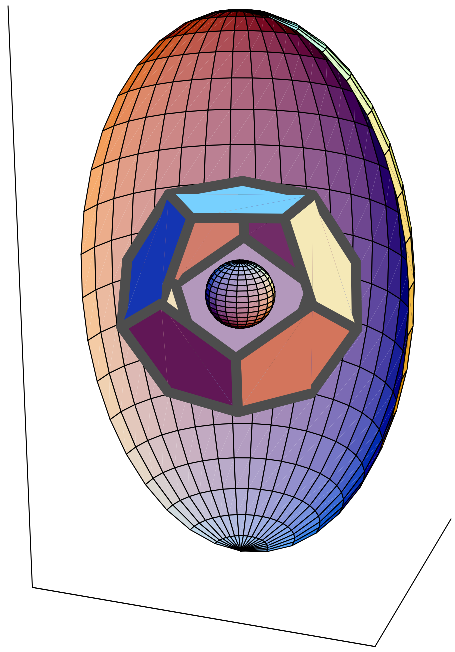
Mathematikkurs für Ingenieure
Teil 5 ◇ Einfache Standard–Funktionen



von

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel

Nach den NeXT–Crash von 1999 restaurierte Ausgabe vom 24. Mai 2005

WIR/NeXT/93/05/LaTex/Teil7.tex

Teil 5 eines Repetitoriums und Textbuches zur Begleitung und Ergänzung des Unterrichts.
Geplante Anzahl Teile: Noch offen.
Produziert mit LaTeX auf NeXT-Computer.
Viele Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

1999 hat der Autor einen Computer–Crash erlebt. Infolge des dadurch provozierten Systemwechsels haben einige Graphiken sehr gelitten. Sie werden neu erstellt, sobald die Zeit dafür vorhanden ist.

Weisheit — wissen was wichtig ist . . . und Bildung ist auch die Fähigkeit, Wesentliches vom Unwesentlichen zu unterscheiden, reif zu urteilen . . .

Alte Sprüche

Adresse des Autors:

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Ingenieurschule Biel (HTL) *(Ingenieurschule des Kt. Bern, Fachhochschule geplant ab 1997)*
Quellgasse 21
Postfach 1180
CH-2501 Biel-Bienne
Tel. (..41) (0)32 266 111, neu 3216 111

Repetitorium: Einfache Standard–Funktionen

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen: Grundlagen **5**
1.1 Werkzeuge . . . 5
1.1.1 Einleitung . . . 5
1.1.2 Reelle Zahlen . . . 5
1.1.3 Elemente der Darstellung von Funktionen . . . 6
1.2 Einige wichtige Funktionenklassen . . . 8
1.2.1 Gauss–Klammer–Funktion . . . 8
1.2.2 Signum–Funktion . . . 9
1.2.3 Betrags–Funktion . . . 9
1.2.4 Zahlenfolgen . . . 10
1.2.5 Lineare und konstante Funktion . . . 11
1.2.6 Quadratische Funktionen . . . 13
1.2.7 Verschiebung und Streckung des Koordinatensystems . . . 15
1.2.8 Potenzfunktionen, Hyperbeln . . . 16
1.2.9 Asymptoten, Pole . . . 16
1.2.10 Beschränkte Funktionen . . . 18
1.2.11 Stückweise und punktweise definierte Funktionen . . . 18
1.2.12 Monotonie, strenge Monotonie . . . 20
1.2.13 Gerade und ungerade Funktionen . . . 21
1.2.14 Polynome, Polynomfunktionen, ganzrationale Funktionen . . . 22
1.2.15 Gebrochen rationale Funktionen . . . 22
1.2.16 Umkehrfunktionen . . . 23
1.2.17 Wurzelfunktionen . . . 25
1.2.18 Winkelfunktionen . . . 25
1.2.19 Arcusfunktionen . . . 29
1.2.20 Exponentialfunktionen . . . 30
1.2.21 Logarithmusfunktionen . . . 31
1.2.22 Hyperbolische Funktionen . . . 33
1.2.23 Areafunktionen . . . 34
1.2.24 Funktionen in Polarkoordinatendarstellung . . . 34
1.2.25 Einteilung der reellen Funktionen . . . 35
1.2.26 Verkettete Funktionen . . . 35
1.2.27 Implizit definierte Funktionen . . . 35
1.2.28 Funktionen durch n gegebene Messpunkte . . . 36
1.2.29 Anzahlfunktionen . . . 37
1.2.30 Logische Funktionen . . . 37
1.3 Übungen . . . 38

2 Gleichungen **39**
2.1 Allgemeines 39
2.1.1 Definitionen 39
2.1.2 Ganz rationale Gleichungen 40
2.1.3 Ungleichungen 40
2.2 Übungen 41

