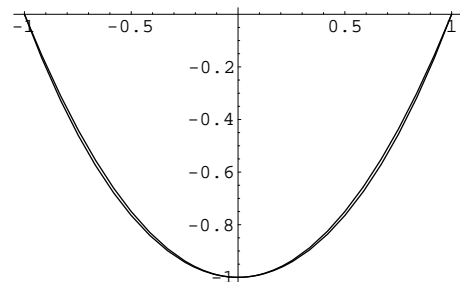
$$\leadsto y(x) = a \cosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + y_0 = \frac{1}{\cosh(1) - \cosh(0)} \cosh(x) - \frac{\cosh(0)}{\cosh(1) - \cosh(0)} - 1 = \frac{\cosh(x) - \cosh(1)}{\cosh(1) - 1}$$

Zwischen $x = -1$ und $x = 1$ erhält man damit die nachstehend links gezeigte Graphik:

Das Bild links gleicht sichtlich der um -1 verschobenen Normalparabel $p(x) = x^2 - 1$, vgl. nachstehendes rechtes Bild.



Rechts sieht man nun die Überlagerung der beiden obigen Bilder. Dieses Bild spricht für sich.



Berechnen wir die **Längen** der beiden Kurven, so erhalten wir hier für die Kettenlinie $L_K \approx 2.47008$ und für die Parabel $L_P \approx 2.45982$. Die Abweichung bezogen auf L_K beträgt etwa 0.415 Prozent.

Die **Kettenlinie** haben wir mit Hilfe einer Energiebetrachtung hergeleitet. Sie ist durch einen **Cosinus hyperbolicus** gegeben. Nun wollen wir zeigen, dass wir mit einer anderen Modellierung über die Kräfte und Momente eine sogenannte **Seilkurve** erhalten, welche dann durch eine **Parabel** gegeben ist.

Zur **Modellierung** stellen wir uns auf einer Seilkurve zwei nahe beieinander gelegene Punkte $P_i = P_i(x, y)$ und $P_{i+1} = P_{i+1}(x + \Delta x, y + \Delta y)$ vor. (Der Leser mache sich dazu eine Skizze.) Die Distanz der Punkte, welche etwa der dazwischen liegenden Seillänge entspricht, beträgt $\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Wir nehmen weiter an, dass das Seil überall gleich dick sei mit dem Gesamtgewicht Q . Die Gewichtskraft pro Länge beträgt dann im Grenzwert $q(l) = Q'(l) = \frac{dQ}{dl}$, wobei l hier die Variable für die Länge ist.

Links im Punkt P_i hat man dann die in die Horizontal- und die Vertikalkomponente aufgegliederte Kraft $\vec{F}_i = \begin{pmatrix} -F_H \\ -F_V \end{pmatrix}$. Und rechts ist die Kraft $\vec{F}_{i+1} = \begin{pmatrix} F_H + \Delta F_H \\ F_V + \Delta F_V \end{pmatrix}$. Weiter greift am Seilstück zwischen P_i und P_{i+1} die Gewichtskraft $\Delta Q = -q(x)\Delta x$ an. Da wegen der Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte die Summe der Kräfte null sein muss, gilt:

$$\Delta F_H = 0, \quad \Delta F_V = q(x)\Delta x \Rightarrow q(x) = \frac{dF_V}{dx}$$

Weiter muss wegen der Gleichgewichtsbedingung für die Momente auf das kleine Seilstück zwischen P_i und P_{i+1} in P_i gelten (Momentensumme null): $(F_V + \Delta F_V) \cdot \Delta x - (F_H + \Delta F_H) \cdot \Delta y = (q(x)\Delta x) \cdot \frac{\Delta x}{2}$.

$$\leadsto F_V \cdot \Delta x + \Delta F_V \cdot \Delta x = F_H \cdot \Delta y + \Delta F_H \cdot \Delta y + \frac{q(x) \cdot (\Delta x)^2}{2} \rightarrow F_V dx = F_H dy$$

Hier sind quadratisch vorkommende Differentiale im Vergleich zu den nur linear vorkommenden ohne weitere Untersuchung gleich null gesetzt worden. Damit haben wir die separierte Differentialgleichung $F_V dx = F_H dy$ und damit $F_V = F_H \cdot \frac{dy}{dx}$ erhalten. Daraus ergibt sich durch ableiten:

$\frac{dF_V}{dx} = \frac{dF_H}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + F_H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = F_H \cdot y''(x)$, denn ΔF_H wurde ja als gleich null erkannt, womit $\frac{dF_H}{dx} = 0$ gelten muss. Damit hat man wegen $\frac{dF_V}{dx} = q(x)$ für die Seillinie die Differentialgleichung:

$$q(x) = F_H \cdot y''(x) \Rightarrow y''(x) = \frac{q(x)}{F_H}$$

Dabei war nach Voraussetzung $q(l) = \text{const.}$ Ebenso ist $F_H = \text{const.}$ Gehen wir hier unter der **Annahme** einer **schwachen Biegung** von der Approximation $q(x) \approx q(l) = \text{const.}$ aus, so haben wir zwar einen Fehler in Kauf genommen. Damit vereinfacht sich aber die Differentialgleichung sehr und wir erhalten:

$$y''(x) = \text{const.} = \frac{q}{F_H} \Rightarrow y(x) = x^2 \cdot \frac{q}{F_H} + C_1 \cdot x + C_2 = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3$$

