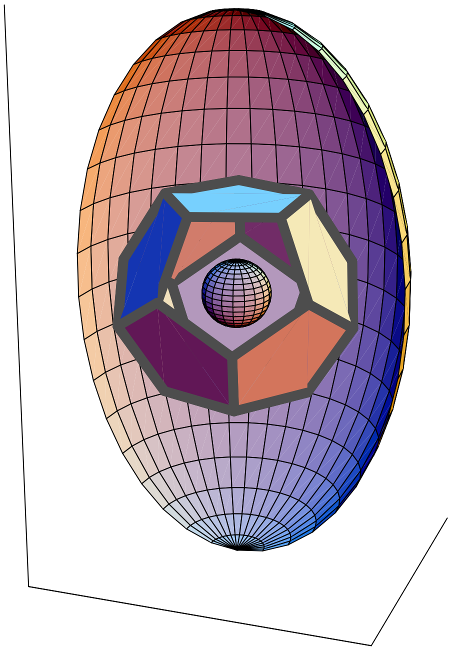
Mathematikkurs für Ingenieure
Vertiefung ◇ deutsch
Aussagenlogik



von

Rolf Wirz

Scripta bilingua

V.2.03 18. September 2007

WIR/93/99/2005/2007 logik_.tex

Teil eines Repetitoriums und Textbuchs zur Begleitung und Ergänzung des Unterrichts.
(Teil 2 aus Version 1.) Geplante Anzahl Teile in Version 2: Noch offen.
Produziert mit LaTeX/PCTeX/*Mathematica* auf NeXT/PC Win98.

Mit herzlichem Dank an Danielle für die Durchsicht des Textes.

Der Geist, der Schärfe, aber nicht Weite hat, bleibt an jedem Punkt stecken und kommt nicht von der Stelle ... Ein Geist, der nur Logik ist, gleicht einem Messer, das nichts ist als Klinge. Die Hand wird blutig beim Gebrauch. ...

Tagore

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Aussagenlogik oder Junktorenlogik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

Wir haben uns vorgenommen, die streng aufgebaute Mathematik so zu studieren, dass wir sie zusammenhängend verstehen und somit auch als Werkzeug fachmännisch verwenden können. Dem reifen Studenten ist sicher im bisherigen Leben längst klar geworden, dass auf keinem Arbeitsgebiet etwas erreicht werden kann ohne gute Kenntnisse und Fertigkeiten in der Anwendung von Werkzeugen. Das ist hier nicht anders. Das wichtigste Werkzeug der Mathematik ist nun die *Logik* . Ohne Logik bleibt da ein Verständnis schwierig. Denn Mathematik gilt ja weithin auch als die Wissenschaft vom Beweisen, als Gebiet der sicheren, der bewiesenen Resultate und der exakten Formulierungen, die keine Missverständnisse mehr zulassen sollten. Und die Werkzeuge für das Beweisen oder das exakte Formulieren, das Definieren, für das Herleiten, ist die Logik. Vor allem eben die aus mathematischer Sicht noch sehr einfache 2–wertige Aussagenlogik. Mit dieser beginnen wir und schaffen uns so eine feste Grundlage für eine niveaugerechte Einarbeitung in weitere Gebiete: Erst in Mengenlehre, dann darauf aufbauend in das Gebiet der Relationen. Hier lässt sich dann befriedigend der sehr zentrale Begriff der mathematischen Abbildung und der mathematischen Funktion abstützen, auf den man dann weite Teile der nachfolgenden Mathematik aufbauen kann. Z.B. später in der Differential– und Integralrechnung macht man ja eigentlich nichts anderes, als Funktionen untersuchen. Mit Hilfe von Funktionen lassen sich in der Praxis viele Probleme elegant lösen. Auch andere Gebiete wie z.B. die Boolsche Algebra — oder dann speziell die Schaltalgebra — stützen sich direkt auf die Logik. Das Fundament „Logik“ muss stark sein, damit das darauf gebaute Gebäude hält. Versuchen wir also, die nötige Seriosität in die Sache zu legen. Und vergessen wir dabei nie den Ratschlag: „Nach einem Hammerschlag sitzt ein Nagel selten. Lass Dich nicht entmutigen; arbeite mit Beharrlichkeit und dem Gedanken, dass Deine Fähigkeiten sich mehr und mehr entwickeln.“ Doch vergessen wir dabei ob diesem strengen Stoff auch das Lachen nicht. Es bringt dem heiss gewordenen, vielleicht „dampfenden“, müden Kopf frische Energie und Kühle.

Im Herbst 1994/99 — Der Autor

Attention!

Oiseau artificiellement intelligent

Warnung vor dem künstlich
intelligenten Vogel

Kapitel 1

Vorkenntnisse: Aufgabe, Herkunft der 2–wertigen Aussagenlogik

1.1 Wozu bei uns Logik in der Mathematik?

In den unteren Schulen hauptsächlich technischer Richtung hört man heute öfters das Wort „Logik“, vielleicht im Zusammenhang mit elektrischen Schaltungen. Das ist jedoch eine sehr spezielle Sicht, die den Umfang des hier Angesprochenen kaum erahnen lässt. Was versteht man dann sonst unter „Logik“ in den exakten Wissenschaften, in der Mathematik?

Unter *Logik* fasst man heute einen Wissenschaftszweig zusammen, den viele Wissenschaften als Teil für sich reklamieren: So etwa Philosophie, Theologie, Sprachwissenschaften, Jurisprudenz, Mathematik. Es gibt somit nicht nur eine einzige Logik. Juristische Logik hat vielleicht nicht viel zu tun mit Kants „transzendentaler Logik“ , die in die Philosophie gehört. Und dies wiederum ist nicht zu verwechseln mit der mathematischen Logik, von der dieser Teil handeln soll.

Mathematische Logik ist *formale Logik*. Das bedeutet, dass das hauptsächliche Interesse nicht der Botschaft, nicht dem Inhalt, nicht dem intentionalen Inhalt einer sprachlichen Konstruktion gilt, sondern der Form. Vereinfacht gesagt: Das Interesse gilt mehr der grammatikalischen Konstruktionsart. Zudem können wir hier nur auf einen *sehr winzigen Teil* der mathematischen Logik eingehen: Auf 2–wertige Aussagenlogik, mit einem kleinen Ausblick auf das an Umfang unvergleichlich grössere Gebiet der mathematischen Prädikatenlogik. Alles andere muss ungesagt bleiben.

Man mag sich jetzt fragen, welche Aufgaben der formalen Logik der Mathematik dann zukommen. Drei Aufgabenkreise lassen sich sofort unterscheiden: Erstens ist Logik ein eigenständiges Gebiet mit ureigenen Fragestellungen, die ins Gebiet der Erkenntnistheorie gehören. Zweitens ist Logik aber auch sehr verwandt mit anderen mathematischen Gebieten, etwa der Verbandstheorie, somit der Boolschen Algebra — und darauf aufbauend der Schaltalgebra oder auch der Mengenlehre. Logik ist hier das Fundament. Drittens aber hat jede Wissenschaft ihre Sprache, so auch die Mathematik. Mathematik bedient sich zur Formulierung ihrer Sachverhalte und zum Aufbau ihrer Regeln der Sprache der Logik. Logik wird also hier als Sprache benützt.

Merken wir uns also:

Die Sprache der Mathematik ist die formale Logik.

1.2 Wie und wann hat sich die Logik entwickelt? – Wie alt ist sie?

Der Titel zeigt Fragen nach der Geschichte. Blättern wir in dieser kurz zurück. Erste Ansätze der später von Kant[1] so bezeichneten „formalen Logik“ finden sich bei Aristoteles[2]. Inspiriert durch Platon[3] hat sich dieser daran gemacht, über Wahrsein und Falschsein von Aussagen nachzudenken. Er hat erkannt, dass man unter Benutzung gewisser Operationsregeln aus als wahr betrachteten Axiomen neue Aussagen abgeleitet werden kann, die man wegen den Regeln wieder als wahr betrachten muss. Die hier auftauchenden einfachen Schlussregeln nennt man *Syllogismen.* Abgesehen von Ansätzen etwa bei Leibnitz[4], der vielleicht als erster eine künstliche Sprache zu benutzen versuchte, oder bei Lambert[5] schlief die formale mathematische Logik mehr oder weniger einen Dornröschenschlaf bis ins 19. Jahrhundert. Mit den Arbeiten von De Morgan[6] und Boole[7] begann dann die formale Logik aufzublühen. Und um die Wende zum 20. Jahrhundert stellen wir plötzlich eine eigentliche, fast explosionsartig ansteigende Forschungstätigkeit und Wissensvermehrung fest, vor allem verknüpft mit den Namen Schröder[8], Peano[9], Peirce[10], Frege[11], Whitehead[12], Russel[13], Hilbert[14] und später Ramsey[15], Turing[16], Gödel[17], Skolem[18], Tarski[19] und andere. Vor allem durch die von Gödel ab 1931 puplizierten Vollständigkeits– resp. Unvollständigkeitssätze erfolgte ein Durchbruch zu einer ganz anderen Weltanschauung. Analog zur Endlichkeit der materiellen Welt hat man auch Grenzen der Welt des exakten Denkens gefunden und weiss nun auch hier, wohin man nie gelangen kann.
Bei all dem vielen jetzt Gesagten ist wichtig mitzunehmen, dass die nun folgende formale Logik nicht eine uralte Sache ist, sondern eher ein Kind der neueren Zeit.

1.3 Zum Gegenstand

1.3.1 Was ist Logik?

In der philosophischen Logik befasste man sich früher mit den „Naturgesetzen“ der Vernunft, mit der Kunst des Denkens resp. des richtigen Denkens. In dieser Logik werden die Fragen behandelt, was denn die zwingend erscheinenden Regeln des vernünftigen Schliessens überhaupt sind, wieso diese Regeln so sind, was die Zusammenhänge zwischen Ursache und Wirkung sind. Die heutige philosophische Logik befasst sich eher mit denjenigen Schlüssen, die alleine aufgrund der (sprachlichen) Form zu wahren Aussagen führen, also mit symbolischer oder formaler Logik. Auch die mathematische Logik ist formale Logik. Sie handelt von Aussagen in einer „exakt“ gefassten Sprache *(Aussagenlogik)*, oder auch, etwas unscharf gesprochen, von unterteilbaren Aussagen *(Prädikatenlogik).* Dabei interessieren hauptsächlich Fragen wie:

[1] Kant: Deutscher Philosoph, 1724 – 1804
[2] Aristoteles: Schüler Platons, 384 – 322 v. Chr.
[3] Platon: griech. Philosoph 427 – 347 v. Chr.
[4] Leibnitz: Deutscher Mathematiker und Philosoph 1646 – 1716
[5] Lambert: Deutscher Mathematiker 1728 – 1777
[6] De Morgan: Englischer Mathematiker 1808 – 1871
[7] Boole: Englischer Mathematiker 1815 – 1864
[8] Schröder: Deutscher Mathematiker 1841 – 1902
[9] Peano: Italienischer Mathematiker 1858 – 1932
[10] Peirce: Amerikanischer Mathematiker 1839 – 1941
[11] Frege: Deutscher Mathematiker 1848 – 1925
[12] Whitehead: Englischer Mathematiker 1861 – 1947
[13] Russel: Englischer Mathematiker 1847 – 1970
[14] Hilbert: Deutscher Mathematiker 1862 – 1943
[15] Ramsey: Englischer Mathematiker 1904 – 1930
[16] Turing: Englischer Mathematiker 1912 – 1954
[17] Gödel: Österreichischer Mathematiker geb. 1906
[18] Skolem: Norwegischer Mathematiker 1887 – 1963
[19] Tarski: Polnischer Mathematiker, 20. Jhdt.

- Vollständigkeit einer formal gefassten Sprache, Beweisbarkeit: Sind alle wahren Aussagen auch in der Sprache herleitbar?
- Entscheidbarkeit eines Problems: Existiert ein Entscheidungsweg? Was für sprachliche Konstruktionen sind herleitbar?
- Definierbarkeit: Ist die Sprache genügend umfangreich oder lässt sich etwas, über das man „reden möchte" vielleicht gar nicht definieren?
- Sicherheit: Ist eine Menge von Regeln (ein Axiomensystem) — und daher die darauf aufgebaute Theorie — auch widerspruchsfrei?
- Machbarkeit: Wie ist die Theorie nun aufzubauen?
- Darstellbarkeitsproblem: Wie wenig braucht man an sprachlichen Werkzeugen, um etwas damit wiedergeben zu können?
- Sprachnievau: Wie kompliziert muss eine Sprache sein, um etwas Gewolltes ausdrücken zu können?
- Form: Wann hängt der Wahrheitsgehalt einer Aussage alleine von der Form ab und nicht vom Inhalt?
- Inhalt: Wie hängen Inhalt und Form zusammen?
- U.s.w.

1.3.2 Wie weit wir gehen

Und das alles muss man dann können? — Oh nein, das eben nicht. Wir werden hier die Sprache der Logik nur soweit entwickeln, als es für das Folgende und für die Allgemeinbildung von relevantem Wert ist. Das bedeutet, dass wir schwierigkeitsmässig das alte „Aristotelische Niveau" kaum verlassen werden. Wir werden nicht in die moderne mathematische Logik, in die sogenannte *Methodologie der exakten Wissenschaften* resp. in die *höheren Prädikatenlogiken* (oder *Stufenlogik*) vordringen. Da fehlen Zeit, Vorbildung und Notwendigkeit. Wir werden hier den Weg einer *nicht-strengen*, einer sogenannt *„naiven" Behandlung* verfolgen. Das wird genügen.

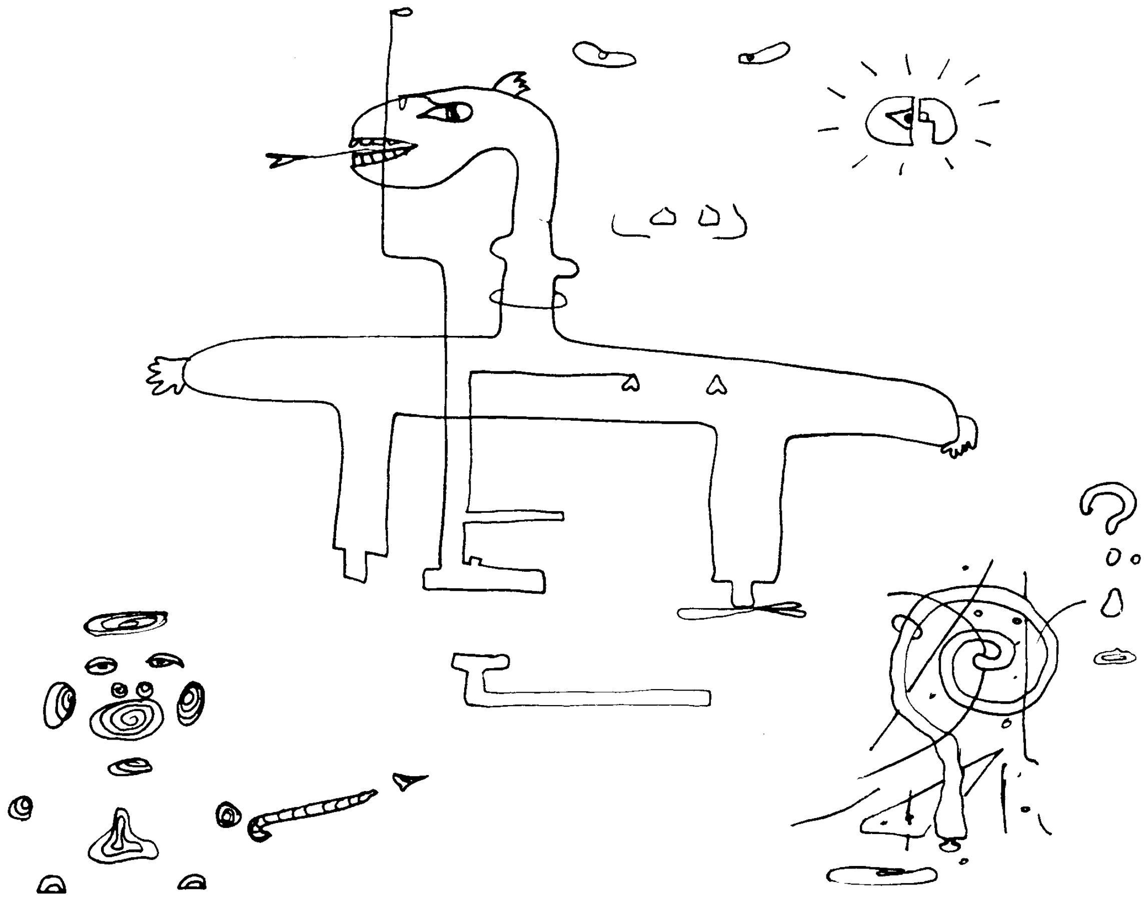
1.4 Welche Literatur ist empfehlenswert?