A Aus dem DIYMU **49**

Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

Der in dieser Zusammenstellung dargebotene Stoff sollte einem Studenten einer Fachhochschule zum grössten Teil von der Berufsmittelschule resp. von der Mittelschule her bekannt sein. Und trotzdem... Immer kann man wieder Lücken entdecken. Dem einen dient diese Sammlung daher als Lückenstopfer, dem andern als Übersicht, dem dritten als Nachschlagemöglichkeit, mit kleinem Aufwand zu beschaffen. Der Text ist in Skriptform abgefasst. Das bedeutet, dass er in äusserst knapper Fassung nur das wesentliche Skelett des Stoffinhalts wiedergibt. Für weitere und ausführliche Erklärungen, Beispiele, exakte Beweise und erweiternde Ausführungen ergeht daher an den Studenten der Rat, ein oder mehrere Lehrbücher beizuziehen. Studieren bedeutet ja zu einem wesentlichen Teil, sein Wissen selbständig, fleissig, zielstrebig, beharrlich mit Hilfe der Literatur zu erweitern und zu vertiefen, streckenweise sogar aus eigener Kraft selbständig zu erarbeiten, zu festigen und anzuwenden. Ein Skript ist dabei nur ein Wegweiser — und nie ein Lehrbuchersatz. Welche Lehrbücher jemand verwenden will, ist jedem freigestellt. Das hier angegangene Thema findet man vielen Unterrichtswerken dargestellt. Eine Liste von ausgewählter, heute verfügbarer einschlägiger Literatur, die für das Niveau dienlich sein mag, findet sich hinten im Literaturverzeichnis.

Im Sommer 1996 | Der Autor

Abbildung 1: Ohne Worte ...

Kapitel 1

Funktionen: Grundlagen

1.1 Werkzeuge

1.1.1 Einleitung

Wieso sind Funktionen so wichtig in Technik und Naturwissenschaften? — Weil man sehr oft das Problem hat, das Verhalten einer interessanten Grösse in Abhängigkeit von einer andern Grösse zu beschreiben. Z.B. das Verhalten des elektrischen Stromes I in Abhängigkeit von der Zeit t, $t \in [t_1, t_2]$. Sei etwa $I = I_0 \cos(t)$. I hängt also hier von t ab, ändert sich mit t, wobei auch die Zeit t sich immer ändert, also variabel ist. Man kann sie ja nicht aufhalten. Daher ist t eine unabhängige Variable und I die abhängige Variable. Man hat so eine Zuordnung oder Abbildung $t \mapsto I$, $I = I(t)$; (t, I) ist ja ein geordnetes Paar. Diese Zuordnung ist trivialerweise linkstotal und rechtseindeutig[1]. Linkstotal, weil es zu jedem $t \in [t_1, t_2]$ einen Funktionswert $I(t)$ gibt, rechtseindeutig weil der Funktionswert $I(t)$ immer eindeutig ist und es zu einem t nie zwei verschiedene Funktionswerte $I(t)$ geben kann.
Das Verhalten einer interessanten Grösse in Abhängigkeit von einer andern Grösse beschreiben wir daher durch mathematische Funktionen. Abhängige und unabhängige Grössen sind bei uns fast immer irgendwelche Zahlen, die wir oft auf Skalen von Messinstrumenten ablesen können. Wir geben sie dann in Form von Dezimalbrüchen an, haben also meistens mit reellen Zahlen zu tun.

1.1.2 Reelle Zahlen

In diesem Teil werden wir nur Funktionen betrachten, die auf den *reellen Zahlen* $\mathbf{R}$ oder auf Teilmengen davon definiert sind. Daher sprechen wir hier von *reellen Funktionen*. Die reellen Zahlen nehmen wir als gegeben an. Man kann sie sich vorstellen als die Menge aller erdenklichen endlichen oder unendlichen Dezimalbrüche, periodische oder nicht–periodische. Sie werden genauer in der Zahlenlehre besprochen. Folgende Eigenschaften dieser Zahlen sind für unsere Belange hier wesentlich:

Satz 1.1 (Wichtige Eigenschaften der reellen Zahlen) *:*

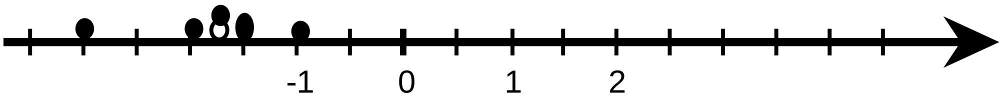
1. $\mathbf{R}$ *ist* **geordnet***:* $\forall_{a,b\in\mathbf{R}} : a < b \quad \dot\vee \quad a = b \quad \dot\vee \quad a > b.$
2. $\mathbf{R}$ *ist* **lückenlos***.*
3. $\mathbf{R}$ *ist* **dicht***.*