Somit haben wir tatsächlich unter der fehlerbehafteten Annahme $q(x) \approx q(l)$ eine **Parabel** erhalten:

$$y(x) = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3$$

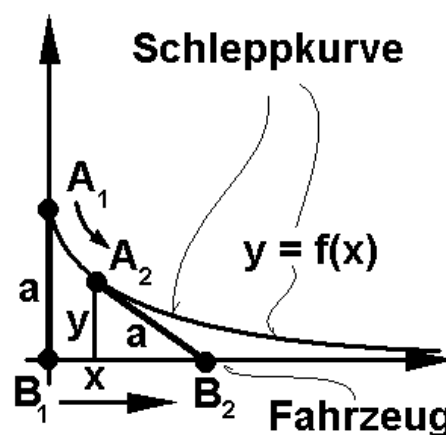
Dabei hängen C_1 , C_2 und C_3 von den zu wählenden Randbedingungen sowie den Seilbedingungen ab.

9.1.3 Eine Schleppkurve

Das nebenstehende Bild zeigt die Situation, welche wir behandeln wollen.

Ein Fahrzeug bewegt sich von B_1 nach B_2 . Hinten am Fahrzeug ist ein Baumstamm angehängt, welcher am Anhängepunkt angehoben ist und nur mit dem hintesten Ende mit dem Kontaktpunkt K bei A_1 den Boden berührt. Wenn das Fahrzeug bei B_2 ankommt, ist der Berührungspunkt K nach A_2 gewandert. K beschreibt eine Schleppkurve. Man suche dafür die Kurvengleichung.

Modellierung:



Wir lesen aus der Skizze ab: $(x_{B_2} - x)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{y}{x_{B_2} - x} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

$\leadsto \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ ist eine separable Differentialgleichung: $-dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1} dy$,

$-\int dx = \int \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1} dy \Rightarrow -x = \int \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1} dy + C$. Da $\frac{a}{y} \geq 1$ ist, können wir substituieren:

$$\frac{a}{y} = \cosh(t) \Rightarrow y = \frac{a}{\cosh(t)} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} \Rightarrow dy = -\frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} dt$$

$$\Rightarrow -x = \int \sqrt{(\cosh(t))^2 - 1} \cdot (-1) \cdot \frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} dt + C = - \int \sinh(t) \frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} dt + C = - \int \frac{a \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} dt + C$$

$$\Rightarrow x = a \int \tanh^2(t) dt + C = a(t - \tanh(t)) + C$$

Weiter folgt für $t = 0$ aus $\frac{a}{y} = \cosh(t) = \cosh(0) = 1 \Rightarrow y = a$ ($\Leftrightarrow x = 0$, siehe Skizze oben).

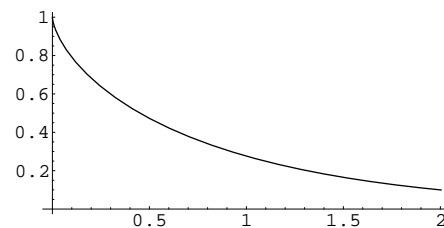
Das ergibt wiederum für $t = 0$ resp. $x = 0$:

$$x = a(t - \tanh(t)) + C \Rightarrow 0 = a(0 - \tanh(0)) + C = a \cdot 0 + C = C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x = x(t) = a(t - \tanh(t)).$$

Andererseits gilt: $\frac{a}{y} = \cosh(t) \Rightarrow y = y(t) = \frac{a}{\cosh(t)}$. Das ergibt:

$$\text{Schleppkurve: } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t - \tanh(t)) \\ \frac{a}{\cosh(t)} \end{pmatrix}.$$

Wir ermitteln noch die genaue Kurvenform für den Wert $a = 1$:



Dazu der Input:

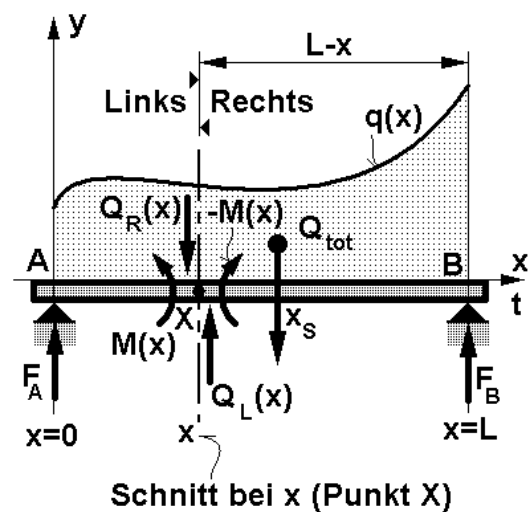
```
ParametricPlot[{t-Tanh[t],1/Cosh[t]},{t,0,3},AspectRatio->Automatic]
```

9.2 Balken und Biegelinie

9.2.1 Schnittkräfte und Momente am Balken

Wir betrachten einen gelenkig gelagerten Balken, wie er im nebenstehenden Bild dargestellt ist. Der Balken ist mit einer ortsabhängigen Streckenlast belastet, welche durch die Funktion $q(x)$ gegeben ist. Für gewisse Betrachtungen kann man diese Streckenlast durch die aufsummierte Gesamtlast $Q = \int_0^L q(x) dx$ ersetzen und davon ausgehen, dass Q im Schwerpunkt mit der x -Koordinate x_S angreift. Die Berechnung von x_S ist im Analysis-Skript behandelt worden. Wir aber wollen hier folgende Größen berechnen:

Einmal die **Auflagereaktionen** F_A und F_B . Dann aber auch die **Schnittkräfte** $Q(x)$ und **Momente** oder **Biegemomente** $M(x)$. Diese definiert man wie folgt:



Wir denken uns den Balken irgendwo an einer Stelle x vertikal (wie in der Skizze gezeigt) entzweiggeschnitten. Danach bringen wir an den neuen Balkenenden, also an den Schnittenstellen, Kräfte $Q(x)$ und $M(x)$ so an, dass wieder Gleichgewicht herrscht. Diese Schnittkräfte und Momente existieren dann je paarweise. Auf der linken Seite (siehe Bild oben) nennen wir sie $Q_L(x)$ und $M_L(x)$, auf der rechten Seite sind es $Q_R(x)$ und $M_R(x)$. Dabei ist $x \in [0, L]$.

Berechnungen

1. Gleichgewichtsbedingung in B : Die Summe der Momente muss null sein.

$$\leadsto F_A \cdot L - \int_0^L (L-x) \cdot q(x) dx = 0 \Rightarrow F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-x) \cdot q(x) dx.$$

Weil wir später bei der Betrachtung des Schnittes an der fixen Stelle x (Punkt X auf der Achse) die Variable x für die Bezeichnung eben dieser Stelle benötigen, müssen wir die Laufvariable bei der Integration zur Unterscheidung von x anders benennen. Daher wählen wir als Integrationsvariable neu t , was am Resultat ja nichts ändert.

$$\Rightarrow F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt$$

2. Gleichgewichtsbedingung in A : Ebenso muss auch hier die Summe der Momente null sein.

$$\leadsto -F_B \cdot L + \int_0^L t \cdot q(t) dt = 0 \Rightarrow F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt.$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt$$

3. Gleichgewichtsbedingung auf der linken Balkenseite zwischen A und X : Die Summe der Kräfte muss null sein.

$$\leadsto Q_L(x) - F_A + \int_0^x q(t) dt = 0 \Rightarrow Q_L(x) = F_A - \int_0^x q(t) dt.$$

$$\Rightarrow Q_L(x) = F_A - \int_0^x q(t) dt$$

Fügt man den Balken wieder zusammen, dann muss gelten: $Q_R(x) = F_B - \int_x^L q(t) dt$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q_L(x) + Q_R(x) &= F_A + F_B - \int_0^x q(t) dt - \int_x^L q(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt - \\ &\int_0^x q(t) dt - \int_x^L q(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^L L \cdot q(t) dt - \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt - \int_0^L q(t) dt = 0 \leadsto \text{☺} \end{aligned}$$

Damit ist also $Q_L(x) = -Q_R(x)$ richtig.

4. Gleichgewichtsbedingung auf der linken Balkenseite zwischen A und X: Die Summe der Momente muss null sein.

$$\begin{aligned} \leadsto M(x) - F_A \cdot x + \int_0^x (x-t) q(t) dt &= 0 \\ \Rightarrow M(x) = F_A \cdot x - \int_0^x (x-t) q(t) dt &= x \cdot \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt - \int_0^x (x-t) q(t) dt. \\ \Rightarrow M(x) = x \cdot \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt - \int_0^x (x-t) q(t) dt \end{aligned}$$

Wie bei den Kräften $Q_L(x) = -Q_R(x)$ gilt, gilt auch bei den Momenten $M(x) = M_L(x) = -M_R(x)$. Der Nachweis sei dem Leser überlassen.

5. Die Lage des Momentenextremums und der Nullstelle von $Q(x)$:

Aus $M(x) = F_A \cdot x - \int_0^x (x-t) q(t) dt$ folgt für ein etwaiges Extremum von $M(x)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} M'(x) = 0 &= F_A - \underbrace{(x-x)}_{=0} q(x) + \underbrace{(0-0)}_{=0} q(0) - \int_0^x \frac{d}{dx} ((x-t) q(t)) dt = F_A - \int_0^x q(t) dt = Q_L(x) \\ \Rightarrow (Q_L(x) = 0) &\Leftrightarrow M'(x) = 0 \end{aligned}$$

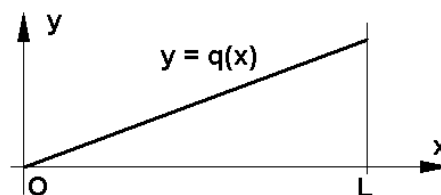
Konsequenz:

1. $F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt$
2. $F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt$
3. $Q_L(x) = F_A - \int_0^x q(t) dt, \quad Q_L(x) = -Q_R(x)$
4. $M(x) = x \cdot \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt - \int_0^x (x-t) q(t) dt, \quad M(x) = M_L(x) = -M_R(x)$
5. $Q_L(x) = 0 \Leftrightarrow M'(x) = 0$ (Extremum von $M(x)$!)

Ein Beispiel

Sei $q(x) = \frac{a}{L} \cdot x$, a = Steigung mal L (mit $a = 1$ und $L = 10$ für die Plots).