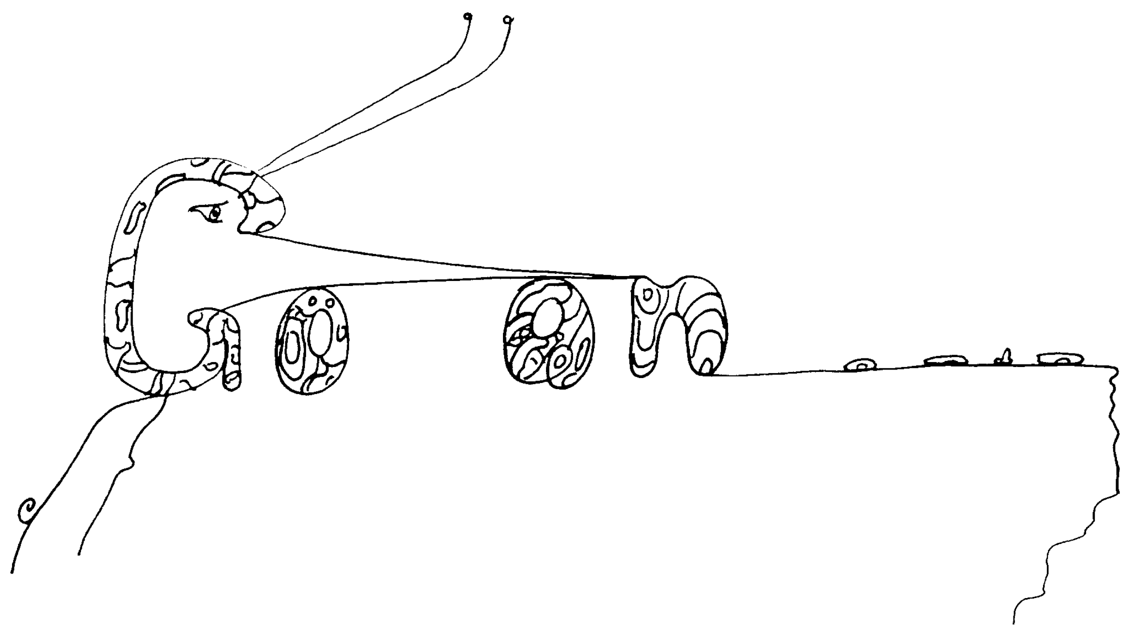
Die Literatur über formale Logik ist äusserst umfangreich. Doch die meisten Bücher sind nicht für Ingenieurstudenten geschrieben. Solche Bücher erscheinen dann vom Sprachniveau her dem Laien als unleserlich, unverständlich, unbrauchbar. In englischer und deutscher Sprache existiert eine ausgedehnte Literatur. Als niveaugerecht können folgende Werke gelten: Mendelson, SCHAUM (Bibl.: mendelson), Lipschutz, SCHAUM, Bibl.: lipschutz). Oder auch spezielle Bücher für obere Mittelschulen, herausgegeben von Schulbuchverlagen (Bibl.: jehle, deller). Leider ist es so, dass das Kapitel „Logik" in mathematischen Fachbüchern für Ingenieure meistens fehlt.
Hinweise für Fortgeschrittene: Weiterführende Literatur findet sich u.a. in Bibl.: asser, church, hermes, hilbert, shoen, tarski, vandalen.
Was die französischsprachige Literatur betrifft, sind die Studenten gebeten, beim Autor mündlich zu fragen.

1.5 Übungen

Übungen zum Teil 2 finden sich auch in den Übungsblättern, z.B. *DIYMU*. (Vgl. Bibl.: wirz [20]

[20] Übungsbuch *DIYMU*: „An Stelle einer Einleitung", Bibl.: wirz.





Kapitel 2

Junktorenlogik oder Aussagenlogik

2.1 Aussagen, Aussagenvariablen und Belegungen

2.1.1 Aussagen

Wir wollen uns fragen, was wir unter dem Begriff *Aussage* verstehen sollen. Damit wir über *Aussagen* reden können, müssen wir davon zuerst eine Vorstellung entwickeln. Da wir bis anhin noch keine einfachen Begriffe definiert haben, auf denen wir aufbauen könnten, lassen wir uns von folgender Idee leiten („Begriffserklärung" Pseudodefinition, noch nicht streng):

Begriffserklärung 1 (Aussage) *: Eine* **Aussage** *ist ein sprachliches Grundgebilde, das eine „Wahrheit" oder „Unwahrheit" mitteilt.*

Dabei haben wir vorher nicht definiert, was *„wahr"* oder „nicht wahr" (resp. *„falsch"*) bedeuten soll. Wir nehmen an, dass jeder selbst so vernünftig ist, dass er beurteilen kann, wann etwas Einsichtiges wahr ist oder nicht[1]. Was „vernünftig" ist, soll unter für vernünftig gehaltenen Menschen einfach durch ausdiskutieren demokratisch entschieden werden. Eine andere Möglichkeit, durch Vernunft zur „Wahrheit" zu gelangen, bleibt dem Menschen nicht. Weiter nehmen wir auch an, dass wir genügend wissen, was ein „sprachliches Gebilde" ist. Aussagen sind also hier *Grundgebilde* — ähnlich dem Punkt in der Geometrie, der ja auch nicht näher definiert werden kann. Das stört heute niemanden mehr ernsthaft.

Spezielle, von ihrer Natur her klare Aussagen finden wir in den *mathematischen Aussagen* oder (falls wichtig) *mathematischen Sätzen*, die man als wahr erachtet, sofern man die Voraussetzungen dazu akzeptiert. Einfache mathematische Aussagen sind z.B. in Gleichungen oder Ungleichungen mit Zahlen. *Aus diesem Grunde werden wir in den folgenden Beispielen hauptsächlich mathematische Aussagen verwenden.*

Beispiele:

$a :\equiv$ "$2+2=4$"	(wahre mathematische Aussage[1])
$b :\equiv$ "$2+2=5$"	(falsche mathematische Aussage)
$c :\equiv$ "$2+2+5$"	(keine Aussage)
$d :\equiv$ "Wohin gehst Du?"	(keine Aussage)
$e :\equiv$ "Komm bitte mit!"	(keine Aussage)
$f :\equiv$ "Die Birke ist ein Baum!"	(wahre Aussage)
$g :\equiv$ "1.1111 ist keine Zahl"	(falsche mathematische Aussage)

[1] Das Problem der Natur der Wahrheit als „Problem der Erkenntnis" gilt als ein Grundproblem der Philosophie überhaupt. Die Philosophie kennt im wesentlichen drei Grundprobleme: Das Problem des *Sein*, das Problem der *Erkenntnis* und das *Moralproblem*.

$h :\equiv$ "Bei geöffnetem Schalter fliesst Strom." (falsche Aussage)

Bemerkung 1 (zu den verwendeten Symbolen): Hier sind a, b, c, d und e Namen für die Aussagen. Das Zeichen „$:\equiv$" bedeutet „definiert als äquivalent". „$\equiv$" alleine meint äquivalent, dies um Verwechslungen mit dem Gleichheitszeichen in mathematischen Aussagen (z.B. in $2 + 2 = 4$) zu vermeiden.

Bemerkung 2 (zur zweiwertigen Logik):
In der *zweiwertigen Logik* betrachtet man nur Aussagen, die entweder *wahr* oder *falsch* sind und *keine meitere Möglichkeit* für den Wahrheitsgehalt offen lassen. In der Sprache des täglichen Lebens stellt diese Situation aber eher eine Ausnahme dar, die man gerne in die Mathematik abschiebt. Z.B. ein Gegenstand ist nicht etwa „hell" oder „nicht hell" (womit man dann gelegentlich „dunkel" meint). Sondern er hat eine gewisse Helligkeit. Ebenso mit schwarz und weiss. Dazwischen liegen viele, viele Graustufen. Oder denken wir an das „liebe" Haustier Katze, die ab und zu sehr böse sein kann, wenn sie einen kratzt —. Auch der gute Haushund, der keineswegs Begeisterung erweckt, wenn er dann eben doch zubeisst... Das Gegenteil der Aussage „Der Hund ist *gut*" ist dann nicht etwa die Aussage „Der Hund ist *schlecht*". Ebenso auch nicht die Aussage „Der Hund ist *nicht gut*" (absolut gesehen). Eher trifft als Gegenteil die Aussage zu: „Der Hund ist *manchmal nicht gut*". Denn der Hund zeigt sich uns einmal als gut, ein andermal erfahren wir ihn als bösen Hund, ein weiteres Mal als gut und schlecht zugleich, und ein viertes Mal als weder gut noch schlecht noch sonst etwas, denn er ist seit Tagen nicht mehr nach Hause gekommen, ist einfach nicht da, nicht erfahrbar.
Die Begriffe „wahr" und „falsch" reichen hier nicht mehr aus. Es braucht differenzierte Zwischenstufen, die sich ähnlich den Farben nicht in eine eindimensionale Skala einordnen lassen müssen. So kommen wir zu einer *mehrwertigen Logik*. Nimmt man noch den Wahrheitswert *unbestimmt* dazu, so kommt man zur *dreiwertigen Logik*[2]. Der Satz „In zweihundert Jahren ist die Schweiz ein Königreich!" ist wohl nicht heute schon entscheidbar, bleibt also vorerst für uns absolut unbestimmt, da wir es noch nicht wissen. „Variabel" ist die Aussage aber nicht, denn wir können an der Realität er Zukunft nichts ändern oder ersetzen. Was wir ändern können ist nur unsere Vorstellung von der Zukunft. Auch wenn wir jetzt ein Orakel befragen: Was wirklich eintritt, wird erst eine spätere Generation mit absoluter Bestimmtheit wissen. Heute bleibt uns der Wahrheitswert unzugänglich — und wir können ihn vielleicht noch durch unser Handeln beeinflussen, doch nur in die später einmal feststehende Richtung. Denn es gibt nur eine Vergangenheit und auch nur eine Zukunft.
Ein anderes, vielleicht eindrücklicheres Beispiel: Auf einem Kreuzfahrtschiff mit hundert wohlbetuchten Passagieren bedroht ein plötzlich aufgetauchter, sichtlich verarmter, verlumpter, hungernder „blinder" Passagier eine Gruppe von Leuten mit einer Waffe. Man sieht ihm an, dass er keinen Moment zögern wird, seinen Forderungen nach Essbarem Nachdruck zu verleihen — vielleicht bleibt ihm keine Wahl, so zu handeln. Der ebenfalls bewaffnete Kapitän entdeckt die Sache und schiesst sofort, der blinde Passagier fällt tot aufs Deck. — Ist das Vorgehen des Kapitäns nun gut oder nicht gut? — Hier kommen wir zur kaum je lösbaren Moralfrage. Jedes Urteil für oder gegen Deine Meinung kann schnell als Ideologie identifiziert werden. Mit nur „wahr" oder „falsch" kommt man hier nicht weiter. Ähnliche Fragen tauchen auf bei Nationalhelden, die die eigenen Idole — oder auch die verhassten Idole der Feinde sein können, bei Märtyrern, bei Geliebten, bei Vorbildern und so fort. Zu allgemein gestellte Fragen lassen keine zu spezielle Antwort zu. Mehrwertige Logik werden wir hier aber nicht weiter behandeln.
Was die Aussagen betrifft, so sei erwähnt, dass wir unser Interesse hier hauptsächlich auf *mathematische Aussagen* richten wollen. Andere Aussagen wie *„Der Strom fliesst, da der Schalter geschlossen ist."* spielen später in der *Schaltalgebra* (spezielle Boolsche Algebra) eine Rolle.

2.1.2 Aussagenvariablen

Beispiel: Wir betrachten die Gleichung $''x = y''$. Setzt man für die Variablen x die Zahl 1 und für y auch 1, so geht die Gleichung über in die Aussage $a :\equiv'' 1 = 1''$. Diese Aussage akzeptieren wir natürlich als wahr. Setzen wir hingegen $x = 2$ und $y = 3$, so geht die Gleichung über in die Aussage $b :\equiv'' 2 = 3''$.

[1] Sofern einer die Arithmetik mit Zahlen akzeptiert.
[2] Z.B. Logik von Lukasiewicz und Post sowie intuitionistische Logik.

Diese Aussage bedeutet für unser Sprachverständnis eine Zahlengleichung, die falsch ist. Der Gleichung $A :\equiv'' \ x = y''$ jedoch kommt weder der Wahrheitsgehalt *falsch noch wahr* zu. Aus A kann durch einsetzen von Werten für x und y eine Aussage werden, doch A selbst ist vorläufig eine *neutrale Stelle*, ein *Stellvertreter* oder *Platzhalter* für eine Aussage, so etwa wie bei einem Computer ein Speicherplatz, der ein Zeichen aufnehmen kann, selbst aber noch kein Zeichen, sondern eben nur ein Leerplatz ist. Daher legen wir fest:

Begriffserklärung 2 (Aussagenvariable) *: Ein orthographisches Zeichen, das nach Ersetzung durch ein sprachliches Gebilde in eine Aussage übergeht, nennen wir* **Aussagenvariable***.*

Anmerkung:

Symbole 1 (für Aussagen und Aussagenvariablen) *: Um jederzeit die Unterscheidung zwischen Aussagen und Aussagenvariablen zu gewährleisten, verwenden wir für Aussagen* **Kleinbuchstaben** *(z.B. $a, b, c \ldots$) und für Aussagenvariablen* **Grossbuchstaben** *(z.B. $A, B, C \ldots$).*

Z.B. kann so dann für die Variable A (oder den Leerplatz A) eine bestimmte Aussage a gesetzt werden, welche wahr oder falsch sein kann. In der *zweiwertigen Logik* hat man hier immer zwei Möglichkeiten. A kann in eine *wahre* oder eine *falsche* Aussage übergehen.

Schematisch:

Tabelle 3. 0: Aussagenvariable, Aussagen und Wahrheitswerte

Aussagenvariable A	zugeordneter Wahrheitswert	
	Variante 1	Variante 2
Ersetzt durch *wahre* Aussage a_1	w	1
Ersetzt durch *falsche* Aussage a_2	f	0

Begriffserklärung 3 (Wahrheitswerte) *: Die verwendeten Abkürzungen w, f resp.* 1, 0 *heissen* **Wahrheitswerte***. Sie stehen für „wahr“ oder „falsch“.*

Falls wir uns auf ein eindeutiges Verfahren zu Feststellung des Wahrheitswertes einer Aussage festlegen können (z.B. durch *interpersonale Verifikation*, Erzielung eines Konsenses in einem Gremium vernünftiger Menschen mit gleicher Sprache), so können wir definieren:

Definition 2.1 (Wahrheitswerte einer Aussage a) *: Der* **Wahrheitsert** *$t(a)$ einer Aussage a ist festgelegt durch*

$$t(a) := \begin{cases} 0 & , \quad falls\ a\ als\ falsch\ erkannt\ wird. \\ 1 & , \quad falls\ a\ als\ wahr\ erkannt\ wird. \end{cases}$$

(*Anmerkung:* „*t*“ in $t(A)$ bedeutet *„truth“*[3] . $t(a)$ ist auch eine *Funktion* auf dem Definitionsbereich „Menge der Aussagen“ in den Wertebereich $\{0, 1\}$.)

In der Aussagenlogik interessiert man sich nicht primär für den *Inhalt* einer Aussage, sondern nur für ihre *Form.* Bezüglich der Form haben wir hier bisher nur *nicht weiter zerlegbare Aussagen,* d.h. *elementare* oder *atomare* Aussagen getroffen. Im Gegensatz dazu gibt es auch *zusammengesetzte* Aussagen. Elementare Aussagen haben keine besondere Form. Sie lassen sich nicht sinnvoll in Teilaussagen zerlegen, die wieder entweder wahr oder falsch sind. Die einzige Eigenschaft, die sie noch haben, ist die, dass sie selbst jeweils entweder wahr oder falsch sind. Ein Beispiel dazu: „Die Tanne ist ein Baum.“ Diese Aussage lässt sich nicht weiter in Teilaussagen zerlegen. Für das weitere Studium der Sache dürfen wir daher vom Inhalt einer Aussage abstrahieren und nur noch ihren Wahrheitswert betrachten, denn das genügt hier.

[3] engl. „Wahrheit“

Definition 2.2 (Elementaraussage) *:* **Elementaraussagen** *sind Aussagen, die sich nicht weiter in Teilaussagen zerlegen lassen.*

Wie wir jetzt wissen, lassen sich Aussagenvariablen ersetzen durch Aussagen, denen jeweils entweder der Wahrheitswert 1 oder 0 zukommt. Einer Aussage ist also ein Wahrheitswert *zugeordnet*. Betrachten wir an Stelle einer Aussagenvariablen (Leerstelle) nun nicht bloss eine Aussage a, sondern auch deren zugeordneter Wahrheitswert $t(a)$, so ordnen wir in diesem Fall auch der Aussagenvariablen durch die Aussage einen Wahrheitswert zu. Wir sagen, wir *besetzen* oder *belegen* die Aussagenvariable mit einem Wahrheitswert.

Definition 2.3 (Belegung) *: Die Zuordnung eines Wahrheitswerts* 0 *oder* 1 *zu einer Aussagenvariablen* A *heisst „***Belegung** *von* A *mit Wahrheitswerten" .*

Durch eine Belegung einer Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten wird daher die Variable stillschweigend durch eine Aussage etwa der Form „diese Stelle ist mit 0 besetzt"oder „die Stelle ist mit 1 besetzt"ersetzt. Die Aussagenvariable geht so in eine *abstrakte Aussage* über, denn abgesehen vom eingesetzten Wahrheitswert, spielen für unsere Zwecke Inhalt und Form der neuen Aussage keine Rolle. Auch Inhalt und Form der ursprünglichen Aussagen a_i brauchen nicht bekannt zu sein. In der *formalen Logik* interessieren wir uns daher einzig für die Belegungen und die Verknüpfungen der Aussagenvariablen (vgl. nächstes Kapitel), aber nicht für die Inhalte der Aussagen.

Tabelle 3. 1: Belegung einer Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten

Aussagenvariable	A	Bedeutung	Zugeordnete Aussage
Belegungen	1	Wert „wahr"	Aussage a_1, mit beliebigem wahren Inhalt
	0	Wert „falsch"	Aussage a_2, mit beliebigem falschen Inhalt

Kapitel 3

Aussagen über Aussagen: Zusammengesetzte Aussagen

3.1 Die Negation

Zur Gewinnung der Negation einer Aussage treffen wir die nachstehende Vereinbarung. Einer Aussage a_1 sei eine neue Aussage a_2 wie folgt zugeordnet: a_1 ist genau dann wahr wenn a_2 falsch ist.