Die reellen Zahlen $\mathbf{R}$ sind *lückenlos* im Gegensatz zu den rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$, wo es ja *Lücken* gibt: Z.B. bei $\sqrt{2}$ ist in $\mathbf{Q}$ eine Lücke, denn $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Man kann aber $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen (Brüche) beliebig genau annähern, ohne jedoch den exakten Wert mit einer rationalen Zahl je zu treffen. In jeder noch so kleinen Umgebung oder Nachbarschaft von $\sqrt{2}$ gibt es immer rationale Zahlen. $\sqrt{2}$ selbst aber ist keine

[1] Vgl. Teil 2, Mengen, Relationen, Funktionen

solche: Da klafft eine Lücke — obschon $\sqrt{2}$ als Diagonale des Einheitsquadrats konstruierbar ist.
Die reellen Zahlen **Q** sind *dicht*, wie schon die rationalen Zahlen **Q**: Zu zwei Zahlen r_1 und r_2, wie nahe beieinander sie auch immer gelegen sind, gibt es immer eine weitere Zahl r_3, die dazwischen liegt. Z.B. der Mittelwert $\frac{r_1+r_2}{2}$ hat diese Eigenschaft: $r_1 < r_3 = \frac{r_1+r_2}{2} < r_2$. Wenn man die Zahlen sich auf der *Zahlengeraden*, d.h. auf einer äquidistant skalierten Geraden (auch *Zahlenstrahl*) dargestellt denkt, so gibt es zwischen beliebigen Punkten immer einen neuen Punkt – und zwischen einem alten und dem neuen wieder einen neuen und so fort, überall gibt es demnach Punkte, sie liegen *dicht* (vgl. Abb. 1.1).

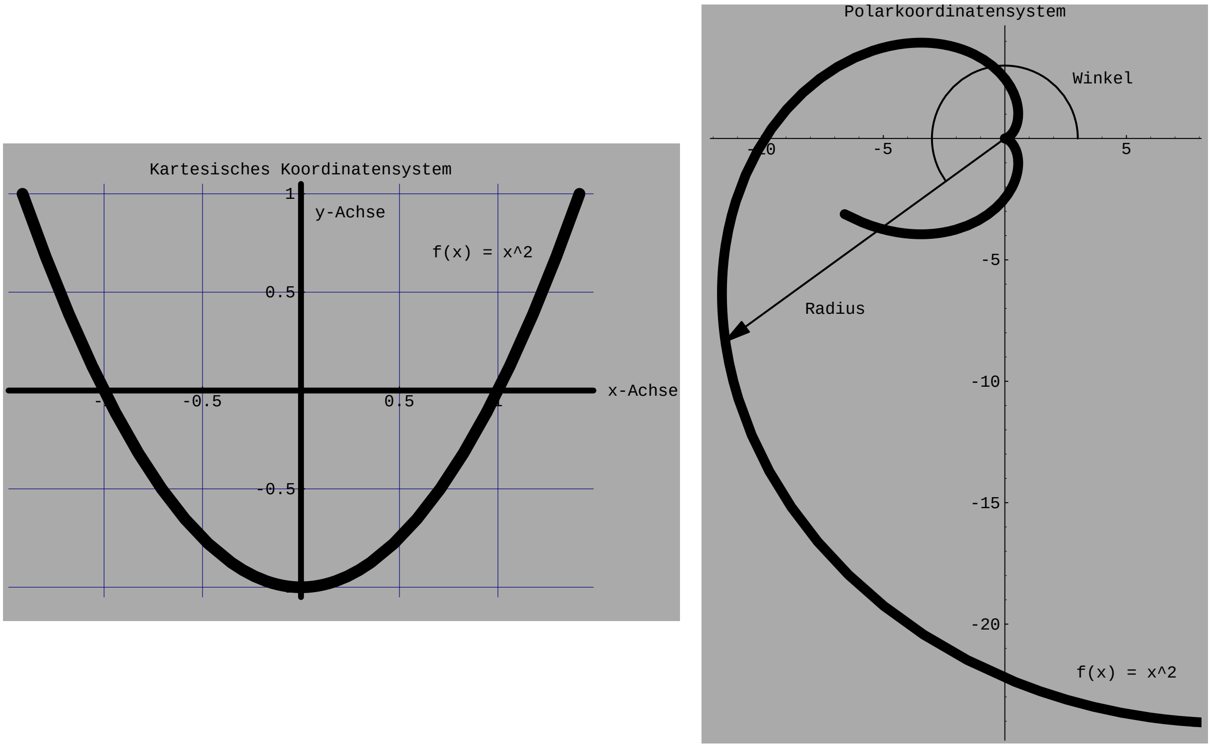
Abbildung 1.1: Zahlengerade



1.1.3 Elemente der Darstellung von Funktionen

Koordinatensysteme

Abbildung 1.2: Gängige Koordinatensysteme, $f(x) = x^2$, $r(\varphi) = \varphi^2$