Dann können wir die Werte in den obigen Formeln berechnen:



$$1. \quad F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt = \frac{a}{L^2} \int_0^L (L \cdot t - t^2) dt = \frac{a}{L^2} \left(\frac{L}{2} \cdot t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^L = \frac{a \cdot L}{6}$$

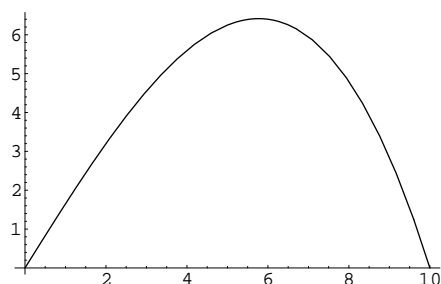
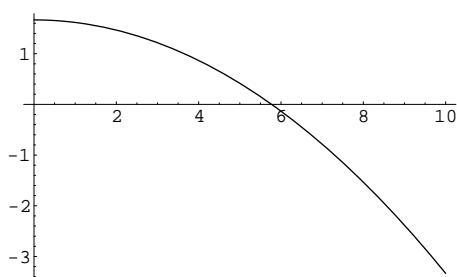
$$2. \quad F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt = \frac{a}{L^2} \int_0^L t^2 dt = \frac{a}{L^2} \left(\frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^L = \frac{a \cdot L}{3}$$

$$3. \quad Q_L(x) = F_A - \frac{a}{L} \int_0^x t dt = \frac{a \cdot L}{6} - \frac{a}{L} \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x = \frac{a}{2} \left(\frac{L}{3} - \frac{x^2}{L} \right)$$

$$4. \quad M(x) = F_A \cdot x - \frac{a}{L} \int_0^x (x-t) t dt = \frac{a \cdot L \cdot x}{6} - \frac{a}{L} \left(\frac{x t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x = \frac{a \cdot L \cdot x}{6} - \frac{a}{L} \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$$

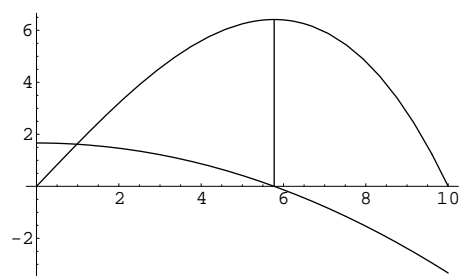
$$M(x) = \frac{a \cdot L \cdot x}{6} - \frac{a}{L} \frac{x^3}{6} = \frac{a}{6} \left(x L - \frac{x^3}{L} \right)$$

$$5. \quad Q_L(x) = 0 \Leftrightarrow M'(x) = 0 \leadsto 0 = M'(x) = \frac{a}{6} \left(L - \frac{x^2}{3L} \right) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{L^2}{3}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$$



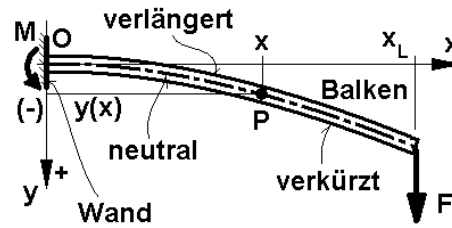
Das erste Bild oben zeigt den Verlauf von $Q(x)$, das zweite Bild zeigt denjenigen von $M(x)$.

Im dritten Bild rechts sieht man die Überlagerung der beiden Funktionen sowie die Übereinstimmung der Lage der Nullstelle von $Q(x)$ mit und derjenigen des Maximums von $M(x)$.



9.2.2 Die Biegelinie des Balkens

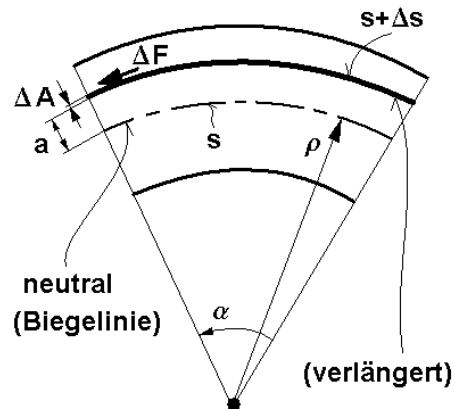
Bei der Biegung eines Balkens wird die der Biegerichtung näher gelegene Oberfläche verkürzt, jedoch die der Biegerichtung am weitesten entfernt gelegene Oberfläche wird verlängert. Zwischen beiden liegt die neutrale Fläche, auch „**neutrale Faser**“ oder „**Biegelinie**“ genannt.



In O hat man hier (Skizze) das **Einspannmoment** $M = -x_L \cdot F$. Und in P hat man das **Biegemoment** $M(x) = -(x_L) \cdot F$.

Dabei beachte man, dass hier (Skizze und Rechnungen) die Vorzeichen nach der Usanz der Baustatik gewählt worden sind, welche nicht der in der Mathematik sonst üblichen Konvention entspricht. Wenn man Konventionen beliebig in vernünftiger Weise ändert, so hat das keinen Einfluss auf die numerischen Resultate, solange man die Änderungen mit der notwendigen Strenge handhabt.

In der nebenstehenden Skizze ist ein Ausschnitt aus dem Balken stark übertrieben herausgezeichnet.