Beispiele:	(1) $a_1 :\equiv$ "Es regnet."	(3) $b_1 :\equiv$ "$3 = 5$"
	(2) $a_2 :\equiv$ "Es regnet nicht."	(4) $b_2 :\equiv$ "$3 \neq 5$"

Die Aussagen a_2 (bzw. b_2) empfinden wir mit unserem natürlichen Sprachgefühl als das *Gegenteil* von a_1 (bzw. b_1). Daher wird niemand opponieren, wenn wir definieren:

Definition 3.1 (Negation, „¬") *: Eine der Aussage a_1 zugeordnete Aussage a_2, die genau dann wahr ist, wenn a_1 falsch ist, heisst „***Negation** $\neg a_1$*" von a_1.*

Diese Definition lässt sich auch mittels einer Tabelle mit *Aussagenvariablen* wiedergeben, in der eine vollständige Sammlung aller möglichen Belegungen mit Wahrheitswerten aufgeführt ist, wobei jede Belegung einen Aussagentyp repräsentiert. Eine solche Tabelle nennen wir *Wahrheitstabelle.* Da wir den Begriff *Wahrheitstabelle* hiermit zwar zweckdienlich und verständlich, aber eben nur exemplarisch und nicht vollständig lückenlos umschrieben haben, können wir hier nicht von einer exakten *mathematischen Definition* des Begriffes sprechen. Für unsere Zwecke wird aber die so gegebene Begriffserklärung ausreichen.

Begriffserklärung 4 (Wahrheitstabelle) *: Eine Tabelle aller möglichen Belegungen von Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten nennen wir* **Wahrheitstabelle***.*

Die Negation lässt sich demnach durch folgende Tabelle definieren:

Tabelle 3.0: Wahrheitstabelle zur Definition von ¬

A	$\neg A$
0	1
1	0

Die Aussage $\neg A$ ist jetzt formal zusammengesetzt, nämlich aus den Zeichen ¬ und A. Das Zeichen ¬ bezeichnen wir als *logisches Zeichen.*

Achtung: Die Aussage $a_3 :\equiv$ "Die Sonne scheint" ist nicht etwa die Negation von $a_1 :\equiv$ "Es regnet". Es kann ja regnen, wenn auch die Sonne scheint. Man denke an die wunderbaren Regenbogen. Also aufgepasst! Hüte Dich davor, innere Beziehungen in Aussagen hineinzuinterpretieren, in die sie nicht hineingehören.

Bemerkung: In der Logik verwenden wir das Zeichen $\neg$ (z.B. bei $\neg A$, nicht aber bei $\bar{A}$), um Verwechslungen mit der Mengenlehre (Komplementmenge), der Schaltalgebra, oder mit komplexen Zahlen (konjugiert–komplexe Zahl) vorzubeugen. Denn in mathematischen Definitionen verwenden wir die logischen Symbole als schon bekannte Sprachelemente (Metasprache), um mathematische Symbole zu definieren. Diese Schreibweise hat technisch den Vorteil, dass sie *eindimensional* ist. Sie könnte von einer Maschine ab einer Spur eingelesen werden. Das spielt auch beim Studium der Beziehungen zwischen Logik und Maschinen eine grosse Rolle.

3.2 Die Konjunktion („und“-Verknüpfung)

Jetzt und später in den folgenden Unterkapiteln wollen wir logische Verknüpfungen betrachten, die aus einem logischen Zeichen (hier auch *Junktor* genannt) und zwei Aussagenvariablen bestehen. Um diese Verknüpfungen vernünftig definieren zu können, folgen wir einerseits dem Sprachgefühl. Andererseits wollen wir aber nicht den Verdacht aufkommen lassen, hier sei absolute Willkür am Werk. Dann würden wir ja die Mathematik auf Zufallsprodukte stützen. Um die Definitionen akzeptabel zu machen, vertraut man „vernünftigen Empfindungen“ bei der Abwicklung eines *philosophischen Dialogs* über das Thema, das gerade in Frage steht. Ein Befürworter *(Proponent)* und ein Gegner *(Opponent)* sollen die Sache ausmachen und alle Möglichkeiten „vernünftig“ ausdiskutieren. Falls ein Vorschlag suspekt erscheint, frägt man sich, ob das Gegenteil (das Komplement) etwa besser wäre. Kommt es dann so heraus, dass der Gegner einem nicht vom Gegenteil eines gemachten Vorschlags zu überzeugen vermag, so nimmt man den Vorschlag an. Denn im Rahmen der 2-wertigen Logik gibt es ja ausser *wahr* und *falsch* keine dritte Möglichkeit.
So gesehen lässt sich gegen die folgende Zuordnung der Wahrheitswerte zur Gesamtaussage wohl wenig einwenden:
Beispiele aus dem gewöhnlichen Zahlenrechnen:

$a :\equiv$ "$2 + 2 = 4$" und "$3 \cdot 3 = 9$" (wahre Aussage)
$b :\equiv$ "$2 + 2 = 5$" und "$3 \cdot 3 = 9$" (falsche Aussage)
$c :\equiv$ "$2 + 2 = 4$" und "$3 \cdot 3 = 6$" (falsche Aussage)
$d :\equiv$ "$2 + 2 = 5$" und "$3 \cdot 3 = 6$" (falsche Aussage)

Hier erzeugen wir also mittels „und“ aus zwei Teilaussagen eine neue Gesamtaussage, die wieder entweder wahr oder falsch ist. (Z.B. aus der Aussage $a_1 :\equiv$ "$2 + 2 = 4$" und der Aussage $a_2 :\equiv$ "$3 \cdot 3 = 9$" entsteht die neue Aussage a.) Symbolisch geschrieben haben wir folgende Zuordnung:

$$(a_1, a_2) \mapsto a :\equiv a_1 \wedge a_2.$$

„$\wedge$ “ ist also das Zeichen für „und “. Daher können wir „$\wedge$“ durch die folgende Wahrheitstabelle definieren:

Definition 3.2 (Konjunktion, „$\wedge$“) *:*

Tabelle 3.1: Definition der Konjunktion

Var	A	B	$A \wedge B$
$t(Var)$	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

Die Aussage $a :\equiv a_1 \wedge a_2$ ist somit nur dann wahr, wenn a_1 sowohl als auch a_2 wahr sind. Sonst ist a falsch!

Bemerkung: In der *Schaltalgebra* verwendet man für „und“ häufig den Malpunkt (z.B. $a_1 \cdot a_2$ statt $a_1 \wedge a_2$). Das kann aber in der Logik zu *Verwirrungen* führen. **Beispiel:**

$$(a_1 \wedge a_2) :\equiv (\underbrace{3 \cdot 3 = 9}_{a_1} \wedge \underbrace{6 + 5 = 11}_{a_2}) \not\equiv (3 \cdot 3 = \underbrace{9 \cdot 6 + 5}_{59} = 11)$$

3.3 Die Adjunktion, Disjunktion („oder“-Verknüpfung)

Wir studieren wieder einige Aussagen aus dem Bereiche der Mathematik. Diese haben nicht den Nachteil von Aussagen der Umgangssprache, welche aus Gewohnheitsgründen nur schwerlich in der blossen abstrakten Reduktion auf ihre Wahrheitswerte betrachtet werden können. Wer bringt es schon leicht fertig, eine Aussage wie ”Napoleon ist gestorben oder Peter hat einen langen Bart” unabhängig von ihrem spezifischen Inhalt zu betrachten? Manch einer frägt sich doch sofort, was denn Napoleon mit Peters Bart zu tun hat — und schüttelt den Kopf. Doch auf eine etwaige inhaltliche Beziehung der Teilaussagen kommt es ja eben jetzt gar nicht an! Gerade davon wollen wir abstrahieren.

Beispiele: Die Wahrheitswerte folgender zusammengesetzter Gesamtaussagen lassen sich sofort wie angegeben akzeptieren. Ansonst müsste man ja das Gegenteil akzeptieren können, was weit weniger dem natürlichen Empfinden entspricht. Ein Drittes ist ausgeschlossen, denn wir behandeln *2-wertige Logik:*

$a :\equiv$ “$2 + 2 = 4$” oder “$3 \cdot 3 = 9$”	(wahre Aussage)
$b :\equiv$ “$2 + 2 = 5$” oder “$3 \cdot 3 = 9$”	(wahre Aussage)
$c :\equiv$ “$2 + 2 = 4$” oder “$3 \cdot 3 = 6$”	(wahre Aussage)
$d :\equiv$ “$2 + 2 = 5$” oder “$3 \cdot 3 = 6$”	(falsche Aussage)

Eine durch *„oder“* verknüpfte Gesamtaussage können wir als *wahr* akzeptieren, soblad eine Teilaussage als wahr erkannt ist. Mit „oder“ meinen wir, dass nur eines wahr zu sein braucht.
Symbolisch schreiben wir:

$$(a_1,\, a_2) \mapsto a :\equiv a_1 \vee a_2.$$

Das Zeichen „$\vee$“, das jetzt für „oder“ steht, symbolisiert den Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes „vel“[1]. „$\wedge$“ ist das auf den Kopf gestellte „$\vee$“. Die folgende Definition können wir jetzt als sinnvoll akzeptieren:

Definition 3.3 (Adjunktion, „$\vee$“) *:*

Tabelle 3.2: Definition der Adjunktion

Var	A	B	$A \vee B$
$t(Var)$	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1

Bemerkung zur Aufstellung der Tabelle: Es erscheint als praktisch, die Reihenfolge der Wahrheitswerte von A und B so zu wählen, dass diese gerade eine *Abzählung der Dualzahlen* darstellen. Die Zeilen unter den Eingangsvariablen kann man dann als Dualzahlen lesen. Bei vier Eingangsvariablen hätte man zuerst 0000, dann 0001, dann 0010, dann 0011, dann 0100, dann 0101 etc. .

[1] lat. „vel“ bedeutet „oder“.

3.4 Die Exklusion („entweder – oder"–Verknüpfung)

Mit „Exklusion" meinen wir das *ausschliessende oder*. Wenn man hört: „Die Erde ist entweder ein Planet — oder sie ist kein Planet", so hat im allgemeinen niemand etwas dagegen einzuwenden. Doch auch hier wieder aufgepasst! Lassen wir uns nicht vom Inhalt verführen. Wir wollen ja nicht Teilaussagen betrachten, bei denen neben dem Wahrheitswert noch die inhaltliche Struktur eine Rolle spielt.

Eine Aussage $a :\equiv a_1$ „entweder – oder " a_2 schreiben wir symbolisch wie folgt:

$$(a_1,\, a_2) \mapsto a :\equiv a_1 \dot{\vee} a_2.$$

Wir definieren nun das „entweder – oder" durch die unten aufgeführte Wahrheitstabelle. Dabei beachte man, dass im Zweifelsfalle der Wahrheitswert zu akzeptieren ist, falls niemand etwas dagegen einwenden kann:

Definition 3.4 (Exklusion, „$\dot{\vee}$") *:*

Tabelle 3.3: Definition der Exklusion

Var	A	B	$A\dot{\vee}B$
$t(Var)$	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0

Diese Definition steht im Einklang mit dem üblichen logischen Denken. Dem kann schwerlich widersprochen werden.

3.5 Die Subjunktion unabhängiger Aussagen

Dieses Unterkapitel handelt von *wenn–dann–Aussagen*. „Wenn die Badewanne voll ist, so (d.h. dann) läuft das Badewannewasser über" ist ein umgangssprachliches Beispiel einer solchen Aussage. — Doch gerade solche umgangssprachliche Beispiele nützen uns vorerst in der mathematischen Logik nicht viel, da zwischen den einzelnen Satzteilen eine inhaltliche Beziehung besteht und nicht nur eine rein formale. (Das Badewannewasser erfordert die Badewanne.) Inhaltlich verknüpfte wenn–dann–Aussagen wollen wir hier vorerst *nicht* speziell betrachten.
Uns geht es mehr um die Zusammensetzung unabhängig alleine für sich bestehender Aussagen zu neuen Aussagen. Anders gesagt: Wir wollen neue Aussagen erzeugen, indem wir die schon vorhandenen Aussagen zu neuen Aussagen mittels logischer Zeichen verknüpfen. Und die logischen Zeichen leiten wir aus gammatikalischen Konjunktionen[2] ab. Im Beispiel hat das überlaufende Badewannewasser zwingend mit der Badewanne zu tun: Die Aussagen sind nicht inhaltlich unabhängig. Der Wahrheitswert der zweiten Aussage wird so durch den Inhalt der ersten Aussage wesentlich mitbestimmt. Andererseits mag es manch einem komisch zu Mute sein, wenn wir versuchen, durch „wenn–dann" unabhängige alltagssprachliche Aussagen zu verknüpfen. Beispiel: „Wenn (falls) der Mond Ohren hat, dann gelingt es meinem Onkel, 40 Meter hoch zu hüpfen". So eine Aussageverknüpfung wird jeder wohl rasch als *Unsinn* abtun, da sie vom alltäglichen Sprachgebrauch her als ungewohnt erscheint. Natürlich sind hier die einzelnen Aussagen unabhängig. Doch was soll das Gerede von „ob der Mond Ohren hat"? — Auf die physikalische Realität bezogen, handelt es sich hier um eine falsche Aussage. Doch immerhin um eine Aussage. Auf einer Kinderzeichnung kann das sogar vorhanden und somit wahr sein. — Wie soll man daher den Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage beurteilen, wenn man mit dem für uns unwesentlichen Inhalt schon enorme Mühe hat? Solche Konstruktionen sind ja in der Umgangssprache unüblich und ungewohnt. Vielfach erkennen wir daher in umgagssprachlichen Aussagen den zweiten Teil

[2]Konjunktion: Das ist eine der 10 Wortarten.

als Spezialisierung des ersten Teils, d.h. wir finden eine innere Abhängigkeit. Anders in der Welt der Märchen: „Schneewittchen ist alt geworden. Daher wurde es dann vom Wolf gefressen.“ Wie will man dagegen argumentieren?
Wie soll man aber mit voneinander unabhängigen mathematischen Aussagen umgehen? Eine Methode bietet der folgende Ansatz: Falls wir eine Aussage komisch finden, sie also nicht gleich akzeptieren oder verwerfen können, so fragen wir uns, ob denn die Aussage falsch, also das Gegenteil wahr sein muss. Einen dritten Wahrheitswert gibt es nicht in der zweiwertigen Logik. Falls man die Wahrheit des Gegenteils nicht stützen kann, d.h. sie verwerfen muss, so akzeptieren wir die Aussage.
Nehmen wir z.B. eine Gleichung. Hier handelt es sich um eine eigenständige Aussage, die wahr oder falsch sein kann. Solche Gleichungen sind inhaltlich nicht verknüpft, da keine für das Bestehen der anderen gebraucht wird. So erhalten wir mit Gleichungen als Teilaussagen:

$a :\equiv$ Wenn gilt “$2+2=4$”, dann gilt “$3\cdot 3=9$”.	(wahre Aussage)
$b :\equiv$ Wenn gilt “$2+2=5$”, dann gilt “$3\cdot 3=9$”	(wahre Aussage)
$c :\equiv$ Wenn gilt “$2+2=4$”, dann gilt “$3\cdot 3=6$”	(falsche Aussage)
$d :\equiv$ Wenn gilt “$2+2=5$”, dann gilt “$3\cdot 3=6$”	(wahre Aussage)

Man kann nichts dagegen einwenden, wenn jemand aus einer falschen Aussage etwas Wahres oder auch etwas Falsches folgert. Das kommt immer gut, denn der Fall, wo es schlecht kommen könnte, existiert gar nicht. Unter der Voraussetzung einer falschen Gleichung können wir eine wahre oder eine falsche Gleichung, d.h. irgend etwas folgern. Denn der Fall, in dem man die Voraussetzung antrifft und akzeptiert, tritt nie ein. Wir können daher hier auch nie eine falsche Folgerung durchführen. Daher müssen wir *wahr* akzeptieren.
Aus etwas Wahrem können wir natürlich etwas Wahres folgern. Doch aus etwas Wahrem dürfen wir nichts Falsches ableiten, das hiesse ja Fehler machen. Man soll doch in der Logik aus Wahrheiten nicht Unsinn gewinnen können.
Daher dürfen wir die „wenn–dann–Verknüpfung“, symbolisch gekennzeichnet durch das Zeichen „$\Rightarrow$“, wie folgt definieren:

Definition 3.5 (Subjunktion, „$\Rightarrow$“) *:*

Tabelle 3.4: Definition der Subjunktion

Var	A	B	$A \Rightarrow B$
$t(Var)$	0	0	1
	0	1	1
	1	0	0
	1	1	1

Bemerkung zu den Pfeilen: In der Mathematik verwenden wir noch andere Pfeilarten: Z.B mit $A \mapsto B$ meinen wir eine *Abbildung* von A nach B. Mit $x \to x_0$ drücken wir das „strebt gegen“ resp. „konvergiert gegen“ aus (beim Bilden von Grenzwerten) etc.. Statt $A \Rightarrow B$ schreiben wir auch $B \Leftarrow A$.

Sprechweisen: $A \Rightarrow B$ lesen wir als „falls A gilt, so gilt auch B“. Oder auch als „wenn A dann B“. Oder „wenn A so gilt auch B“ etc.. Die Ausdrücke *„Implikation“* , *„impliziert“* , *„ist notwendig“* oder *„ist hinreichend“* findet man meist nur im Zusammenhang mit wahren Subjunktionen. (Doch haben in der Mathematik, die ja seit Aristoteles immer als „international“ akzeptiert war, zum Glück die Autoren noch die Freiheit, den für sie gerade sinnvollen Wortschatz selbst aufzubauen. Die Konsequenz ist, dass leider dann nicht alle exakt die selbe Sprache verwenden, wodurch aber selten jemand behindert wird. Es spielt keine Rolle, denn gute Mathematiker liefern ja ihr verwendetes Sprachgebäude gerade mit, und andere gute Mathematiker verstehen zu lesen.)