Um reelle Funktionen bildlich wiederzugeben, verwendet man wohl am häufigsten die Darstellung des Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem[2]. Ein solches besteht bekanntlich aus zwei aufeinander

[2] nach Kartesius oder Descartes, franz. Philosoph und Mathematiker (1596 – 1650), der Begründer der analytischen Geometrie

rechtwinklig stehenden Achsen mit der gleichen äquidistanten Skalierung auf beiden Achsen. Manchmal sind auch andere Koordinatensysteme sinnvoll, z.B. Polarkoordinaten: Die unabhängige Variable wird dabei als Winkel φ abgetragen, die abhängige als Radius $r = f(\varphi)$. Der Graph besteht jeweils aus den Punkten $\{(x, y)|\, y = f(x)\}$ resp. $\{(\varphi, r)|\, r = f(\varphi)\}$.

Definitionsbereich, Wertebereich

Bei reellen Funktionen können wir die Definitionen des Definitions– oder des Wertebereichs wie folgt anpassen[3]:

Definition 1.1 (Definitionsbereich, Wertebereich, Wertevorrat) *:*

Definitionsbereich[4] D_f *von f:* $\quad D_f = \{x \in \mathbf{R}|\, f(x) \text{ ist definiert}\}$

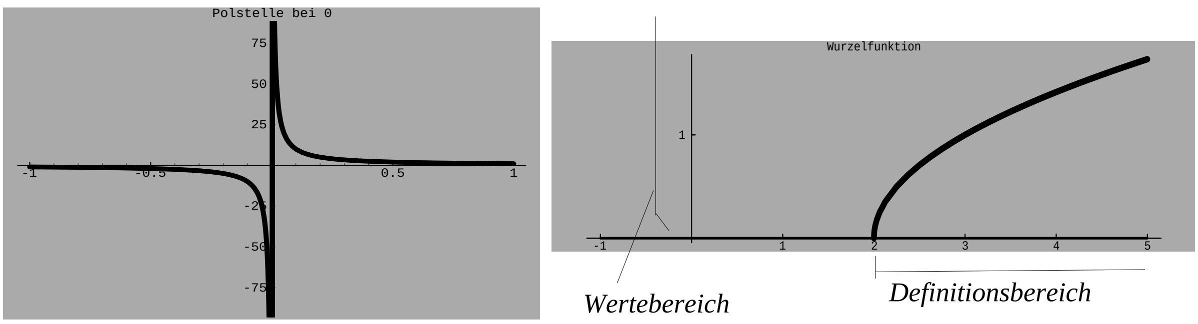
Wertebereich[5] W_f *von f:* $\quad W_f = \{y \in \mathbf{R}|\, \exists_{x\in\mathbf{R}} : y = f(x)\}$

Wertevorrat B *:* $\quad B = \{y \in \mathbf{R}|\, y \text{ steht als Bild zur Verfügung}\}$

Somit ist f eine Funktion mit $D_f \overset{surjektiv}{\longmapsto} W_f$ und $D_f \times W_f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Beispiele:

Abbildung 1.3: Definitionsbereich und Wertebereich



In Abb. 1.3 sind folgende Funktionen dargestellt:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D_f = \dot{\mathbf{R}} = \{x \in \mathbf{R}|\, x \neq 0\}$ und $W_f = \dot{\mathbf{R}}$.
2. $f(x) = \sqrt{x-2}$ mit $D_f = \{x \in \mathbf{R}|\, x \geq 2\}$ und $W_f = \mathbf{R}_0^+ = \{x \in \mathbf{R}|\, x \geq 0\}$ (eine *Wurzelfunktion*).

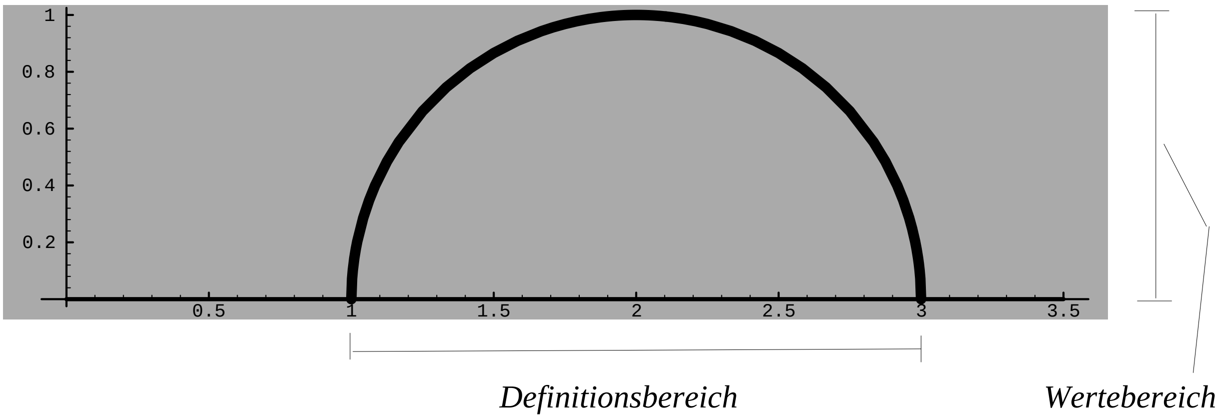
Wer einen graphikfähigen Taschenrechner besitzt, kann sich rasch solche Bilder ausgeben lassen. Wichtig ist dabei die vernünftige Wahl der Plotbereiche. Ohne Rechner macht man sich wie eh und je eine vernünftige *Wertetabelle*: Man rechnet zu einigen sinnvoll ausgewählten x-Werten die zugehörigen Funktionswerte aus.