Wir **modellieren** nun die **Biegelinie**. Dazu leiten wir aus der nebenstehenden Skizze eine geometrische Relation ab, welche wir mit bekannten physikalischen Gesetzen und geometrischen Sachverhalten kombinieren. Es gilt:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{(s + \Delta s) - s}{s} = \frac{\alpha \cdot (\rho + a) - \alpha \cdot \rho}{\alpha \cdot \rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta s}{s} = \frac{a}{\rho}.$$

Weiter gilt nach dem Hookschen Gesetz mit der Spannung pro Flächeneinheit σ und der spezifischen Verlängerung ε (auch Dehnung):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \sigma = \frac{\Delta F}{\Delta A}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta s}{s}$$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ ist die „Spannung pro Dehnung“ resp. der Elastizitätsmodul.

(Üblicherweise rechnet man z.B. für Baustahl mit $E = 210'00 \text{ N/mm}^2$.)

$$\leadsto \frac{\Delta F}{\Delta A} = \sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta s}{s} = E \cdot \frac{a}{\rho} \Rightarrow \Delta F = \frac{E}{\rho} \cdot a \cdot \Delta A. \text{ Damit ist der Beitrag von } \Delta F \text{ zu } M(x):$$

$$\Delta M = -a \Delta F = -\frac{E}{\rho} \cdot a^2 \cdot \Delta A \Rightarrow M \approx \sum \Delta M \rightarrow M(x) = \int_A dM = -\frac{E}{\rho} \cdot \int_A a^2 \cdot dA$$

Hier ist $\int_A a^2 \cdot dA$ das faktorbefreite axiale Trägheitsmoment $I_y \leadsto M(x) = -\frac{E}{\rho} \cdot I_y$.

Der **eigentliche Modellierungsschritt zur Biegelinie** geschieht nun wie folgt: Den Radius ρ kann man gleichsetzen dem Krümmungsradius einer Funktion $y = y(x)$, welche die Biegelinie beschreibt:

$$\rho = \frac{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}{|y''(x)|} \approx \frac{(1 + 0)}{|y''(x)|} = \frac{1}{|y''(x)|} = \frac{1}{y''(x)}$$

Die hier verwendete Approximation ist zulässig für $|y'(x)| \ll 1$. Dabei ist bei dem oben skizzierten Balken wegen dem bekannten Krümmungsverlauf $y''(x) > 0$. (Die Biegung ist auf der Wandseite am grössten.) Damit haben wir:

$$M(x) = -E \cdot I_y \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{y''(x)}\right)} = -E \cdot I_y \cdot y''(x) \text{ und auch } M(x) = -(x_L - x) \cdot F. \text{ Daraus folgt:}$$

$$y''(x) = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (x_L - x)$$

Dies ist die **vereinfachte Differentialgleichung für die Biegelinie**.

(Vereinfacht deshalb, weil unter der Annahme $|y'(x)| \ll 1$ oben $y'(x) = 0$ gesetzt worden ist.)

Bemerkung: Man beachte in unserem Umfeld die folgenden Formeln:

$$\sigma = E \cdot \frac{a}{\rho}, \quad M(x) = -E \cdot \frac{I_y}{\rho} \Rightarrow \sigma_x(x, a) = E \cdot \frac{M(x)}{I_y} \cdot a$$

Die **Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie** ist geradezu trivial:

$$y'(x) = \int y''(x) dx = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (x_L \cdot x - \frac{x^2}{2} + C_1)$$

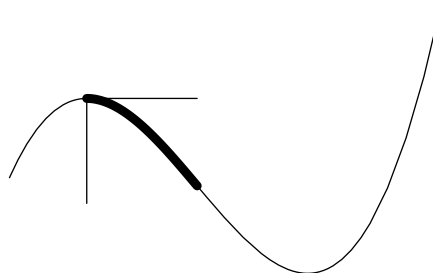
$$\Rightarrow y(x) = \int y'(x) dx = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (x_L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2)$$

Dabei ist in unserer Skizze oben das Anfangswertproblem $y(0) = 0$ gezeigt. Damit wird beim betrachteten Beispiel $C_2 = 0$. Da unser Balken horizontal eingespannt ist, stellen wir bei $x = 0$ eine horizontale Tangente fest. Damit können wir schliessen: $y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$. Damit ist unsere Biegelinie gegeben durch die Funktion:

$$y(x) = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (x_L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})$$

Es ist zu beachten, dass wir hier mit den Konventionen der Statik arbeiten und dass somit die y -Achse nach unten und nicht nach oben zeigt.

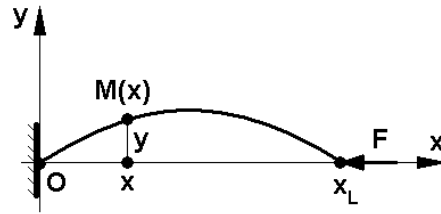
Die nebenstehende Skizze zeigt die Biegelinie (dick gezeichnet) eingebettet in den globalen Funktionsverlauf der Parabel 3. Ordnung.



9.2.3 Zur Knickung

Wir betrachten die nebenstehende Skizze eines Stabes, welcher links rechtwinklig an eine Wand anliegt, auf den aber rechts eine Kraft F wirkt.