3.6 Die Bijunktion unabhängiger Aussagen

Unter „Bijunktion“ verstehen wir die *genau–dann–wenn–Verknüpfung*. Folgende Beispiele mögen die Situation bezüglich der Wahrheitswerte klären. Man beachte, dass wir wiederum inhaltlich unabhängige Aussagen verwenden, da nur die Wahrheitswerte und die logische genau–dann–wenn–Verknüpfung wesentlich sind, nicht etwaige inhaltliche Zusammenhänge.

$a :\equiv$ "$2+2=4$" genau dann wenn "$3 \cdot 3 = 9$".	(wahre Aussage)
$b :\equiv$ "$2+2=5$" genau dann wenn "$3 \cdot 3 = 9$"	(falsche Aussage)
$c :\equiv$ "$2+2=4$" genau dann wenn "$3 \cdot 3 = 6$"	(falsche Aussage)
$d :\equiv$ "$2+2=5$" genau dann wenn "$3 \cdot 3 = 6$"	(wahre Aussage)

Dass die letzte Zeile, d.h. „falsch genau dann wenn falsch“, als richtig gewertet wird, dagegen können wir nichts einwenden, denn verwerfen darf man diese Richtigkeit ja wohl kaum. Also muss man sie akzeptieren. Symbolisch verwenden wir für „genau dann wenn“ das Zeichen „$\Leftrightarrow$“. Die logische Verknüpfung definieren wir wie folgt:

Definition 3.6 (Bijunktion, „$\Leftrightarrow$“) *:*

Tabelle 3.5: Definition der Bijunktion

Var	A	B	$A \Leftrightarrow B$
$t(Var)$	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

Bemerkung: Es ist nun sinnvoll, den eingeführten logischen Verknüpfungszeichen Namen zu geben. Daher führen wir folgende Sprechweisen ein:

Begriffserklärung 5 (Junktoren) *:*
Logische Verknüpfungszeichen wie $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\dot{\vee}$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ *nennen wir* **Junktoren**.

Und weiter:

Begriffserklärung 6 (Logische Funktion) *: Durch einen Junktor wird einer Belegung der verknüpften Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten ein neuer Wahrheitswert, der Wahrheitswert der Verknüpfung, zugeordnet. Eine solche Zuordnung nennen wir* **logische** *oder* **binäre Funktion**.

3.7 Klammerungen

Wir betrachten zwei zusammengesetzte Aussagen $R \equiv A \wedge B$ und $S \equiv B \vee C$. Man kann nun vermuten, dass der Ausdruck $Z \equiv: A \wedge B \vee C$ nicht mehr eindeutig ist. Z könnte bedeuten:

$$Z \equiv R \vee C \equiv (A \wedge B) \vee C.$$

Jedoch auch:

$$Z \equiv A \wedge S \equiv A \wedge (B \vee C).$$

Wir stellen daher folgendes Problem:

Problem 3.1 *Hat eine zusammengesetzte Aussage bei verschiedenen Klammerungen immer dieselben Wahrheitswerte?*

Ein Vergleich bei zwei speziell gewählten Belegungen für obige Ausdrücke zeigt die Nichteindeutigkeit auf:

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
(A & \wedge & B) & \vee & C & A & \wedge & (B & \vee & C) \\
\hline
0 & & 1 & & 1 & 0 & & 1 & & 1 \\
\searrow & & \swarrow & & \downarrow & \downarrow & & \searrow & & \swarrow \\
& 0 & & & 1 & 0 & & & 1 & \\
& \searrow & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \\
& & & 1 & & & 0 & & & (\neq)
\end{array}
$$

Resultat: $(A \wedge B) \vee C$ hat also nicht bei jeder möglichen Belegung den gleichen Wahrheitswert wie $A \wedge (B \vee C)$. Daher gilt der Satz:

Satz 3.1 (Klammerungen) *: Bei zusammengesetzten Aussagen mit mehreren Junktoren sind Klammerungen im allgemeinen notwendig.*

Klammern können daher nur weggelassen werden, wenn dadurch die Eindeutigkeit nicht verlorengeht. Das gleiche Problem kennt man ja schon von der Arithmetik mit Zahlen. Wie heisst es da nicht schon wieder? — „Punkt vor Strich!“— Wäre es daher nicht auch geschickt, hier ebenfalls derartige Prioritätsregeln einzuführen? Um das zu tun, legen wir fest:

Definition 3.7 (Prioritätsregeln) *: Wir vereinbaren:*

$$
\begin{array}{ccc}
\neg & \text{bindet stärker als} & \wedge\ . \\
\wedge & \text{bindet stärker als} & \vee\ . \\
\vee & \text{bindet stärker als} & \Rightarrow . \\
\Rightarrow & \text{bindet stärker als} & \Leftrightarrow .
\end{array}
$$

Man wird sofort bemerken, dass in dieser Definition $\dot\vee$ fehlt. Das macht nichts. Auch die weiter im Text folgenden neu definierten Junktoren lassen wir hier aus, um die Sache jetzt nicht zu überladen. Wir werden uns gegebenenfalls mit Klammern behelfen. Die obige Definition wird ausreichen.
Nun kann man sich aber noch eine zweite Frage stellen: Wie ist es, falls in einem Zusammengesetzten Ausdruck nur ein einziger Junktor, dafür aber mehrmals, vorkommt? Also fragen wir:

Problem 3.2 *Hat eine zusammengesetzte Aussage wie z.B. $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ bei verschiedenen Klammerungen immer dieselben Wahrheitswerte?*

Wie oben können wir die Frage verneinen, falls wir eine Belegung finden, bei der bei den verschiedenen Klammerungen verschiedene Wahrheitswerte herauskommen.
Beispiel:

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
(A & \Rightarrow & B) & \Rightarrow & C & A & \Rightarrow & (B & \Rightarrow & C) \\
\hline
0 & & 1 & & 0 & 0 & & 1 & & 0 \\
\searrow & & \swarrow & & \downarrow & \downarrow & & \searrow & & \swarrow \\
& 1 & & & 0 & 0 & & & 0 & \\
& \searrow & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \\
& & & 0 & & & 1 & & & (\neq)
\end{array}
$$

Daher könne wir festhalten:

Satz 3.2 (Klammerungen bei nur mehrfachem Junktor) *: Bei zusammengesetzten aussagenlogischen Ausdrücken mit einem einzigen, aber mehrfach vorkommenden Junktor sind Klammerungen im allgemeinen auch notwendig.*

Mittels Wahrheitstabellen kann man dagegen folgenden Sachverhalt nachprüfen:

Satz 3.3 (Klammerungen mit nur $\wedge$, $\vee$ oder $\Leftrightarrow$) : *Bei zusammengesetzten Aussagen mit einem einzigen Junktor $\wedge$, $\vee$ oder $\Leftrightarrow$, sind Klammern nicht notwendig.*

Das heisst: $A \wedge B \wedge C$, $A \vee B \vee C$ oder $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ sind eindeutig bestimmte Ausdrücke. Wie wir auch die Klammern setzen, die Wahrheitswerte am Schluss sind dieselben.
Um im Folgenden dennoch die Schreibweise etwas mehr vereinfachen zu können, vereinbaren wir die *Linksassoziativität*. In einem von links her geklammerten Ausdruck lassen wir einfach die Klammern weg.
Beispiel:

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow D \quad \equiv: \quad A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$$

Definition 3.8 (Linksassoziativität) : *Fehlen in einem nicht eindeutigen aussagenlogischen Ausdruck die Klammern, so gilt der Ausdruck als von links her geklammert.*

Beispiele:

1. $$(\neg A) \vee (B \wedge C) \equiv \neg A \vee B \wedge C$$
2. $$(\neg A) \wedge (B \vee C) \equiv \neg A \wedge (B \vee C)$$

Die letzte Klammer im Beispiel 2 muss bleiben!

3.8 Aussageformen

3.8.1 Definition des Begriffs „Aussageform"

Seien X_1, X_2, X_3 etc. Aussagenvariablen. Wir wollen nun den Begriff *Aussageform* wie folgt *rekursiv* erklären:

Definition 3.9 (Aussageform) : *Ein Ausdruck*[3] *P heisst* **Aussageform**, *falls gilt:*

1: $P \equiv X_i$, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$

2: $P \equiv P(X_1, X_2, \ldots) \equiv$ *sinnvolle Verknüpfung von endlich vielen Aussagenvariablen durch Junktoren, wobei auch Klammern stehen können.*

Mit „sinnvolle Verknüpfung" meinen wir hier, dass jede Klammer beidseitig geschlossen ist, dass zweistellige Junktoren immer zwischen Ausdrücken stehen, die schon als Aussageform erkannt sind und dass „$\neg$" immer vor einer (als solche erkannten) Aussageform steht. Dabei kann natürlich statt X_i auch X, Y, Z etc. vorkommen. Das sind nur Namen.

Beispiele: X, Y, $\neg X$, $X_1 \wedge X_2$, $\neg X \vee \neg X$, $(X \vee (Y \wedge \neg Z) \Rightarrow (X \Rightarrow \neg Z))$ etc. .

Mit Hilfe von *Wahrheitswerttabellen* machen wir uns eine Übersicht über alle Belegungen der Variablen einer Aussageform mit Wahrheitswerten. So können wir auf übersichtliche Art die Gesamtwarheitswerte zu jeder Belegung ermitteln. Das damit verbundene Problem wollen wir formulieren:

Problem 3.3 (Wahrheitswerttabelle) : *Wie gelangt man zu einer Übersicht über sämtliche Wahrheitswerte einer Aussageform mittels einer Wahrheitswerttabelle? Wie stellt man eine solche Tabelle auf?*

Dazu ein Beispiel: Wir verschaffen uns die Übersicht über die Wahrheitswerte von $\neg(X \wedge \neg Y) \Rightarrow Z$:

Tabelle 3.6: Wahheitswerte von $\neg(X \wedge \neg Y) \Rightarrow Z$

[3] P bedeutet „Polynom"

X	Y	Z	$\neg Y$	$X \wedge \neg Y$	$\neg(X \wedge \neg Y)$	$\neg(X \wedge \neg Y) \Rightarrow Z$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1

In der letzten Kolonne sehen wir die *Gesamtwahrheitswerte*. Man kann nun einsehen, dass durch eine Belegung der Aussagenvariablen X, Y und Z mit Wahrheitswerten die Aussageform $\neg(X \wedge \neg Y) \Rightarrow Z$ zu einer Aussage wird der Art „Form wird wahr" (Wert 1) oder „Form wird falsch" (Wert 0). Generell können wir folgende Feststellung machen:

Feststellung: Ein Gesamtwahrheitswert einer Aussageform bei einer gegebenen Belegung führt immer zur *neuen Aussage*: *„... Form besitzt Wahrheitswert ... "* .
Weiter zeigt die Wahrheitstabelle auch die durch die Aussageform gegebene *Belegungsfunktion* (auch Wahrheitsfunktion, binäre Funktion), d.h. die Zuordnung: $\{$Mögliche Belegungen$\} \mapsto \{\ 0, 1\ \}$.
Übungen dazu befinden sich im Übungsbuch *DIYMU* Kap. 2 Bibl.: wirz.

3.8.2 Aussageform mit genau zwei Aussagenvariablen

Aussageformen mit genau zwei Aussagenvariablen bestehen aus einem zweistelligen Junktor, der zwei Teile verknüpft, die ihrerseits wieder spezielle Aussageformen sind. Ein solcher Teil ist entweder eine Aussagenvariable — oder eine Aussagenvariable verbunden mit einem einstelligen Junktor, z.B. mit $\neg$. (Später, wenn die Begrifflichkeit eingeführt sein wird, werden wir von einer „Funktion mit einem Argument" reden.) Man sieht sofort, dass es *genau* 4 *einstellige Junktoren* geben kann: (1) $\neg$, (2) *identisch wahr* resp. w (der Junktor, der jeder Variablen immer den Wert „wahr" resp 1 zuweist), (3) *identisch falsch* resp. f (der Junktor, der jeder Variablen immer den Wert „falsch" resp 0 zuweist) und (4) *neutral* resp. n, der Junktor, der die Variable so lässt wie er ist. Dazu die Tabelle:

Tabelle 3.7: Mögliche einstellige Junktoren

X	*neutral* X	$\neg X$	w	f
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

Andere Kombinationsmöglichkeiten für die Wahrheitswerte hat man nicht. Darauf aufbauend können wir uns jetzt die wichtige Frage stellen: Wieviele Möglichkeiten gibt es bei einer Verknüpfung von zwei Aussagenvariablen? Man hat daher das Problem:

Problem 3.4 (Belegungsfunktionen) *: Mache Dir eine Übersicht über sämtliche Belegungsfunktionen einer Aussageform, die nur* 2 *Aussagenvariablen enthält.*

Wir erstellen dazu wieder eine Tabelle, wobei eine mögliche Gesamtverknüpfung vorerst einfach f_i heisst. Die Anzahl der möglichen Funktionen ergibt sich aus der möglichen Anzahl geordneter 4-er Gruppen mit den Elementen 0 und 1. Das ist auch die Anzahl der Dualzahlen von 0000 bis 1111, d.h. im 10-er System die Anzahl der Zahlen von 0 bis $2^4 - 1$ (d.h.bis 15). Das gibt 16 Möglichkeiten. Um sie alle darzustellen, wählen wir wieder eine ans Dualsystem angelehnte Abzählungsmethode:

Tabelle 3.8: Mögliche zweistellige Junktoren

X_1	X_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		f	$\wedge$					$\dot{\vee}$	$\vee$	$\downarrow$	$\Leftrightarrow$				$\Rightarrow$	$\mid$	w

Man erkennt sofort: f_0 ist die *identisch falsche Verknüpfung*. Was wir auch für Belegungen nehmen, das Resultat ist immer falsch. Entsprechend ist f_{15} die *identisch wahre Verknüpfung*. f_1 erkennen wir als „$\wedge$“. f_2 hat noch keinen Namen. Man kann f_2 als $\neg(X_1 \Rightarrow X_2)$ interpretieren oder auch als $X_1 \wedge \neg X_2$. f_8 und f_{14} sind noch wichtige Verknüpfungen, die Namen tragen:

Definition 3.10 (Nicodsche Verknüpfung, Scheffer–Strich, W und F) *:*
f_0 *heisst* **identisch falsche** *Verknüpfung F,* f_{15} *heisst* **identisch wahre** *Verknüpfung W.* f_8 *heisst* **Nicodsche** *Verknüpfung* $(\downarrow)$ *und* f_{14} *ist der Scheffer–Strich* $(|)$ *.*

Bemerkung: In der *Schaltalgebra* entspricht die Nicodsche Verknüpfung dem NOR und der Scheffer–Strich dem $NAND$. Den Scheffer–Strich $|$ schreibt man auch in der Form $\uparrow$.

3.8.3 Doppelte Verneinung und Regeln von De Morgan

„Nicht *nicht die Wahrheit sagen*“ bedeutet von unserem jetztigen Wissensstand aus gesehen „klar die Wahrheit sagen“. Wir begegnen hier der *doppelten Verneinung* („nicht ... nicht ... “). Mittels der Wahrheitstafel kann man in der Aussagenlogik belegen, dass diese doppelte Verneinung eine „Be-ja-ung“ ist. Es gilt der Satz:

Satz 3.4 (Doppelte Verneinung) *:* $A \equiv \neg\neg A.$

Beweis: Den Beweis führen wir mittels der Wahrheitstafel. Falls die Wahheitswerte zeilenweise übereinstimmen, ist die Sache bewiesen. Wir sehen sofort, dass die erste und die dritte Kolonne übereinstimmen, der Satz also *wahr* ist:

Tabelle 3.8: Doppelte Verneinung

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
0	1	0
1	0	1

Untersucht man nun verneinte $\wedge$– sowie $\vee$–Verknüpfungen, so stösst man auf die Regeln von *De Morgan*:

Tabelle 3.9: De Morgan

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$A \vee B$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

Aus den letzten beiden Kolonnen und wegen der doppelten Verneinung ersieht man:

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv A \vee B \equiv \neg\neg A \vee \neg\neg B.$$

Ebenso beweist man:

$$\neg(\neg A \vee \neg B) \equiv A \wedge B \equiv \neg\neg A \wedge \neg\neg B.$$

Nehmen wir statt A neu $\neg X_1$ und statt B neu $\neg X_2$, so dürfen wir wegen der doppelten Verneinung schreiben:

Satz 3.5 (De Morgan) *:*

1. $\neg(X_1 \wedge X_2) \equiv \neg X_1 \vee \neg X_2,$
2. $\neg(X_1 \vee X_2) \equiv \neg X_1 \wedge \neg X_2.$

3.8.4 Aussageform mit mehreren Aussagenvariablen und unbekannten Junktoren

Betrachtet man die obige Tabelle 10 , so kann man sich z.B. fragen, ob und wie etwa f_{11} durch andere Junktoren ausdrückbar sei. Dass so etwas immer möglich ist, lässt sich in einem *Hilfssatz* so ausdrücken:

Lemma 3.1 (Reduktion auf gebräuchliche Junktoren) *: Jede Aussageform lässt sich durch eine Wahrheitsfunktion $f(X_1, X_2, \ldots)$ (d.h. durch eine* **Ersatzform***) darstellen, die nur durch die wenigen Junktoren $\neg$, $\wedge$ sowie $\vee$ vorkommen.*

Zum Beweis: Das können wir einsehen, indem wir die Methode aufzeigen, mit der die Ersatzform gewonnen werden kann. Da zur Anwendung der Methode keine Einschränkungen bestehen, funktioniert das immer. Wir zeigen das am Beispiel von f_{11}:

Tabelle 3.11: Untersuchung von f_{11}

X_1	X_2	$f(X_1, X_2) = f_{11}$	$\neg X_1$	$\neg X_2$	$\neg X_1 \wedge \neg X_2$	$X_1 \wedge \neg X_2$	$X_1 \wedge X_2$	$(\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee$ $(X_1 \wedge \neg X_2) \vee$ $(X_1 \wedge X_2)$
0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1