Intervalle

Bei der Einführung in die (resp. der Repetition der) Mengenlehre sind die *Intervalle* ausführlich besprochen worden (Teil III, 1.1.11, *Einige Anwendungen in der Analysis: Intervalle*). Wir greiffen hier darauf zurück. In Abb. 1.3 besteht bei der Funktion im Bild links D_f aus zwei halboffenen unendlichen Intervallen. Im Bild rechts ist D_f ebenfalls ein halboffenes unendliches Intervall. Bei der Funktion $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{-x+3}$ (vgl. Abb. 1.4) ist D_f das abgeschlossene Intervall $[1, 3] = \{x \in \mathbf{R}|1 \leq x \leq 3\}$. Ein Beispiel für ein offenes Intervall ist $(1, 3) = \{x \in \mathbf{R}|1 < x < 3\}$

[3] Definitions– und Wertebereich sind in Teil 3 allgemein definiert worden.

Abbildung 1.4: Abgeschlossene Intervalle als Definitionsbereich und Wertebereich



Zur Gleichheit zweier Funktionen

Wir legen fest:

Definition 1.2 (Gleichheit von Funktionen) *: Zwei Funktionen f und g heissen* **gleich im Intervall** I *, wenn sie in I dieselben Funktionswerte annehmen. Mit logischen Symbolen geschrieben:*

$$f \equiv g \quad in \quad I :\Longleftrightarrow \forall_{x\in I} : f(x) = g(x).$$

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & : \; x < 3 \\ x^2 & : \; x \geq 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & : \; x \leq 5 \\ x^3 & : \; x > 5 \end{cases}$$

Hier ist $f \equiv g$ in $I = [3, 5]$.

Bemerkung: Später wird in der Analysis manchmal auch eine *abgewandelte Definition* nötig sein: Man akzeptiert vielfach zwei Funktionen als gleich, wenn sie sich nur auf einer *Menge vom Mass* 0 unterscheiden. Davon später.

1.2 Einige wichtige Funktionenklassen

1.2.1 Gauss–Klammer–Funktion

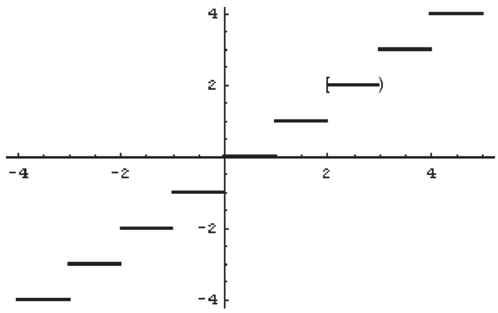
Diese Funktion ist heute vielen von den Programmiersprachen her bekannt: *INT* im Modula II oder *Floor* im *Mathematica*. Sei $n \in \mathbf{Z}$. Wir definieren:

Definition 1.3 (Gauss–Klammer–Funktionen) *:*

$$f(x) = [x] := n \quad \textit{für} \quad x \in [n, n+1)$$

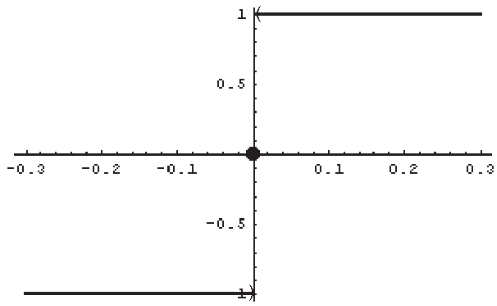
Diese Funktion gehört zum Typ der **Treppenfunktionen**, ein Begriff, der hier selbsterklärend ist.