Modellierung: Als Stabform unter der gezeigten Biegebeanspruchung erwarten wir eine Biegelinie. Unter dieser Voraussetzung muss gelten:



$$y''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I} = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot y(x) \Rightarrow y'' + \frac{F}{E \cdot I} \cdot y = 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Damit ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für dieses Knickproblem gefunden. Die charakteristische Gleichung dafür lautet:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \frac{F}{E \cdot I} &= 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \\ \Rightarrow y(x) &= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \cdot x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \cdot x\right) \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen folgt: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$. $y(x_L) = 0$ ist hier jetzt nur erfüllbar für $x_L = \pi \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Die Grundlösung erhalten wir für $n = 0$. Wird in dieser Gleichung F kleiner, so wird x_L grösser. Umgekehrt muss man F so gross machen, dass bei einem gegebenen x_L^* das x_L der Formel gleich klein wird, damit die Annahme der Biegelinie (Modellannahme) erfüllt werden kann. Aus der Gleichung $x_L = \pi \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$ kann man daher die kritische Kraft berechnen, bei welcher die Modellannahme gerade gültig ist. Bei einer grösseren Kraft kann der Stab die Biegung dann nicht mehr im „Gleichgewicht“ halten: Er bricht. Für das kritische F finden wir

$$F_{kritisch} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{x_L^2}$$

Für y ergibt sich:

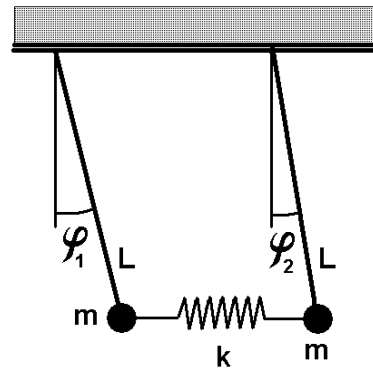
$$y(x) = C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \cdot x\right)$$

Der Koeffizient C_2 lässt sich aus unseren Angaben nicht ermitteln.

9.3 Gekoppelte Pendel

9.3.1 Problemmodellierung

Wir betrachten das nebenan gezeigte gekoppelte Pendel. Zwei durch eine Feder mit der Federkonstanten k verbundene Massen m sind an gleich langen Stangen aufgehängt, welche wir als gewichtslos annehmen. φ_1, φ_2 sind die Ausschlagswinkel. Diese nehmen wir als klein an, sodass $L * \sin(\varphi(t))$ den Ausschlag $y(t)$ approximiert und die Höhenänderung $h = L * \cos(\varphi(t))$ einer Masse etwa konstant ist. Nun stellen wir durch Betrachtung der durch die Massen verursachten Drehmomente eine Gleichungen auf:



Gekoppelte Pendel

Rücktreibende Kraft infolge Auslenkung $= -m g \sin(\varphi_2) \approx -m g \varphi_2$.

Rücktreibendes Moment infolge Auslenkung $= -L m g \sin(\varphi_2) \approx -L m g \varphi_2$.

Federkraft $= k L \sin(\varphi_2) \approx k L \varphi_2$.

Entgegengesetzt wirkendes Moment der Feder $\approx -L k L \varphi_2 = -k L^2 \varphi_2$.

Kompensation dieses Moments durch das andere Pendel: $k L^2 \varphi_1$.

Gleichgewicht mit „Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung“ $= (m L^2) \varphi_2''$.

Gleichung für das zweite Pendel: $(m L^2) \varphi_2'' = -L m g \varphi_2 - k L^2 \varphi_2 + k L^2 \varphi_1$.

Gleichung für das erste Pendel: $(m L^2) \varphi_1'' = -L m g \varphi_1 - k L^2 \varphi_1 + k L^2 \varphi_2$.

Anfangsbedingungen: $\varphi_1(0) = a, \varphi_1'(0) = 0, \varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = 0$

$$\varphi_2''(t) + \frac{g}{L} \varphi_2(t) + \frac{k}{m} \varphi_2(t) - \frac{k}{m} \varphi_1(t) = 0,$$

$$\varphi_1''(t) + \frac{g}{L} \varphi_1(t) + \frac{k}{m} \varphi_1(t) - \frac{k}{m} \varphi_2(t) = 0,$$

$$\varphi_1(0) = a, \varphi_1'(0) = 0, \varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(0) = 0$$

%

9.3.2 Beispiellösung mit *Mathematica*

Input:

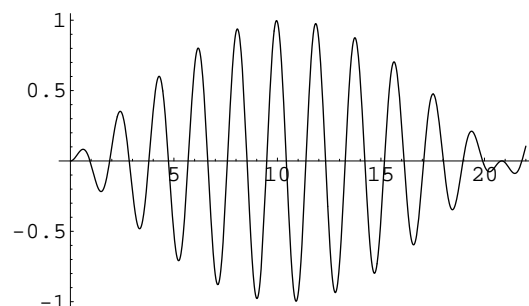
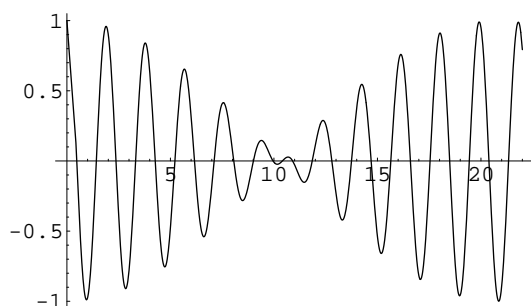
```
Remove["Global`*"];
links1 = LaplaceTransform[y2''[t] + g/L y2[t] - k/m y2[t] + k/m y1[t], t,s] /.
{LaplaceTransform[y1[t],t,s]->Y1[s],
LaplaceTransform[y2[t],t,s]->Y2[s], y1[0]->a, y1'[0]->0, y2[0]->0, y2'[0]->0};
links2 = LaplaceTransform[y1''[t] + g/L y1[t] - k/m y1[t] + k/m y2[t], t,s] /.
{LaplaceTransform[y1[t],t,s]->Y1[s],
LaplaceTransform[y2[t],t,s]->Y2[s], y1[0]->a, y1'[0]->0, y2[0]->0, y2'[0]->0};
solv=Solve[{links1 == 0, links2 == 0},{Y1[s],Y2[s]}] // Flatten;
U1[s]:=Y1[s]/. solv[[1]];
U2[s]:=Y2[s]/. solv[[2]];
u1[t_]:=InverseLaplaceTransform[U1[s],s,t]//Simplify; Print["u1(t) = ",u1[t]];
u2[t_]:=InverseLaplaceTransform[U2[s],s,t]//Simplify; Print["u2(t) = ",u2[t]];
u1P[t]:=u1[t]/. {g -> 10, m->1, L->1, k->1, a->1};
u2P[t]:=u2[t]/. {g -> 10, m->1, L->1, k->1, a->1};
Plot[Evaluate[u1P[t]],{t,0,25}];
Plot[Evaluate[u2P[t]],{t,0,25}];
```

Output:

$$u_1(t) = \frac{1}{4}a \left(2 \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{L}} t\right) + e^{-\frac{\sqrt{2kL-gm}}{\sqrt{L}\sqrt{m}} t} + e^{\frac{\sqrt{2kL-gm}}{\sqrt{L}\sqrt{m}} t} \right)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{4}a \left(2 \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{L}} t\right) - e^{-\frac{\sqrt{2kL-gm}}{\sqrt{L}\sqrt{m}} t} \left(1 + e^{\frac{2\sqrt{2kL-gm}}{\sqrt{L}\sqrt{m}} t} \right) \right)$$

$g -> 10$, $m -> 1$, $L -> 1$, $k -> 1$, $a -> 1$ ergibt die Plots:



9.4 Weitere Beispiele zur Modellierung

9.4.1 Ausblick auf weitere Beispiele und Themenbereiche

Weitere Beispiele zur hier betrachteten **mathematischen Modellierung** findet man gleich haufenweise in der einschlägigen Literatur, oft auch publiziert und frei zugänglich auf dem Internet. Eine inzwischen recht nützlich gewordene Adresse dort ist Wikipedia. Oder man „googelt“ die Sache. (Auf den allgemeinen, ausufernden Modellierungsbegriff wollen wir hier nicht eintreten.)

Einige Beispiele sind für den zugelassenen Benutzer passwortgeschützt gespeichert und abrufbar unter der Adresse

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/Linkp1.html>.

Hier noch ohne Anspruch auf Vollständigkeit ein Hinweis auf Themenbereiche aus der Technik und den Wissenschaften, deren Studium sich lohnt:

1. Hilfsmaterial: Diverse Trägheitsmomente von Rotationskörpern
2. Der Raketenflug
3. Der Fallschirmsprung
4. Kräfte am Schwungrad
5. Weitere Biegelinien
6. Weitere Knickprobleme
7. Die Ausflusszeiten von Flüssigkeiten, Fliessprobleme
8. Diverse Federschwingungen
9. Weitere Schwingungsprobleme, z.B. Schiffe, ein Turm u.s.w.
10. Wellenphänomene
11. Diffusionsprobleme
12. Die Temperaturverteilung in einem Stab
13. Wärmeabstrahlung
14. Allgemein das Thema „Modellbildung in der Physik“
15. Chemische Reaktionen
16. Wachstumsprobleme, speziell logistisches Wachstum
17. Populationsdynamik
18. Epidemiemodelle
19. Modelle aus der Pharmakologie
20. Das Räuber–Beute–Modelle, z.B. Lotka–Volterra–Gleichungen und allgemein **autonome Systeme von Differentialgleichungen, Stabilität und Gleichgewichtslösungen**
21. Wettermodelle
22. Modelle aus der Systemtheorie
23. Modelle aus den Wirtschaftswissenschaften
24. Modelle aus den Wirtschaftswissenschaften
25. Modelltheorie in Logik (und formaler Semantik)

Damit ist der Leser angehalten, sich über den bis anhin gebotenen Stoff hinaus eingehend mit der Fachliteratur zu beschäftigen. Diese Beschäftigung ist die eigentliche Tätigkeit während einem „Studium“! Ein kostenfreien Einstieg bietet;

http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Modell.

9.4.2 Bemerkung zu autonomen und dynamischen Systemen

Autonome Systeme sind in der Praxis sehr bedeutsam. Obwohl diese unseren gesetzten Rahmen sprengen, gehen wir der Information wegen noch kurz darauf ein.

Definition:

Unter einem autonomen System wollen wir hier ein Differentialgleichungssystem verstehen, in dem eine unabhängigen Variable (hier mit t bezeichnet) nicht explizit vorkommt. Jedoch kommen von t abhängige Variablen x, y, \dots vor sowie auch Ableitungen von diesen nach t .