$f(X_1, X_2) = f_{11}$ ist nur wahr, wenn die Belegungen der Zeile 1 — oder die der Zeile 3 resp. 4 vorhanden ist. Sonst ist f_{11} falsch, denn in der letzten Kolonne muss eine 1 stehen. Die Belegung der Zeile 1 ist aber vorhanden, wenn X_1 den Wert 0 und X_2 den Wert 0 hat, d.h. wenn $\neg X_1$ den Wert 1 und $\neg X_2$ auch den Wert 1 hat. Die Belegung der Zeile 3 ist entsprechend vorhanden, wenn X_1 den Wert 1 und X_2 den Wert 0 hat, d.h. wenn $\neg X_2$ den Wert 1 annimmt. Ebenso ist die Belegung der Zeile 4 vorhanden, wenn X_1 den Wert 1 und X_2 auch den Wert 1 hat. D.h. $f(X_1, X_2) = f_{11}$ ist wahr, wenn $\neg X_1$ den Wert 1 und $\neg X_2$ auch den Wert 1 hat — oder wenn X_1 den Wert 1 und $\neg X_2$ gleichzeitig auch den Wert 1 — oder wenn X_1 den Wert 1 und X_2 auch den Wert 1 hat. Sonst ist $f(X_1, X_2) = f_{11}$ falsch. Exakt dieselben Wahrheitswerte entstehen aber, wenn man $\neg X_1 \wedge \neg X_2$ (nur wahr im Falle der Zeile 1) mit $X_1 \wedge \neg X_2$ (nur wahr im Falle der Zeile 3) und mit $X_1 \wedge X_2$ (nur wahr im Falle der Zeile 4) durch $\vee$ verknüpft (vgl. letzte Spalte). So sieht man ein, dass gilt:

$$f(X_1, X_2) = f_{11} \equiv (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \wedge X_2).$$

Im letzten Ausdruck kommen tatsächlich nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$ sowie $\vee$ vor. Dieser Ausdruck ist aber etwa nicht eindeutig! Denn man kann auch wie folgt argumentieren:
$f(X_1, X_2) = f_{11}$ ist falsch, d.h. $\neg f(X_1, X_2) = \neg f_{11}$ wahr, genau wenn die Belegung der Zeile 2 vorhanden ist. Dies ist dann der Fall, wenn X_1 den Wert 0 und X_2 den Wert 1 haben, d.h. wenn $\neg X_1$ den Wert 1 und X_2 auch den Wert 1 hat. Dies ist genau dann so, wenn $\neg X_1 \wedge X_2$ wahr ist. Wie wir später beweisen, ist das genau dann der Fall, wenn $\neg(\neg X_1 \wedge X_2)$ falsch ist. $\neg(\neg X_1 \wedge X_2)$ und $f(X_1, X_2) = f_{11}$ sind also übereinstimmend falsch. Somit ist:

$$f(X_1, X_2) = f_{11} \equiv \neg(\neg X_1 \wedge X_2) \equiv X_1 \vee \neg X_2.$$

Die letzte Umformung geschieht nach den *Regeln von De Morgan*, die wir später beweisen werden. Wir halten fest:

Korollar 3.1 (Eindeutigkeit der Darstellung mit gebräuchlichen Junktoren) *Die Darstellung eines Ausdrucks mit Hilfe der Junktoren $\neg$, $\wedge$ sowie $\vee$ ist nicht eindeutig.*

Daher können wir die folgende Methode zur Konstruktion einer Ersatzform mit nur den Junktoren $\neg$, $\wedge$ sowie $\vee$ benützen:

Methode 3.1 (Konstruktion einer Ersatzform) *: Wir nehmen all jene Zeilen, in denen die anvisierte Aussageform den Wahrheitswert* 1 *hat und erstellen eine* $\wedge$*–Verknüpfung für jede Zeile. Für die Aussagenvariablen* X_i*, bei denen vorne der Wahrheitswert* 1 *steht, schreiben wir* X_i*, für die andern* $\neg X_i$*. Die so erhaltenen Ausdrücke für die Zeilen verknüpfen wir mit* $\vee$*.*

Nochmals ein Beispiel: Gegeben sei $g(X_1, X_2, X_3)$ durch die folgende Tabelle. Konstruiere eine Ersatzform mit $\neg$ $\wedge$ und $\vee$!

Tabelle 3.12: Ersatzform für $g(X_1, X_2, X_3)$

X_1	X_2	X_3	$g(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Nach der oben angegebenen Methode lesen wir ab:

$$g(X_1, X_2, X_3) \equiv \underbrace{(\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3)}_{\text{Aus der 1. Zeile}} \vee \underbrace{(\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)}_{\text{Aus der 2. Zeile}} \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3).$$

3.9 Verknüpfungsbasen

In 3.8.4 haben wir gesehen, dass wir eine beliebige Aussageform darstellen können ohne andere Junktoren als $\neg$, $\wedge$ sowie $\vee$ zu gebrauchen. Eine solche Menge von Junktoren (wie oben $\{\neg, \wedge, \vee\}$) nennen wir *Verknüpfungsbasis*. Allgemein definieren wir:

Definition 3.11 (Verknüpfungsbasis) *: Eine Menge von Junktoren, die ausreicht, um jede Wahrheitsfunktion als Aussageform darzustellen, heisst* **Verknüpfungsbasis***.*

Aus 3.8.3 wissen wir, dass gilt:

1. $X_1 \vee X_2 \equiv \neg(\neg X_1 \wedge \neg X_2)$,

2. $X_1 \wedge X_2 \equiv \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2)$.

Daher dürfen wir $\vee$ ersetzen durch $\neg$, $\wedge$ und Klammern. Ebenso dürfen wir den Junktor $\wedge$ austauschen durch die Junktoren $\neg$, $\vee$ sowie Klammern. Also sind $\{\neg, \wedge\}$ sowie $\{\neg, \vee\}$ Verknüpfungsbasen. Man kann mittels Wahrheitstabellen nachprüfen, dass folgender Satz gilt:

Satz 3.6 (Subjunktionsersatz) *: Es gilt:*

$$X_1 \Rightarrow X_2 \equiv \neg(X_1 \wedge \neg X_2) \equiv \neg X_1 \vee X_2.$$

Wegen der doppelten Verneinung kann man somit immer $\{\neg, \wedge\}$ und $\{\neg, \vee\}$ ersetzen durch $\{\neg, \Rightarrow\}$. D.h. es gilt der Satz:

Satz 3.7 (Verknüpfungsbasen) *:* $\{\neg, \wedge\}$*,* $\{\neg, \vee\}$ *und* $\{\neg, \Rightarrow\}$ *sind Verknüpfungsbasen.*

Es mag erstaunen, dass so wenige Junktoren genügen, um alle Aussageformen darzustellen. Doch man kann die Sache noch weitertreiben. Wir definieren:

Definition 3.12 (Elementare Verknüpfungsbasis) *: Ein Junktor bildet eine* **elementare Verknüpfungsbasis***, falls man durch ihn alleine mit Hilfe von Klammern alle Aussageformen mit endlich vielen Aussagenvariablen darstellen kann.*

Interessanterweise gilt der Satz:

Satz 3.8 (Darstellbarkeit durch elementare Verknüpfungsbasen) *: $\{\uparrow\}$ und $\{\downarrow\}$ (der Scheffer–Strich und der Nicodsche Junktor) sind die einzigen elementaren Verknüpfungsbasen.*

Zum Beweis: Dass $\{\uparrow\}$ und $\{\downarrow\}$ elementare Verknüpfungsbasen sind, geht aus folgendem Hilfssatz hervor, den man leicht durch Nachprüfung über die Wahrheitstafeln beweist:

Lemma 3.2 (Darstellbarkeit durch $\{\uparrow\}$ und $\{\downarrow\}$) *:*

$$\begin{array}{rcl} \neg A & \equiv & A \uparrow A \\ A \vee B & \equiv & A \uparrow A \uparrow (B \uparrow B) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \neg A & \equiv & A \downarrow A \\ A \wedge B & \equiv & A \downarrow A \downarrow (B \downarrow B) \end{array}$$

Die andere Aussage, nämlich die, dass es keine weiteren elementare Verknüpfungsbasen gibt, kann man nachprüfen, indem man zeigt, dass $\{\uparrow\}$ und $\{\downarrow\}$ durch keinen einzigen dritten Junktor alleine dargestellt werden können. Das zu zeigen ist eine längere Sache.

3.10 Tautologien, Kontradiktionen, Äquivalenzen, Implikationen

In diesem Unterkapitel wollen wir einige *spezielle Aussageformen* studieren. Wir beginnen mit der *Tautologie*.

3.10.1 Tautologien

Wir definieren:

Definition 3.13 (Tautologie) *: Eine Aussageform, die bei jeder Belegung wahr ist, heisst* **Tautologie** *(auch identisch wahre oder allgemeingültige Aussageform).*

Beispiele:

Tabelle 3.13: Folgende Aussageformen sind Tautologien:

1.1	$A \Rightarrow A$	1.2	$A \Rightarrow \neg\neg A$
2.1	$A \vee \neg A$	2.2	$\neg(A \wedge \neg A)$
3.1	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	3.2	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
4.1	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg B \wedge \neg A$	4.2	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg B \vee \neg A$
5.1	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	5.2	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6.1	$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	6.2	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

Die Nachprüfung geschieht mittels Wahrheitstabelle. Z.B. für 1.1 wie folgt:

A	A	$A \Rightarrow A$
0	0	1
1	1	1

q. e. d.

Definition 3.14 (Kontradiktion) *: Eine Aussageform, die bei jeder Belegung falsch ist, heisst* **Kontradiktion** *(auch identisch falsche Aussage oder Widerspruch).*

Beispiele: Folgende Aussageformen sind Kontradiktionen:

$$A \wedge \neg A \text{ sowie } (A \vee B) \wedge \neg A \wedge \neg B \text{ etc. } .$$

Nachprüfung für das erste Beilspiel:

A	A	$A \Rightarrow A$	$\neg(A \Rightarrow A)$
0	0	1	0
1	1	1	0

q. e. d.

Eine Tautologie ist immer wahr, eine Kontradiktion ist (ebenso wie „¬ eine Tautologie") immer falsch. Daher gilt trivialerweise der Satz:

Satz 3.9 (Beziehung zwischen Tautologie und Kontradiktion) : *$P(X_1, X_2, \ldots)$ ist Tautologie genau dann wenn $\neg P(X_1, X_2, \ldots)$ Kontradiktion ist.*

Bei einer Tautologie $P(X_1, X_2, \ldots)$ spielt die Belegung keine Rolle. Man kann irgendwelche Wahrheitswerte für die X_i einsetzen, die Aussageform bleibt wahr. Ersetzt man dann die Aussagenvariablen X_i durch neue Aussageformen $P_i(X_1, X_2, \ldots)$ und belegt diese mit Wahrheitswerten, so hat man als Resultate der Belegungen der neuen Aussageformen P_i einfach eine andere Belegung der ursprünglichen Aussageform P, die ja eine Tautologie ist. Das ändert aber nichts an der Tautologie, denn diese ist ja immer wahr. Man kann daher den folgenden Satz notieren:

Satz 3.10 (Ersetzung der Aussagenvariablen in einer Tautologie) :

<u>Vorausssetzung:</u> Sei $P(X_1, X_2, \ldots)$ eine Tautologie sowie P_1, P_2, P_3 beliebige Aussageformen $(P_i \equiv P_i(X_1, X_2, \ldots)$.
<u>Behauptung:</u> $P(P_1, P_2, \ldots)$ ist wieder eine Tautologie.

Beispiel: $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ ist Tautologie. Somit ist
$((\underbrace{\neg A \wedge B}) \vee B) \Leftrightarrow (B \vee (\underbrace{\neg A \wedge B}))$ auch Tautologie.

Hier ist A ersetzt worden durch $(\underbrace{\neg A \wedge B})$. Der neue Ausdruck bleibt eine Tautologie.

3.10.2 Äquivalenzen

Definition 3.15 (Äquivalenz) : *Zwei Aussageformen $P(X_1, \ldots, X_n)$ und $Q(X_1, \ldots, X_n)$ heissen* **äquivalent**, *falls $P(X_1, \ldots, X_n) \Leftrightarrow Q(X_1, \ldots, X_n)$ eine Tautologie ist.*

Sind $P(X_1, \ldots, X_n)$ und $Q(X_1, \ldots, X_n)$ äquivalent, so schreiben wir $P(X_1, \ldots, X_n) \equiv Q(X_1, \ldots, X_n)$. $P(X_1, \ldots, X_n) \equiv Q(X_1, \ldots, X_n)$ bedeutet also, dass $P(X_1, \ldots, X_n) \Leftrightarrow Q(X_1, \ldots, X_n)$ immer wahr ist. Das heisst, dass $P(X_1, \ldots, X_n)$ genau dann wahr (oder falsch) ist, wenn $Q(X_1, \ldots, X_n)$ wahr (oder falsch) ist.

3.10.3 Implikation

Definition 3.16 (Implikation) : *Die Aussageformen $P(X_1, \ldots, X_n)$* **impliziert** *die Aussageform $Q(X_1, \ldots, X_n)$, falls $P(X_1, \ldots, X_n) \Rightarrow Q(X_1, \ldots, X_n)$ eine Tautologie ist.*

Beispiele: 1) $A \Rightarrow A$ 3) $A \wedge B \Rightarrow A$
2) $A \Rightarrow A \vee B$ 3) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

In einer Implikation $P \Rightarrow Q$ lassen sich die Aussageformen A und B nicht beliebig mit $\neg$ versehen und vertauschen. Trotzdem haben aber solche Verwandlungen in der Praxis eine Bedeutung. Man hat daher zur Vereinfachung des Sprachgebrauchs folgende Namen eingeführt:

Definition 3.17 (Konversion, Inversion, Kontraposition) *: Gegeben sei* $P \Rightarrow Q$*. Der Ausdruck* $Q \Rightarrow P$ *heisst* **Konversion** *von* $P \Rightarrow Q$*. Der Ausdruck* $\neg P \Rightarrow \neg Q$ *heisst* **Inversion** *von* $P \Rightarrow Q$*.* $\neg Q \Rightarrow \neg P$ *heisst* **Kontraposition** *oder auch* **Transposition** *von* $P \Rightarrow Q$*.*

Es gilt der wichtige Satz, der in der mathematischen Beweistechnik häufig Verwendung findet:

Satz 3.11 (Indirekter Beweis) *:*

$$\neg Q \Rightarrow \neg P \qquad \equiv \qquad P \Rightarrow Q$$

Diese Äquivalenz kann man rasch mit Hilfe einer Wahrheitstabelle verifizieren. (Dies zu tun ist eine gute Übung ....) Wichtig für die mathematischen Beweistechnik ist nun, dass man statt $P \Rightarrow Q$ zu beweisen, genauso gut $\neg Q \Rightarrow \neg P$ verifizieren kann. Das kann Vereinfachungen bringen.

3.10.4 Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Gesetze spielen bei logischen Umformungen und beim Beweisen eine wichtige Rolle. Man verifiziert sie am einfachsten mit Hilfe von Wahrheitstabellen. *Hinweis: Man mache das zur Übung selbst...*

(1)	Gesetz der doppelten Negation	$\neg\neg A$	$\equiv$	A
(2)	Idempotenz	$A \vee A$	$\equiv$	A
		$A \wedge A$	$\equiv$	A
(3)	Assoziativität	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
		$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$
(4)	Kommutativität	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
		$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$
(5)	Distributivität	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
		$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(6)	Neutrales Element	$A \vee F$	$\equiv$	A
		$A \wedge W$	$\equiv$	A
(7)	Erzwungene Adjunktion	$A \vee W$	$\equiv$	W
	Erzwungene Konjunktion	$A \wedge F$	$\equiv$	F
(8)	Komplementarität:			
	Ausgeschlossenes Drittes	$A \vee \neg A$	$\equiv$	W
	Gesetz vom Widerspruch	$A \wedge \neg A$	$\equiv$	F
(9)	Dualität	$\neg W$	$\equiv$	F
		$\neg F$	$\equiv$	W
(10)	De Morgan	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
		$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$
(11)	Absorptionsgesetze	$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A
		$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
		$(A \wedge B) \vee \neg B$	$\equiv$	$A \vee \neg B$
		$(A \vee B) \wedge \neg B$	$\equiv$	$A \wedge \neg B$
(12)	Kontraposition	$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
(13)	Dualisierung der Kontraposition	$A \Leftrightarrow W$	$\equiv$	$\neg A \Leftrightarrow F$
(14)	Subjunktionsersatz	$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$
		$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg(A \wedge \neg B)$
(15)	Bijunktionsersatz	$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
(16)	Ex falso quodlibet	$F \Rightarrow A$	$\equiv$	W
(17)	Ex quodlibet verum	$A \Rightarrow \mathrm{W}$	$\equiv$	W
(18)	Abschwächung der Konjunktion	$(A \wedge B) \Rightarrow A$	$\equiv$	W
(19)	Abschwächung der Adjunktion	$A \Rightarrow (A \vee B)$	$\equiv$	W
(20)	Gesetz vom negiertem Vorderglied	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\equiv$	W
(21)	Gesetz vom Hinterglied	$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\equiv$	W
(22)	Konjunktion impliziert Disjunktion	$(A \vee B) \Rightarrow (A \vee B)$	$\equiv$	W
(23)	Modus ponens	$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B)$	$\equiv$	W
(24)	Modus tollens	$(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A)$	$\equiv$	W
(25)	Transitivitätsgesetz	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	$\equiv$	W
(26)	Gesetz der Fallunterscheidung	$((A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow C)) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow C$	$\equiv$	W

3.11 Logisches Schliessen

Hier wollen wir durch einen kurzen Exkurs etwas Einblick ins *logische Schliessen* oder *logische Beweisen* gewinnen.
Seien $P_1, P_2, \ldots, P_n$ und Q Aussageformen. Häufig tritt nun folgendes Problem auf:

Problem 3.5 (Logischer Schluss) *: Es gilt festzustellen, ob sich Q aus $P_1, P_2, \ldots, P_n$ herleiten lässt. Symbolisch schreiben wir: $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$.*

Um das Problem besser behandeln zu können, führen wir die folgende Sprechweise ein:

Begriffserklärung 7 (Prämissen, Konklusion) *: Im eben erwähnten Problem heissen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ die* **Prämissen** *(Voraussetzungen), Q heisst die* **Konklusion** *(Folgerung) und $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ heisst* **logischer Schluss**.