Abbildung 1.5: Gauss–Klammer–Funktion



1.2.2 Signum–Funktion

Abbildung 1.6: Signum-Funktion



Signum bedeutet bei uns „Vorzeichen“. Wir definieren:

Definition 1.4 (Signum–Funktionen) *:*

$$f(x) = sgn(x) := \begin{cases} +1 & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -1 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

Satz 1.2 (Eigenschaft der Signum–Funktion) *:*

$$sgn(x \cdot y) = sgn(x) \cdot sgn(y)$$

Diese Behauptung verifiziert man z.B. durch nachrechnen bei allen Kombinationen von $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ und $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$. (Übungsaufgabe!)

1.2.3 Betrags–Funktion

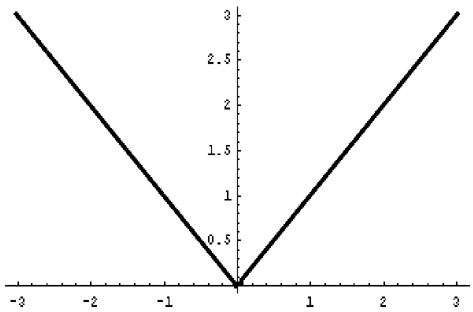
Die Funktion

Wir definieren:

Definition 1.5 (Betrags–Funktionen) *:*

$$f(x) = |x| := x \cdot sgn(x)$$

Abbildung 1.7: Betrags-Funktion



Rechnen mit Beträgen

Mit Hilfe der Definition sowie der binomischen Formeln kann man zeigen (Übungsaufgabe!):

Satz 1.3 (Eigenschaften der Beträge) *:*

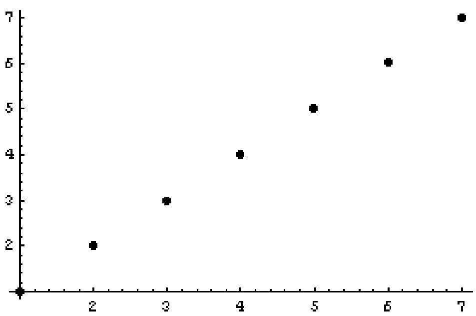
1. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
2. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
3. $|x \pm y| \leq |x| \pm |y|$
4. $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

Die beiden letzten Ungleichungen lassen sich in einer Kette schreiben:

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| \pm |y|.$$

1.2.4 Zahlenfolgen

Abbildung 1.8: Beispiel einer Folge



Definition 1.6 (Zahlenfolge) *:*
Eine Funktion $f:\ \mathbf{N} \longmapsto \mathbf{R}$ *mit* $f:\ n \longmapsto f(n) = a_n$ *heisst* **Zahlenfolge**.

Eine Zahlenfolge ist also eine Funktion mit $D_f = \mathbf{N}$. Für die Relationsmenge benützen wir auch folgende Symbolik:

Symbole 1 (Zahlenfolge) *:*

$$\{(n, f(n)) |\, f(n) = a_n\} := [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots] = \langle a_n \rangle$$

Die Funktionswerte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ heissen *Glieder der Folge*. a_n in $\langle a_n \rangle$ nennen wir das *allgemeine Glied*. In manchen Fällen, z.B. bei einigen *rekursiv definierten Folgen*, kann dieses Glied gar nicht explizit berechnet werden. (Beispiel: *Fibonacci–Folge*.) Statt $(n, f(n)) = (n, a_n)$ können wir kürzer nur a_n angeben, denn mit dem Index n ist ja das Urbild und mit a_n das Bild bekannt.

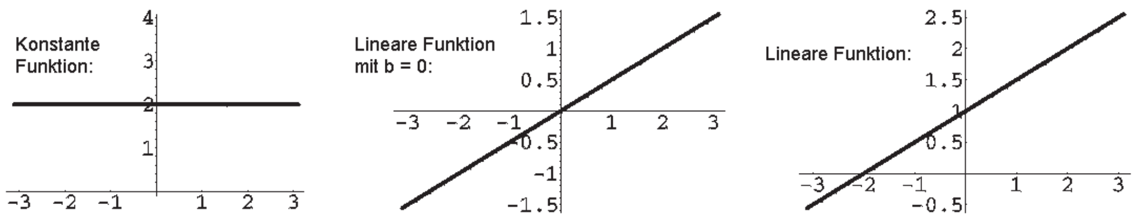
Beispiele:

1. $f(n) = a_n = n$. Dann ist $\langle a_n \rangle = [1, 2, 3, 4, 5, \ldots]$ und $W_f = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.
2. $f(n) = a_n = 7$. Dann ist $\langle a_n \rangle = [7, 7, 7, 7, \ldots]$ und $W_f = \{7\}$.
3. $f(n) = a_n = \frac{1}{n}$. Dann ist $\langle a_n \rangle = [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots]$ und $W_f = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.
4. $f(n) = a_n = (-1^n)$. Dann ist $\langle a_n \rangle = [-1, 1, -1, 1, \ldots]$ und $W_f = \{-1, 1\}$. *Alternierende Folge.*
5. $a1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Dann ist $\langle a_n \rangle = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots]$. *Fibonacci–Folge.*

1.2.5 Lineare und konstante Funktion

Definitionen

Abbildung 1.9: Konstante und lineare Funktion



Definition 1.7 (Lineare Funktion) *:*
Eine Funktion $f : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$ *mit* $f(x) = y := ax + b$ $(a, b \in \mathbf{R})$ *heisst* **lineare Funktion**.