Beispiel eines einfachen, allgemeinen, explizit gegebenen autonomen Systems 1. Ordnung:

$$\begin{cases} x_t' = f(x, y) \\ y_t' = g(x, y) \end{cases}$$

Statt x_t' und y_t' benutzt man vor allem in der Physik auch die Bezeichnungen \dot{x} und \dot{y} . f und g sind gegebene **vernünftige** Funktionen.

Die Lösung in unserem Beispiel kann man als Vektor $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ verstehen. Damit haben wir **Kurven** oder **Bahnen** über einem Intervall I für $t \in I$. Da wir hier in der Regel Anfangswertprobleme betrachten, können wir von $I = [0, \infty]$ ausgehen. Allgemeiner und trivialerweise gilt jedoch:

Mit einer Lösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ist auch $\begin{pmatrix} x(t-c) \\ y(t-c) \end{pmatrix}$ Lösung, wobei c eine Konstanten ist.

Wegen $\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{dy}{dx}$ gilt:

$$y_x' = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad |g(x, y)| + |f(x, y)| > 0$$

An den Punkten (x, y) , an denen y_x' definiert ist, hat man lokal eine eindeutige Lösung. An den Punkten (x_k, y_k) mit $|g(x_k, y_k)| + |f(x_k, y_k)| = 0$, d.h. für $g(x_k, y_k) = f(x_k, y_k) = 0$, wo also y_x' nicht definiert ist, können sich die Lösungskurven jedoch schneiden.

Definition:

Konstante Lösungen $\vec{v}(t) = \vec{a}$ heissen **Gleichgewichtslösungen** oder **stationäre Lösungen**.

Da für Gleichgewichtslösungen $\vec{v}(\vec{t})' = \vec{a}' = \vec{0}$ gilt, definieren wir:

Definition:

Punkte $P(x_k, y_k)$ mit $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ = stationäre Lösung heissen **Gleichgewichtspunkte** oder **stationäre Punkte**.

In stationären Punkten muss eine Lösung nicht mehr eindeutig sein. Es können sich dort mehrere Bahnkurven treffen.

Weiter definieren wir selbstverständlich:

Definition: Gleichgewichtspunktfreie Lösungen mit geschlossenen Bahnkurven nennen wir **periodische Lösungen**.

Geschlossene Bahnkurven können wegen der Definition des Funktionsbegriffs nicht in der Form $y = f(x)$ dargestellt werden. Eine vereinfachte Parametrisierung mit $x = t$ ist daher nicht allgemein möglich.

Wir betrachten nun konkret ein einfaches, jedoch instruktives **Beispiel**:

$$\begin{array}{lcl} x_t' & = & -2y \\ y_t' & = & +3x \end{array}$$

Daraus erhalten wir: $y_x' = -\frac{3x}{2y} \Rightarrow y dy = -\frac{3}{2} x dx \Rightarrow \int y dy = -\frac{3}{2} \int x dx + C$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = -\frac{3}{2 \cdot 2} x^2 + C \Rightarrow y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{C - \frac{3}{2} x^2} \text{ oder } \frac{y^2}{C \cdot 3} + \frac{x^2}{C \cdot 2} = 1 \rightsquigarrow \text{Ellipse!}$$

Im weiteren Rahmen sind autonome Systeme Spezialfälle von **dynamischen Systemen**. Solche wiederum sind mathematische Modelle von zeitabhängigen Prozessen. Beispiele dafür finden wir bei Pendelbewegungen, in Klimamodellen oder in der theoretischen Biologie z.B. bei Räuber–Beute–Modellen, bei Epidemien, allgemeiner bei Populationsdynamik oder auch bei chemischen Reaktionen.

Ein damit in Zusammenhang stehender Begriff ist noch der des Phasenraums (Zustandsraum). Dabei handelt es sich um einen mathematischen Raum, der von den zeitlich veränderlichen Variablen eines dynamischen Systems aufgespannt wird.

Bezüglich der heute sehr zahlreich vorhandenen Literatur über dynamische Systeme ist der Leser gebeten, sich selbst auf die Suche nach einem für ihn in seiner jeweiligen Situation zu seinen Voraussetzungen passenden geeigneten Werkes zu machen. Dasselbe gilt für die im Zusammenhang mit autonomen Systemen wichtige Frage der **Stabilität der Lösungen**.

Kapitel • Chapitre 10

Anhang 4 — Annexe 4

10.1 Hinweise – Indications

10.1.1 Häufig verwendete Abkürzungen – Abréviations fréquemment utilisées

Vor. • *Hyp.*

Beh. • *Thèse*

Bew. • *Pre.*

$\vec{x} \cdot \vec{y}$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

...

Voraussetzung • *Hypothèse*

Behauptung • *Thèse*

Beweis • *Preuve*

Skalarprodukt • *Produit scalaire*

...

10.1.2 Literatur — Littérature

Hier eine kleine Auswahl, die jeweils den grössten Teil des gesamten Stoffes abdeckt:

...

Leupold u.a., Mathematik 1, 2

Swobowsky, Analyse

Swobowsky, Calculus

Glyn James, Modern Engineering

Mathematics,

Glyn James, Advanced Modern

Engineering Mathematics ...

• *Voilà un choix limité qui concerne la plus grande partie de la matière:*

...

Leupold u.a., Mathematik 1, 2

Swobowsky, Analyse

Swobowsky, Calculus

Glyn James, Modern Engineering

Mathematics,

Glyn James, Advanced Modern

Engineering Mathematics ...

Ende • Fin