Eine logische Folgerung oder ein logischer Schluss kann in der zweiwertigen Logik wiederum wahr oder falsch sein. Falsche Schlüsse sind ein Ärgernis, das es zu vermeiden gilt. Uns interessieren vor allem die wahren Schlüsse. daher definieren wir:

Definition 3.18 (Korrekter logischer Schluss) *: $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ heisst* **korrekter logischer Schluss**, *falls $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q)$ eine Tautologie ist.*

In einem korrekten logische Schluss impliziert also die Konjunktion der Prämissen die Konklusion.

Beispiel: Wir wollen zeigen, dass $A, A \Rightarrow B \vdash B$ gilt, d.h. $A, A \Rightarrow B \vdash B$ ist ein korrekter logischer Schluss. Wir müssen also zeigen, dass $(A \wedge A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ eine Tautologie ist. Wir machen das anhand einer Tabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$(A \wedge A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$(A \wedge A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ ist also in jedem möglichen Fall wahr. Der untersuchte Ausdruck ist demnach eine Tautologie. Vielleicht haben Sie es gemerkt — es ist der modus ponens.
Die Bedeutung des modus ponens (Abtrennungsregel) liegt in folgender Konsequenz: Man kann, um eine Aussage B als wahr zu erweisen, auch eine beliebige andere Aussage A sowie die Subjunktion $A \Rightarrow B$ als wahr erweisen. Solchen Situationen begegnet man in „mathematischen Sätzen“. Denn ein solcher Satz hat meistens folgende abstrakte Struktur:

Satz:	**Voraussetzung:**	Aussage $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$	Kürzer:	**Satz:**	**Vor:**	$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$
	Behauptung:	Aussage b			**Beh.:**	b

Man behauptet also, dass — falls die Voraussetzung wahr ist, die Behauptung auch wahr ist (d.h. nie falsch sein kann). Falls die Voraussetzung aber falsch ist, interessiert sich für die Behauptung niemand ernsthaft. D.h. sie kann wahr oder falsch sein, es macht unter einer falschen, also nie eintreffenden Voraussetzung nichts aus. Daher muss man zum Beweis des Satzes die Subjunktion $a \Rightarrow b$ als wahr erweisen. Diese Subjunktion erscheint hier nicht in der Bedeutung einer Aussageform, sondern ist für den Leser des mathematischen Satzes eine Aussage. Man muss daher bei einem Beweis nur den Fall „$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ wahr und b wahr“ als wahr erweisen. Es gilt also hier, korrekt logisch von $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ auf b zu schliessen.
Wir machen uns diesen Sachverhalt an folgendem Beispiel klar:

Satz 3.12 (Paradigma aus der Geometrie) [4]*:*
Vor.: *Für die Geraden g_i gilt: $g_1 \| g_2$ (Aussage a_1) und $g_1 \perp g_3$ (Aussage a_2).*
Beh.: *Es gilt dann auch $g_2 \perp g_3$ (Aussage b).*

Weitere logische Schlüsse:	(1)	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$\vdash$	$(A \Rightarrow C)$
	(2)	$(A \Rightarrow \neg B) \wedge B$	$\vdash$	$\neg A$
Trugschlüsse:	(1)	$(A \Rightarrow B) \wedge B$	$\vdash$	A
	(2)	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg A$	$\vdash$	$\neg B$

[4] Ein Paradigma ist ein Lehrbeispiel

Trugschlüsse haben ihren Grund oft darin, dass man sich von der „ungenauen und oberflächlichen Umgangssprache“ leiten lässt. Achtung: Trugschlüsse führen zu Irrtümern!
Hinweis: Die Nachprüfung, wann obige Trugschlüsse falsch sind, ist eine gute Übung.

3.12 Die polnische Notation

3.12.1 Herkunft und Sinn

Anfänglich im Zusammenhang mit theoretischen Untersuchungen ist die Frage aktuell geworden, ob es nicht eine eindimensionale Schreib- und Lesemöglichkeit gibt, in der man *ohne Klammern auskommt*. Mit Hilfe einer solchen eindimensionalen Schreib- und Lesemöglichkeit sollen sich Aussageformen z.B. auch von einer Maschine schreiben oder lesen lassen können. Eine solche Maschine schreibt oder liest immer nur ein Zeichen. Dann geht sie in immer gleicher Richtung zum nächsten Zeichen über, hat jedoch keine Möglichkeit, den Schreib- oder Lesekopf wieder zurückzubewegen. Eine solche Maschine soll sich nicht noch zusätzlich eine Stelle merken müssen, an der eine Klammer aufgegangen ist, die es dann später wieder zu schliessen gilt. Dieses Prinzip ist natürlich im Zusammenhang mit dem Bau von Computern heute wichtig. Ein Beispiel einer solchen abstrakten Maschine ist die *Turingmaschine*, benannt nach dem Engländer Turing (erste Hälfte des 20. Jahrhunderts). Der Pole J. Lukasiewicz hat eine solche Schreibweise vorgeschlagen, die auch funktioniert: Die *polnische Notation*. Damit werden Klammern überflüssig. Es zeigt sich aber rasch, dass Klammern für den Menschen vor allem zum Lesen unentbehrlich sind, denn sonst kann es äusserst mühsam werden, die Übersicht rasch zu gewinnen. Der Mensch hat ein dreidimensionales Sehvermögen. Er funktioniert nicht eindimensional wie eine der eben beschriebenen Maschinen. Allerdings wenden heute noch gewisse Hersteller (vor allem von Taschenrechnern) das Prinzip der polnischen klammerlosen Schreibweise unter diversen Umständen in abgewandelter Form an. (Bekannt ist z.B. die *umgekehrte polnische Notation* bei HP.)

3.12.2 Regeln zur polnischen Notation

Nachstehend ist die Sache am Beispiel der häufigsten Junktoren erläutert. Das damit erklärte Prinzip lässt sich mühelos auf die andern Junktoren übertragen.
Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} \neg A & \equiv & \neg A \\ A \wedge B & \equiv & \wedge AB \\ A \vee B & \equiv & \vee AB \\ A \Rightarrow B & \equiv & \Rightarrow AB \\ A \Leftrightarrow B & \equiv & \Leftrightarrow AB \end{array}$$

Man erkennt daraus folgende Vorgehensweise:

Methode 3.2 (Polnische Notation) *: Ein Junktor, der bei normaler Notation zwischen zwei Aussagen oder Aussageformen steht, wird bei der Polnischen Notation voran geschrieben.*

Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} ((\neg A) \wedge (B \vee A)) & \equiv & \wedge \neg A \vee BA \\ A \Rightarrow ((\neg B) \Leftrightarrow (A \vee C)) & \equiv & \Rightarrow A \Leftrightarrow \neg B \vee AC \\ (A \vee B) \Rightarrow ((\neg C) \vee ((\neg B) \wedge C)) & \equiv & \Rightarrow \vee AB \vee \neg C \wedge \neg BC \end{array}$$

Da das Prinzip des Voranstellens des Junktors nicht vom Junktor abhängt, gilt es auch für den Scheffer-Strich und auch für die Nicodsche Verknüpfung. Diese beiden Junktoren bilden aber die einzigen *elementaren Verknüpfungsbasen,* d.h. jede Aussageform lässt sich alleine mit ihnen schrieben. Mit Hilfe der polnischen Notation ist es möglich, die Klammern zu vermeiden. Daher können wir folgern:

Satz 3.13 (Elementarste Darstellung einer Aussageform resp. einer Aussage) *: Jede Aussageform resp. jede Aussage lässt sich alleine mit $\uparrow$ und Aussagenvariablen resp. elementaren Aussagen schreiben. Ebenso lässt sich jede Aussageform resp. jede Aussage alleine mit $\downarrow$ und Aussagenvariablen resp. elementaren Aussagen schreiben.*

Als Konsequenz ergibt sich daher, dass neben den Aussagenvariablen und Elementaraussagen nur ein einziger Junktor nötig ist, um jeden Ausdruck der Aussagenlogik schreiben zu können.

3.13 Logikzeitung

Die Logikzeitung

Reklameteil: Ja–Parole für mehr Logik im Magen!

Partei für Inweltschutz Wetterbericht: Erst Sturm u. Drang, dann Föhn im Badezimmer

Letzte Nachrichten auf der folgenden Seite!

Die Logikzeitung

Das Paradoxon der unerwarteten Hinrichtung
(Gekürzt nach einer Erzählung von Martin Gartener)

Inserat: Zu empfehlen:
M. Gartener, Logik unterm Galgen

Gartener schreibt unter anderem: "Das Urteil wurde an einem Samstag gesprochen. 'Die Hinrichtung wird mittags an einem der sieben Tage der nächsten Woche stattfinden', sagte der Richter zu dem Gefangenen. 'Aber Sie werden nicht wissen, an welchem Tage, bis Sie am Morgen des Hinrichtungstages Bescheid bekommen.'

Der Richter war als Mann bekannt, der immer sein Wort hielt. Der Verurteilte ging, vom Anwalt begleitet, in seine Zelle zurück. Als die beiden allein waren, lächelte der Anwalt und meinte:' Merken Sie nichts? Das Urteil des Richters kann unmöglich vollstreckt werden.'

'Das verstehe ich nicht', sagte der Gefangene.

'Ich erkläre es Ihnen. Es ist ganz offensichtlich, dass man Sie nicht am nächsten Samstag hinrichten kann. Samstag ist der letzte Tag der Woche. Am Freitag nachmittag wären Sie noch am Leben und somit hätten Sie die absolute Gewissheit, dass man Sie am Samstag hinrichten würde. Sie wüßten es, bevor es ihnen am Samstag morgen mitgeteilt würde. Das liefe der Anordnung des Richters zuwider.'
'Stimmt', sagte der Gefangene.

'Samstag ist damit also ausgeschlossen', fuhr der Anwalt fort. 'Bleibt der Freitag als letzter Tag, an dem man Sie hinrichten könnte. Aber am Freitag ist dies nicht möglich, weil am Donnerstag nachmittag nur noch zwei Tage übrigbleiben, nämlich Freitag und Samstag. Da der Samstag nicht in Frage kommt, müsste es am Freitag geschehen. Da Sie das aber wissen, würde es ebenfalls der Anordnung des Richters zuwiderlaufen. Somit ist auch der Freitag ausgeschlossen. Damit bleibt der Donnerstag als der letzte mögliche Tag. Aber Donnerstag ist auch ausgeschlossen, weil Sie am Mittwoch nachmittag noch am Leben wären und damit wüssten, dass der Donnerstag der Tag der Hinrichtung sein müsste.'

'Jetzt verstehe ich', sagte der Verurteilte und fühlte sich schon wesentlich wohler. 'Auf diese Art und Weise kann ich auch Mittwoch, Dienstag und Montag streichen. Dann bleibt nur noch morgen übrig, aber morgen kann ich nicht hingerichtet werden, weil ich es heute schon weiss!'

Kurz und gut, die Anordnung des Richters scheint sich selbst zu widerlegen. Es gibt keinen logischen Widerspruch in den beiden Urteilsergänzungen. Trotzdem kann offenbar das Urteil nicht ausgeführt werden - oder doch? Um dies zu klären, kehren wir zu dem Verurteilten in die Zelle zurück. Er ist durch die scheinbar unanfechtbare Logik überzeugt, dass er nicht hingerichtet werden kann, ohne dass dadurch die Bedingungen des Urteilsspruchs verletzt würden. Zu seiner grössten überraschung kam jedoch am Donnerstag morgen der Henker. Es ist klar, dass er ihn nicht erwartet hatte. Was noch mehr überrascht: Nun ist der Urteilsspruch des Richters völlig korrekt. Das Urteil kann vollstreckt werden, genau wie es der Richter verkündet hatte." Lässt dieser Beigeschmack der Logik, die von der Welt negiert wird, das Paradoxon nicht recht faszinierend erscheinen?

Aufruf an alle intelligenten Studenten!
Dipl. Ing. ABC kann seit der Lektüre des Paradoxons von der unerwarteten Hinrichtung seinen Verstand nicht mehr finden. Er soll sich hinter der Lösung versteckt haben. Wo ist sie? Erbete Mitteilung an Red.. Die Red.

Kapitel 4

Aussagenlogische Normalformen

4.1 Gegenstand, praktische Anwendung

Im letzten Kapitel haben wir folgendes Problem studiert: Gegeben war eine Aussageform. Gesucht waren dann alle möglichen Belegungen für diese Aussageform. Man musste also die Wahrheitstabelle finden. Dabei haben wir gesehen, dass äusserlich verschieden erscheinende Aussageformen dieselbe Wahrheitstabelle haben können.
In der Praxis hat man aber häufig das umgekehrte Problem: Gegeben ist eine Wahrheitstabelle. Dazu soll man eine Aussageform finden, die zur gegebenen Wahrheitstabelle gehört. *Aussagenlogische Normalformen* sind spezielle zusammengesetzte Aussagenformen, mit denen man die Lösung eines sochen Problems sehr rasch finden kann. Das ist in der Praxis wichtig.
Normalformen sind manchmal auch anderswo hilfreich: Um zwei Aussageformen zu vergleichen, kann man die Wahrheitstafel heranziehen. Es gibt aber noch einen andern Weg. Man sucht zu beiden gegebenen Aussageformen je einen ganz gewissen Typ einer standardisierten Normalform, die *kanonische Normalform* (auch *vollständige* Normalform). Stimmen die beiden kanonischen Normalformen bis auf die Reihenfolge der Terme überein, so sind die beiden gegebenen Aussageformen äquivalent.
Man unterscheidet zwei verschiedene Typen von aussagenlogischen Normalformen:

1. *Konjuktive Normalformen*
2. *Alternative Normalformen*

Statt *alternative Normalform* sind auch die Ausdrücke *alternierende Normalform, disjunktive Normalform* oder *adjunktive Normalform* gebräuchlich.

4.2 Definitionen

Da die Logik als eigenständige Disziplin eine noch relativ junge Wissenschaft ist, hat sich in der mathematischen Literatur bezüglich Logik noch kein einheitlicher Sprachgebrauch durchgesetzt. Das nachstehende Konzept folgt der bei Asser (Bibl.: asser) eingeschlagenen Richtung.

Seien H_1, H_2, ..., H_n, ..., H_{n+m} paarweise verschiedene Aussagenvariablen. ($n \geq 0$, $m \geq 0$, $m+n \geq 1$.) Damit bauen wir die Definition von *Normalformen* wie folgt auf:

Definition 4.1 (Einfache Terme, Konjunktions- und Adjunktionsterme) *:*

1. *Ein* **einfacher Term** *ist eine Aussagenvariable oder die Negation einer Aussagenvariablen (Negationsterm).*

2. *Ein* **Konjunktionsterm** *ist eine Konjuktion von einfachen Termen.*
   Konjuktionsterm $:= H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg H_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg H_{n+m} = \bigwedge_{i=1}^{n} H_i \wedge \bigwedge_{j=n+1}^{n+m} \neg H_j$.

3. *Ein* **Adjunktionsterm** *ist eine Adjunktion von einfachen Termen.*
   Adjunktionsterm $:= H_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_n \vee H_{n+1} \vee \ldots \vee \neg H_{n+m} = \bigvee_{i=1}^{n} H_i \vee \bigvee_{j=n+1}^{n+m} \neg H_j$.

4. *Wir verabreden noch, dass ein Konjunktionsterm zu einem „Konjunktionsterm mit nur einem einzigen Glied“ entartet sein darf. Dasselbe gilt für den Adjunktionsterm.*

Definition 4.2 (Enthaltensein von Konjunktions- und Adjunktionstermen) *:*

1. *T_0, T_1, T_2 seien Konjunktionsterme. „T_1 ist in T_2* **enthalten***“ bedeutet: Es gibt (symbolisch $\exists$) einen Term T_0 mit $T_1 \wedge T_0 \equiv T_2$.*

2. *R_0, R_1, R_2 seien jetzt Alternativterme. „R_1 ist in R_2* **enthalten***“ bedeutet: $\exists_{R_0}$ mit $R_1 \wedge R_0 \equiv R_2$.*

Definition 4.3 (Konjunktive und alternative Normalform) *:*

1. *Seien $A_1, \ldots, A_k$ Alternativterme. Dann heisst*
   $K \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \equiv \bigwedge_{i=1}^{k} A_i$ **konjunktive Normalform** *(kNF).*

2. *Seien $K_1, \ldots, K_k$ Konjunktionsterme. Dann heisst*
   $A \equiv K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_k \equiv \bigvee_{i=1}^{k} K_i$ **alternative Normalform** *(aNF).*

Bemerkungen:

1. Es gibt Autoren, die zusätzlich verlangen, dass bei einer kNF keiner der Alternativterme K_i in einem andern Alternativterm enthalten ist[5]. Ebenso für die Konjunktionsterme einer aNF[5]. Falls ein Alternativterm einer kNF in einem andern solchen Term enthalten ist, kann man den längern der beiden Terme weglassen. (Es gilt ja $(A_1 \vee A_2) \wedge A_1 \equiv A_1$). Ebenso bei einer aNF, wenn ein Konjunktionsterm in einem andern enthalten ist: Man kann dann den kürzern der beiden weglassen.