Ein Spezialfall ergibt sich für $a = 0$:

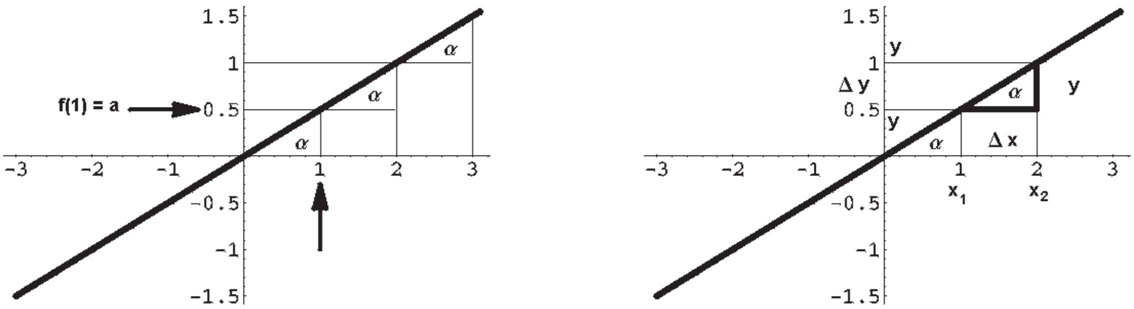
Definition 1.8 (Konstante Funktion) *:*
Eine Funktion mit $f(x) = y := b$ *heisst* **konstante Funktion**.

Für $a \neq 0$ ist $D_f = W_f = \mathbf{R}$. Denn jeder Wert $y \in \mathbf{R}$ wird ja angenommen, da die Gleichung $y = ax + b$ immer lösbar ist, d. h. zu jedem y ein x berechnet werden kann und daher also existiert.

Die Funktionenschar $f(x) = ax$

Sei $a \neq 0$. Aus $f(x) = y = ax$ folgt dann $a = \frac{y}{x}$, falls $x \neq 0$ ist. Ebenso folgt aus $f(x_1) = y_1 = ax_1$ und $f(x_2) = y_2 = ax_2$ direkt $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, also $\Delta y = a\Delta x$ oder $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$. (Vgl. Abb. 1.10.) Da $f(0) = 0$ gilt, geht der Graph durch den Ursprung. Da $\frac{\Delta y}{\Delta x} = const.$ ist, ist der Graph eine Gerade, denn alle durch irgend welche Strecken Δy und Δx gebildeten Dreiecke sind ähnlich. Wir benutzen noch folgenden Begriff:

Abbildung 1.10: Lineare Funktion, Gerade, Steigung



Definition 1.9 (Steigung) *:*
$a = \tan\alpha$ *(Abb. 1.10) heisst* **Steigung** *der Funktion* $f: \; x \; \longmapsto \; f(x) = ax$.

Resultat:
Der Graph von $f(x) = ax$ ist eine Gerade durch $(0, 0)$ und $(1, a)$ mit der Steigung a.