2. Wie schon bei den Adjunktions– und Konjunktionstermen verabreden wir auch hier, dass eine aNF zu einer „aNF mit nur einem einzigen Konjunktionsterm“ entartet sein darf. Dasselbe gilt für die kNF. Daher ist ein einfacher Term insbesondere auch eine aNF sowie auch eine kNF.

Beispiele:

1. $A \wedge B$ ist enthalten in $A \wedge B \wedge \neg C$, aber nicht in $A \wedge \neg B$

2. A ist aNF wie auch kNF (entarteter Fall).

3. $A \wedge \neg B \wedge C$ ist kNF (bestehend aus drei einfachen Termen) oder auch aNF (bestehend aus einem einzigen Konjunktionsterm).

4. $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee B$ ist aNF.

5. $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C)$ ist aNF.

6. $X \vee (A \wedge B(\vee C(\wedge D)))$ ist keine Normalform.

7. $A \vee (B \wedge C) \wedge (\neg C \vee D)$ ist ebenfalls keine Normalform.

[5] Z.B. bei Mendelson (Bibl.: mendelson) wird das Enthaltensein verlangt, hingegen z.B. bei Asser (Bibl.: asser) nicht. Beide Wege sind möglich.

4.3 Das Existenzproblem

Es gilt der folgende Satz über die Existenz einer äquivalenten kNF resp. aNF:

Satz 4.1 (Existenzsatz) *: Zu jeder Aussageform existiert eine äquivalente kNF sowie eine aNF.*

Bemerkung zum Beweis:

1. $\{\neg, \vee, \wedge\}$ ist Verknüpfungsbasis. Daher kann man die andern Junktoren $(\Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots)$ dadurch zum Verschwinden bringen, dass man Terme mit $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$ einer nach dem andern durch mögliche äquivalente Terme mit $\neg, \vee, \wedge$ ersetzt.
2. Man wendet die Regeln von De Morgan an: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$. Damit kann man Klammern wegschaffen und den Junktor $\neg$ vor die Variablen bringen.
3. Weiter kann man Klammern mit Hilfe des Distributivgesetzes in die gewünschte Position „verschieben" (z.B. mit $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$).

So gelingt es, unerwünschte Junktoren zu entfernen und $\neg, \vee, \wedge$ sowie die Klammern an den „richtigen Ort" zu verschieben.

Beispiele:

1. Mit Hilfe der Wahrheitstafel verifiziert man sofort:

2.
$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\begin{aligned}
X :\ &\equiv (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (B \vee A) \\
&\equiv ((A \wedge \neg B) \wedge (B \vee A))) \vee (\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \vee A)) \\
&\equiv ((A \wedge \neg B \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge A)) \vee ((\neg A \vee \neg\neg B) \wedge (\neg B \wedge \neg A)) \\
&\equiv f \vee (A \wedge \neg B) \vee (\lfloor(\neg A \vee B) \wedge \neg A\rfloor \wedge \neg B) \\
&\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\lfloor(\neg A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A)\rfloor \wedge \neg B) \\
&\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (B \wedge \neg A) \wedge \neg B) \\
&\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B).
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist schon eine aNF. Darin lässt sich aber $\neg B$ ausklammern und man erhält:

$$X \equiv \neg B \vee (A \wedge \neg A) \equiv \neg B.$$

$\neg B$ ist eine aNF wie auch eine kNF.

4.4 Das Eindeutigkeitsproblem

Eben haben wir gesehen, dass die Aussageform $X :\equiv (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ äquivalent ist zu den beiden aNF $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ und $\neg B$. Die Darstellung einer Aussageform durch eine aNF ist also nicht eindeutig. Das gleiche gilt natürlich für die kNF. (Beispiel: $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \equiv \neg B \wedge (A \vee \neg A) \equiv \neg B$..)
Es ist nun naheliegend, eine spezielle kNF oder aNF zu suchen, die *bis auf die Reihenfolge der Terme* **eindeutig** ist. Das erreichen wir durch *Ergänzung der fehlenden Variablen* in den einzelnen Adjunktions– resp. Konjunktionstermen. Wir können so Aussageformen erzeugen, in denen in jedem Adjunktions– oder Konjunktionsterm jede Variable genau einmal vorkommt. Das geschieht so:
Es fehle z.B. im Term T_i die Variable X_k.

1. Sei zuerst T_i ein Konjunktionsterm einer aNF. Dann erweitern wir T_i wie folgt:

$$T_i \equiv T_i \wedge w \equiv T_i \wedge (X_k \vee \neg X_k) \equiv (T_i \wedge X_k) \vee (T_i \wedge \neg X_k) \equiv T_{i_1} \vee T_{i_2}$$

Der Term T_i der aNF ist damit ersetzt worden durch eine Adjunktion von zwei erweiterten Konjunktionstermen, in denen jeweils T_i, aber auch X_k resp. $\neg X_k$ vorkommen. Das Resultat ist wieder eine aNF.

2. Sei jetzt R_j ein Adjunktionsterm einer kNF. Dann erweitern wir R_j wie folgt:

$$R_j \equiv R_j \vee f \equiv R_j \vee (X_k \wedge \neg X_k) \equiv (R_j \vee X_k) \wedge (R_j \vee \neg X_k) \equiv R_{j_1} \vee R_{j_2}$$

   Der Term R_j der kNF ist damit ersetzt worden durch eine Konjunktion von zwei erweiterten Adjunktionstermen, in denen jeweils R_j, aber auch X_k resp. $\neg X_k$ vorkommen. Das Resultat ist wieder eine kNF.

Da $A \wedge A \equiv A$ sowie $A \vee A \equiv A$ ist, können mehrfach vorkommende Terme gestrichen werden. Man kann also jede aNF resp. jede kNF in eine solche aNF resp. kNF verwandeln, in der jede anfangs vorkommende Variable in jedem Term genau einmal vorkommt und keine Terme mehrfach vorkommen. Da die Anzahl Variablen dann in jedem Term gleich gross ist, ist dann auch kein Term in einem andern enthalten. Wir definieren nun:

Definition 4.4 (Kanonische Normalform) *:*
Eine aNF resp. kNF, in der in jedem Term jede Variable genau einmal vorkommt, heisst **kanonische Normalform***.*

Die entstehenden kanonischen Normalformen kann man nach den Kommutativgesetzen für $\wedge$ und $\vee$ sogar nach folgenden Prinzipien eindeutig ordenen:

1. Ordne alle Terme nach aufsteigenden Variablennummern.

2. Ersetze in den Adjunktions– resp. Konjunktionsermen T_i die einfachen Terme durch die Ziffern 0 oder 1 nach folgender Regel: Falls der einfache Term eine Variable X_i ist, so ersetze diese durch 0. Falls aber der einfache Term eine negierte Variable $\neg X_i$ ist, so ersetze diese durch 1. Wenn man im so entstandenen Ausdruck die Junktoren weglässt, so erhält man statt dem Term T_i eine Dualzahl. Jeder Term T_i entspricht dann genau einer Dualzahl. Jetzt kann man demnach die Terme entsprechend der aufsteigenden Grösse der Dualzahlen ordnen.

So erhält man *geordnete kanonische Normalformen*. Für diese gilt ersichtlicherweise der Satz:

Satz 4.2 (Eindeutigkeitssatz) *: Zu jeder Aussageform existiert genau eine äquivalente geordnete kanonische aNF sowie kNF.*

4.5 Das Darstellungsproblem

Für gegebene Aussageformen lassen sich die kanonischen Formen sehr einfach aus der Wahrheitstabelle *ablesen*. In der Praxis ist sogar oft die Aussageform gar nicht bekannt, sondern nur die Wahrheitstabelle. Das damit gegebene Problem heisst *Darstellungsproblem*. Die sofort ablesbaren kanonischen Formen sind dann Aussageformen, die der gegebene Wahrheitstabelle genügen. Allerdings erhält man so meistens nicht die einfachsten oder kürzesten aller möglichen Aussageformen, die in Betracht kommen. Das Auffinden einer möglichst einfachen Form nennt man das *Vereinfachungsproblem*.
Wir wollen das Darstellungsproblem anhand eines Beispiels studieren. (Für das Vereinfachungsproblem muss auf den Teil *Boolsche Algebra* verwiesen werden. Eine Methode zur Vereinfachung bei gewissen vorgeschriebenen Junktoren ist z.B. die *Karnaugh-Methode*, in der mit Mengendiagrammen gearbeitet wird.)

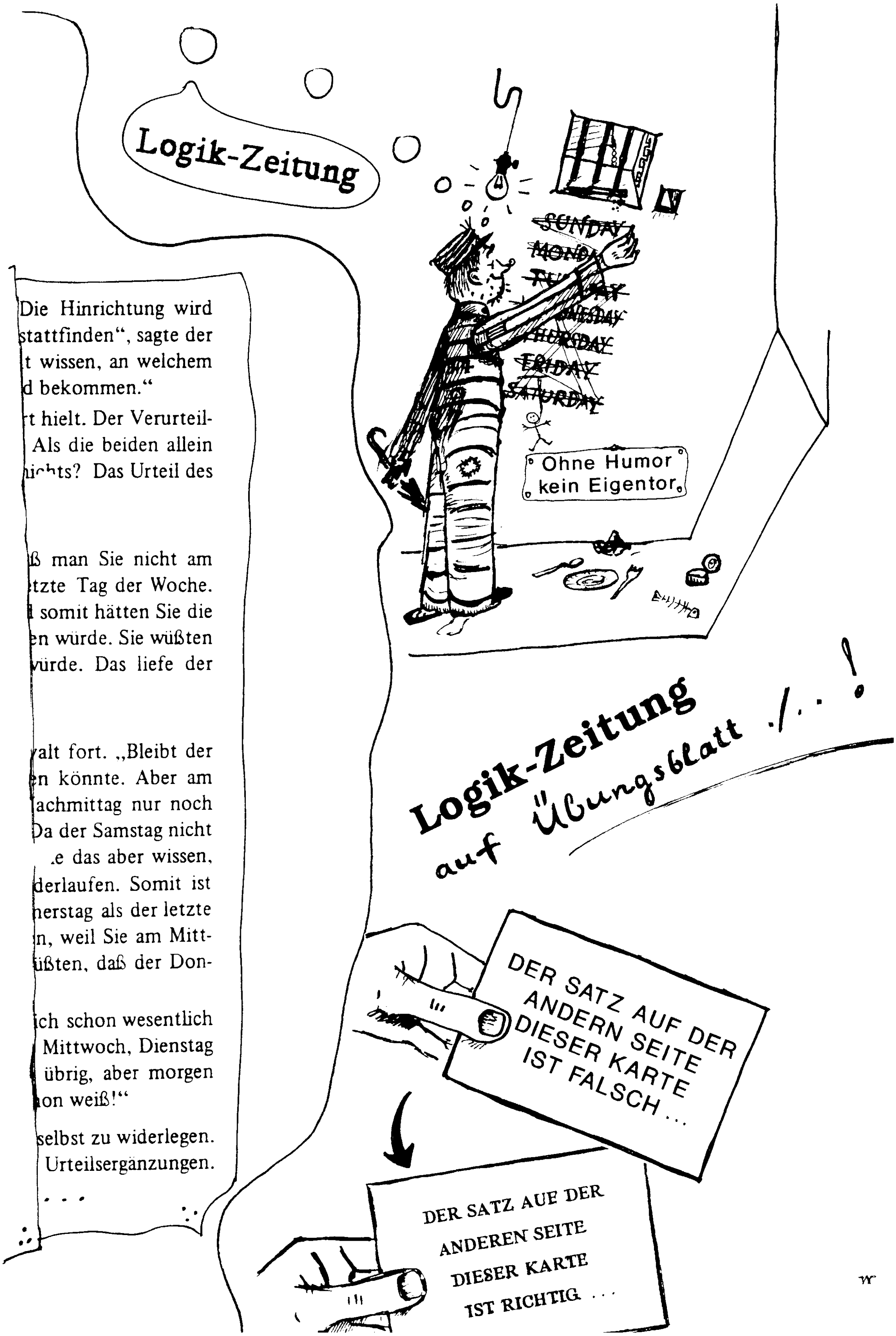
Beispiel: Gegeben sei die Aussageform $X \equiv (A \vee B) \Leftrightarrow \neg C$. Gesucht ist die äquivalente aNF. Zuerst stellen wir uns die zugehörige Wahrheitstabelle auf:

Zeilennummer	A	B	C	$X \equiv (A \vee B) \Leftrightarrow \neg C$
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0

X ist genau dann wahr, wenn wir eine der Belegungen haben, die gegeben ist durch die Zeilen 2, 3, 5 oder 7 der Wahrheitstabelle. Zeile 2 z.B. trifft zu, wenn A den Wahrheitswert 0 und B den Wahrheitswert 0 und C den Wahrheitswert 1 hat. D.h. wenn $\neg A$ den Wahrheitswert 1 und $\neg B$ den Wahrheitswert 1 und C den Wahrheitswert 1 hat. Das ist genau dann der Fall, wenn die Form $(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$ den Wahrheitswert 1 hat. (Bei allen andern Belegungen hat die letzte Aussageform den Wahrheitswert 0.) Somit trifft Zeile 2 zu, wenn $(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$ wahr ist. Genau so trifft Zeile 3 zu, wenn $(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$ wahr ist. Zeile 5 trifft zu, wenn $(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ wahr ist und Zeile 7, wenn $(A \wedge B \wedge \neg C)$ wahr ist. X ist wahr, wenn wir eine Belegung haben, die gegeben ist durch die wahre Zeile 2 oder die wahre Zeile 3 oder die wahre Zeile 5 oder die wahre Zeile 7. (Bei den andern Belegungen ist X falsch.) D.h. X ist genau dann wahr, wenn $(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$ oder $(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$ oder $(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ oder $(A \wedge B \wedge \neg C)$ wahr ist. Also ist X genau dann wahr, wenn $(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$ wahr ist. Bei den restlichen Belegungen der Variablen A, B und C ist X nicht wahr. Daher gilt:

$$X \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C).$$

Wir haben somit X *ersetzt durch eine kanonische aNF,* denn die gewonnenen Konjunktionsterme sind mit $\vee$ verknüpft. Durch den Ablesevorgang ist diese so gewonnene Form sogar geordnet.
Man kann sich daher folgendes Vorgehen merken: Streiche diejenigen Zeilen der Wahrheitstabelle, in denen hinten eine 0 steht. In den übrigbleibenden Zeilen ersetze man die Wahrheitswerte 1 durch die zur jeweiligen Kolonne gehörige Aussagenvariable, die Wahrheitswerte 0 durch die Negation der zur jeweiligen Kolonne gehörigen Aussagenvariablen und verknüpfe diese durch $\wedge$. So erhält man für jede bleibende Zeile einen Konjunktionsterm. Diese Terme verknüpfe man durch $\vee$.
Falls man dasselbe Verfahren auf diejenigen Zeilen anwendet, in denen hinten der Wahrheitswert 0 steht, so erhält man die aNF: $Y \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$. Diese aNF Y ist genau dann *falsch*, wenn X wahr ist. Daher ist $\neg Y$ genau dann wahr, wenn X wahr ist. Es gilt also $\neg Y \equiv X$. Für $\neg Y$ gilt aber nach den De Morganschen Regeln die Äquivalenz $\neg((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)) \equiv (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$. Das ist aber die geordnete kanonische kNF.
Die geordnete kanonische kNF erhält man also aus der Wahrheitstabelle, wenn man das oben beschriebene Verfahren auf diejenigen Zeilen anwendet, in denen hinten eine 0 steht und vor die erhaltene aNF den Junktor $\neg$ setzt. Nach den De Morganschen Regeln erhält man daraus die gesuchte kNF.


Logik-Zeitung
Die Hinrichtung wird
stattfinden", sagte der
t wissen, an welchem
d bekommen."
t hielt. Der Verurteil-
Als die beiden allein
ichts? Das Urteil des
ß man Sie nicht am
tzte Tag der Woche.
somit hätten Sie die
n würde. Sie wüßten
ürde. Das liefe der
alt fort. „Bleibt der
n könnte. Aber am
achmittag nur noch
Da der Samstag nicht
e das aber wissen,
derlaufen. Somit ist
erstag als der letzte
n, weil Sie am Mitt-
üßten, daß der Don-
ch schon wesentlich
Mittwoch, Dienstag
übrig, aber morgen
on weiß!"
selbst zu widerlegen.
Urteilsergänzungen.
SUNDAY
MONDAY
FRIDAY
SATURDAY
Ohne Humor kein Eigentor
Logik-Zeitung auf Übungsblatt ./. . !
DER SATZ AUF DER ANDERN SEITE DIESER KARTE IST FALSCH ...
DER SATZ AUF DER ANDEREN SEITE DIESER KARTE IST RICHTIG ...

Kapitel 5

Grenzen der Aussagenlogik, Quantoren und Ausblick

5.1 Grenzen der Aussagenlogik

In 2.1.1 haben wir den Begriff *„Aussage“* als *sprachliches Gebilde* verstanden, das eine *Wahrheit* oder eine *Unwahrheit* ausdrückt. Sprachliche Gebilde, mit denen man Wahrheiten oder Unwahrheiten ausdrücken kann, nennt man aber in der Grammatik *Sätze*. Beispiele:

1. Der Satz „Hans ist nicht hier“ ist jetzt entweder wahr oder falsch. Weitere Sätze:
2. „Hans füttert das Pferd.“
3. „Jetzt scheint draussen die Sonne.“
4. „Heute ist die Sonne im Osten zweimal aufgegangen.“
5. „Unser FC hat am letzten Samstag wieder einmal nicht gewonnen.“
6. „Eins und eins ist zwei.“
7. „$1 + 1 = 2$.“
8. „Auf der Rechnung der Firma Abschneider ist eins und eins gleich drei.“
9. „Aus $a = 6$ folgt $2a = 12$.“

Im Vergleich dazu sind die sprachlichen Gebilde „Hurra!“, „Ha ha ha!“, „Wie komm ich am schnellsten zum Park?“, „Komm her!“, „Hau ab!“ keine Aussagen. Es handelt sich um Exklamationen oder Interrogationen (Ausrufe, Fragen). Ebenso ist das Gebilde „X fährt Auto“ unbestimmt, also keine Aussage.
Historisch finden wir die Wurzeln der logischen Aussage bei Aristoteles. Statt von Aussagen redet man daher auch von *Aristotelischen Aussagen*. Wie man leicht nachprüft, sind solche Aussagen einfache Sätze, bestehend aus Subjekt, Prädikat und Objekt. Dabei kann das Subjekt oder das Objekt noch durch ein Attribut erweitert sein oder das Prädikat durch ein Adverbiale. Daneben finden wir solche einfache Sätze als Teile von zusammengesetzten Sätzen, von Satzverbindungen und Satzgefügen. Details dazu finden sich in jedem einschlägigen Schulbuch unter dem Titel „Satzlehre“. Es würde den Rahmen der mathematischen Logik sprengen, die Grundbegriffe der Grammatik hier auch nochmals aufzuarbeiten. Sie seien vorausgesetzt.
Betrachten wir den folgenden Satz: „Hans füttert das Pferd.“

$$\overbrace{\text{Hans}}^{\text{Subjekt}} \qquad \underbrace{\overbrace{\text{füttert}}^{\text{Prädikat}} \qquad \overbrace{\text{das Pferd.}}^{\text{Objekt}}}_{\text{Prädikativer Ausdruck}} \qquad\qquad \text{Das ist eine Aussage.}$$

Betrachten wir dagegen den Satz: „X füttert das Pferd", so kann man nicht mehr entscheiden, ob das jetzt wahr oder falsch ist. Ein Teil des Satzes ist hier variabel und unabhängig: Für X kann man ja irgend ein Subjekt einsetzen. Setzt man für X „Hans" ein, so ist der nun entstehende Satz in unserem Kontext wahr. Setzt man aber für X „Die Dampflokomotive" ein, so ist der dann entstehende Satz ganz sicher falsch. Da X für das Subjekt steht, nennt man X *„freie Subjektvariable"*.

Ähnlich gelagert liegt die Sache bei „Aus $x = 5$ folgt $2x = 10$", resp. bei „$(x = 5) \Rightarrow (x = 10)$". $(x = 5)$ ist selbst eine Aussagenvariable, denn darin steckt die Variable x. Der Ausdruck wird zu einer Aussage, wenn man für x einen Wert einsetzt. Setzt man für x den Wert 5, so entsteht eine wahre Aussage. Setzt man hingegen für x den Wert 6, so entsteht eine falsche Aussage. Die Aussagenvariable $X \equiv (x = 5)$ wird demnach im Ausdruck $(x = 5) \Rightarrow (x = 10)$ zu einer Subjektvariablen, denn sie steht an der Stelle des Subjekts. $\Rightarrow$ hat die Bedeutung des Prädikats, $(x = 10)$ die Bedeutung einer *Objektvariablen*. Durch Einsetzung einer Zahl für x ensteht dann aus $(x = 5) \Rightarrow (x = 10)$ eine zusammengesetzte Aussage, die aus Zahlengleichungen als Teilaussagen besteht. Lässt man hingegen x stehen, so ist $(x = 5) \Rightarrow (x = 10)$ ebenfalls eine Aussage, die aber nicht in Teilaussagen aufspaltbar ist, sondern nur in zwei Aussagenvariablen und in einen Junktor. Hingegen ist die Zahlenvariable x selbst keine Aussage, sondern nur Teil einer Aussagenvariablen.
Bei den jetzt besprochenen Beispielen fällt aber auf, dass eine Aussage eine *innere Struktur* haben kann. So sind z.B. Subjekt, Prädikat und Objekt Teile einer Aussage, die aber einzeln manipuliert werden können, selbst aber noch keine Aussagen sind. Die Aussagenlogik alleine liefert keine Handhabe für eine solche Manipulation. Man stösst so hier an die Grenzen der Aussagenlogik: Mit Aussagenlogik alleine ist noch längst nicht alles getan!

5.2 Quantoren

Wir betrachten als Beispiel folgende drei Aussagen:

(1)	A	$\equiv$	Alle Fische leben im Wasser.	Symbolisch:	(	Alle ⟩ Fisch ⟩	Prädikat(Wasser)	)
(2)	B	$\equiv$	Die Forelle ist ein Fisch.	–	(	Forelle ⟩	Prädikat(Fisch)	)
(3)	C	$\equiv$	Die Forelle lebt im Wasser.	–	(	Forelle ⟩	Prädikat(Wasser)	)

Offenbar ist (3) aus Teilen von (1) und (2) durch Neukombination entstanden. Der prädikative Ausdruck von (2) ist mit dem Subjekt von (1) zu (3) kombiniert worden. Für die Kombination von solchen Teilen von Aussagen zu einer neuen Aussage bietet aber die Aussagenlogik keine Regeln. $A \wedge B \vdash C$ kann also nicht mit den Regeln der Aussagenlogik hergeleitet werden, da hier die innere Struktur einer Aussage wesentlich ist. Die Theorie, die diesem Problem gerecht wird, nennen wir *Prädikatenlogik*. Man unterscheidet da sogar *verschiedene Stufen von Prädikatenlogiken (Stufenlogik)*.
In der Prädikatenlogik studiert man nicht nur Aussagen und Aussagenvariablen, sondern auch *Subjekte*, *Subjektvariablen*, *Prädikate*, *Prädikatenvariablen* und auch *Quantoren*. Quantoren sind logische Zeichen oder Wörter, die eine *Quantität* ausdrücken, im Gegensatz zu Aussagen oder Aussagenvariablen, die eine *Qualität* wiedergeben. Da Quantoren eine sehr kompakte Schreibweise mathematischer Aussagen erlauben, werden sie in der Hochschulmathematik sehr häufig verwendet. Das gilt in der Folge natürlich auch für die Ingenieurmathematik von Hochschulniveau!
Für uns sind zwei Quantoren wichtig: der *Allquantor* und der *Existenzquantor*. Zeichen und Bedeutung finden sich in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Name	Symbol	Weiteres Symbol	Bedeutung
Allquantor	$\forall$	$\bigwedge$	Für alle
Existenzquantor	$\exists$	$\bigvee$	Es gibt

Die folgenden Beispiele mögen zur weiteren Erklärung dienen. Sei $M := \{1, 2, 3, 4\}$

1. $\forall_{x \in M} : x < 5$ bedeutet: $(1 < 5) \wedge (2 < 5) \wedge (3 < 5) \wedge (4 < 5)$.
2. $\exists_{x \in M} : x = 3$ bedeutet: $(1 = 3) \vee (2 = 3) \vee (3 = 3) \vee (4 = 3)$.

Da im ersten Beispiel alle Zahlen aus M kleiner 5 sind und im zweiten Beispiel eine Zahl aus M existiert, die die Gleichung $x = 3$ erfüllt (es gilt ja $3 = 3$), haben wir in beiden Fällen wahre Aussagen. x ist hier in beiden Beispielen eine an den Quantor gebundene Subjektvariable. (*Gebundene* Subjektvariable.)

5.3 Ausblick: Weitere Resultate der Logik

Ohne Beweis wollen wir hier noch einige Resultate besprechen, die praktisch bedeutsam sind. Die Beweise dazu sind relativ sehr lang und setzen eine gehörige Portion Übung im mathematisch–logischen Denken voraus.

Satz 5.1 (Vollständigkeitssatz) *: Die Aussagenlogik ist vollständig.*

Vollständig bedeutet hier, dass jeder wahre Satz der Aussagenlogik auch in endlich vielen Schritten (d.h. in einer *Beweiskette*) herleitbar ist. Dies kann man also beweisen. „Q ist wahr“ bedeutet also, dass es einen Beweis (d.h. einen korrekten logischen Schluss) $w \vdash Q$ gibt.
Achtung! Für die höhere Prädikatenlogik gilt dieser Satz nicht mehr! Das bedeutet, dass in der höheren Prädikatenlogik wahre Sätze existieren, zu denen es keine endliche Beweiskette mehr gibt, die in derselben Stufe der Prädikatenlogik formulierbar ist. Man kann also beweisen, dass es Sätze gibt, die im gegebenen Rahmen nicht beweisbar sind, dass also die Menge der wahren Sätze grösser ist als die Menge der herleitbaren Sätze. Das zeigen die Resultate von Gödel aus den Dreissigerjahren des zwanzigsten Jahrhunderts. Turing und andere sind ebenfalls auf diesem Gebiet zu Resultaten gelangt, die Auswirkungen auf das Problem der Berechenbarkeit haben.
Weiter gilt der folgende Satz:

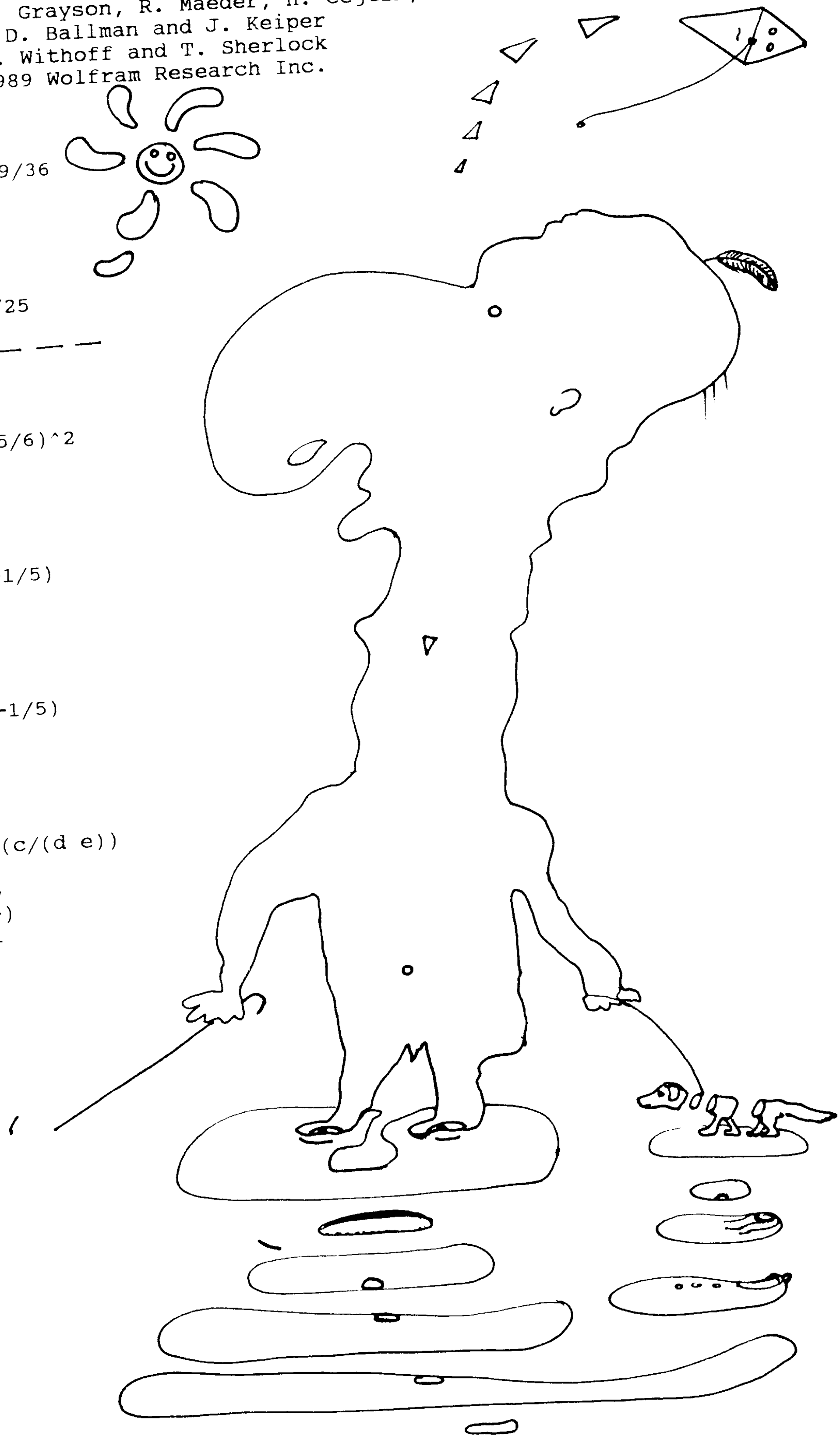
Satz 5.2 (Widerspruchsfreiheit der Aussagenlogik) *: Die Aussagenlogik ist widerspruchsfrei.*

Das bedeutet, dass in der Aussagenlogik kein Widerspruch entstehen kann, dass also z.B. $P \wedge \neg P$ nicht herleitbar ist, egal um welche Aussage oder Aussageform P es sich handelt. Mit andern Worten: $w \not\vdash P \wedge \neg P$ oder auch $w \not\vdash f$.
Wie wir später im Beispiel der *Schaltalgebra* sehen werden, genügt die Aussagenlogik vollständig für die Maschinenverarbeitung (Bit–Maschinen, von Neumann-Maschinen). Denn alle Programme werden ja mit Schaltungen der gegebenen Hardware abgearbeitet. Und die Schaltungen genügen den Regeln der Schaltalgebra. D.h.: Was mit den klassischen Computern machbar ist, liegt alles im Rahmen der Aussagenlogik. Andererseits lassen sich Probleme, deren Formulierung nicht auf die Aussagenlogik zurückführbar sind, die also wirklich der Prädikatenlogik bedürfen (wie etwa Quantifizierungen über unendlichen Mengen), mit dem klassischen Computer nicht behandeln. Ebenso solche, die von rein Qualitativem handeln, sich vom Gegenstand her nicht auf Quantifizierbares reduzieren lassen[1]. Darunter fallen Probleme der philosophisch–humanwissenschaftlichen Disziplinen. Prädikatenlogik lässt sich eben nicht vollkommen auf Maschinen zurückführen und damit auf Schaltalgebra und auf Aussagenlogik, auch wenn die Intelligenz dieser Maschinen noch so künstlich ist. Sonst käme man ja mit der Aussagenlogik alleine aus. Ein Grundproblem ist wohl, dass eine endliche Maschine mit endlichen Algorithmen nicht über unendlichen Mengen abstrahieren kann wie ein Mensch, der einen nicht abbrechenden Prozess wieder als aktuales Objekt begreifen und damit arbeiten kann. Der Mensch hat die Fähigkeit der gezielten, erfolgbringenden Abstraktion, der Bildung neuer, genialer Begriffe aus einem Akt des Wollens heraus. Die Maschine hingegen kann nicht wollen, sie kann nur befolgen, ist immer Sklave eines Programms. Ein anderes Grundproblem entsteht nun auch aus der Einsicht heraus, dass Qualitäten und ihre Beziehungen sich nicht immer auf Quantitäten und deren Beziehungen reduzieren lassen. . .

[1] Die Strömung, in der diese Reduktion in völliger Ignoranz der Ergebnisse der Logik trotzdem versucht wird, nennt man *Reduktionismus*

Index

```
thematica (MS-DOS 386/7) 1.2 (September 27, 1989) [With pre-loaded data]
 S. Wolfram, D. Grayson, R. Maeder, H. Cejtin,
 S. Omohundro, D. Ballman and J. Keiper
th I. Rivin, D. Withoff and T. Sherlock
pyright 1988,1989 Wolfram Research Inc.

Aufgabe 1 *

n[1]:= a=1/49-29/36

          1385
ut[1]= -(----)
          1764

n[2]:= b=1/9-1/25

        16
ut[2]= ---
       225

n[3]:= c=(1/7+5/6)^2

       1681
ut[3]= ----
       1764

In[4]:= d=(1/3+1/5)

         8
Out[4]= --
        15

In[5]:= e=(1/3-1/5)

         2
Out[5]= --
        15

In[6]:= (a/b)/(c/(d e))

           1385
Out[6]= -(----)
           1681
```



Literaturverzeichnis

[1] Asser. Einführung in die mathematische Logik *Teile 1, 2 und 3*. Verlag Harri Deutsch (Bibl.: asser)

[2] Church. Introduction to Mathematical Logic. Princeton University Press (Bibl.: church)

[3] Deller. Boolscha Algebra. Diesterweg (Bibl.: deller)

[4] Hermes. Einführung in die mathematische Logik. Teubner Verlag Stuttgart (Bibl.: hermes)

[5] Hilbert, Ackermann. Grundzüge der theoretischen Logik. Springer-Verlag (Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarst., Bd. 27) (Bibl.: hilbert)

[6] Jehle. Boolsche Algebra. Bayrischer Schulbuchverlag (Bibl.: jehle)

[7] Lipschutz. Finite Mathematik. Reihe SCHAUM, Mac Graw Hill (Bibl.: lipschutz)

[8] Mendelson. Boolscha Algebra und logische Schaltungen. Reihe SCHAUM, Mac Graw Hill (Bibl.: mendelson)

[9] Shoenfield. Mathematical Logic. Addison–Wesley Publishing Company (Bibl.: shoen)

[10] Tarski. Einführung in die mathematische Logik. Vandenhoeck & Ruprecht-Verlag (Bibl.: tarski)

[11] van Dahlen. Logic and Structure. Springer-Verlag (Universitätstext) (Bibl.: vandalen)

[12] Vom Autor. *DIYMU* (Do it yourself Mathematik Übungsbuch). Ingenieurschule Biel 1991 (Bibl.: wirz)

[13] Vom Autor. Mathematik für Ingenieure *Teil 1* Einführung. Ingenieurschule Biel 1993 (Bibl.: wirz1)