Abbildung 1.11: Lineare Funktionen, Beispiele

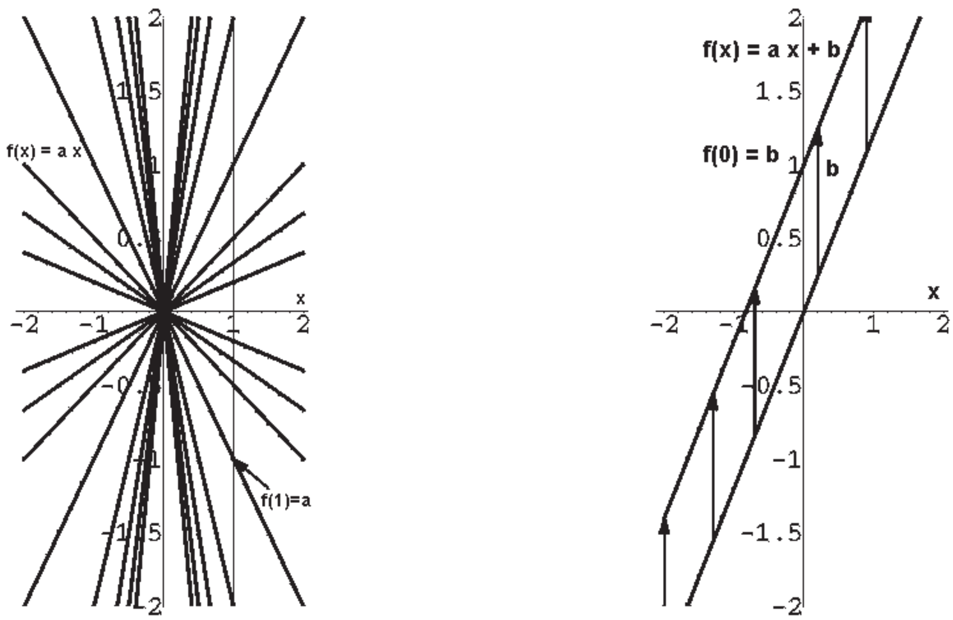


Abb. 1.11 zeigt im ersten Bild die Graphen bei verschiedenen Werten von a.

y–Achsenabschnitt und Nullstelle

Den Graphen von $f(x) = ax+b$ erhält man aus dem Graphen von $f(x) = ax$, indem man bei jedem Punkt die y–Koordinate um den Wert b erhöht, d.h. indem man zu allen y–Werten b addiert. Das bedeutet aber geometrisch eine *Parallelverschiebung* um b in y–Richtung. Wir stellen daher fest:

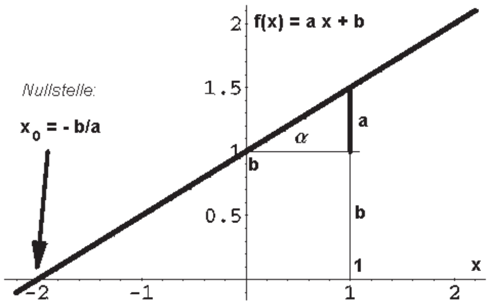
Resultat:

1. Der Graph einer linearen Funktion $f(x) = ax + b$ ist wieder eine Gerade.

2. Die Gerade geht durch $(0, b)$ $(f(0) = b)$ und $(1, a + b)$. Es ist $f(1) = a + b$.

Definition 1.10 (Verschiebung, Nullstelle) :
*b nennen wir den y–***Achsenabschnitt*** *(vgl. Abb. 1.12) der Funktion $f : x \longmapsto f(x) = ax + b$. Der Schnittpunkt des Graphen mit der x–Achse heisst* **Nullstelle**.

Abbildung 1.12: Lineare Funktion, Nullstelle



Resultat (Nullstelle): Wegen $f(x_0) = ax_0 + b = 0$ ist $x_0 = -\frac{b}{a}$

1.2.6 Quadratische Funktionen

Parabeln durch den Ursprung

Beispiele:

Abbildung 1.13: Quadratische Funktionen $f(x) = ax^2$

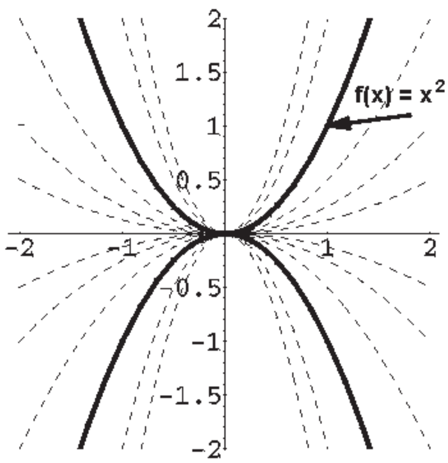
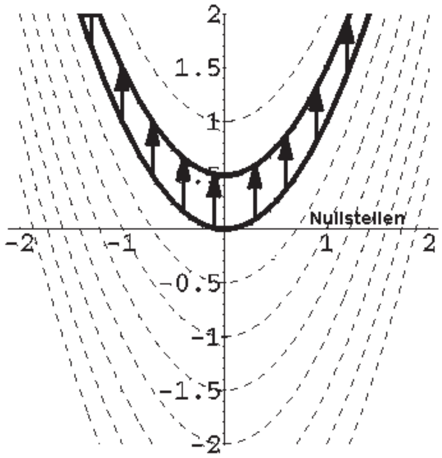


Abb. 1.13 zeigt Beispiele von Graphen aus der Funktionenschar $f(x) = ax^2$ bei verschiedenen Werten für a. Geometrisch sind diese Graphen **Parabeln**. a bestimmt die Form der Kurve, d.h. ob sie weit oder weniger weit geöffnet ist. Wir benutzen zur Präzisierung die folgende Sprechweise:

Definition 1.11 (Parabel 2. Ordnung) :
Den Graphen einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2$ nennen wir **Parabel 2. Ordnung**. *a heisst dabei* **Öffnung** *der Parabel, der Punkt $(0, 0)$ heisst hier* **Scheitelpunkt** *(Vgl. Abb. 1.13).*

In y–Richtung verschobene Parabeln

Abbildung 1.14: Quadratische Funktionenschar $f(x) = ax^2 + d$



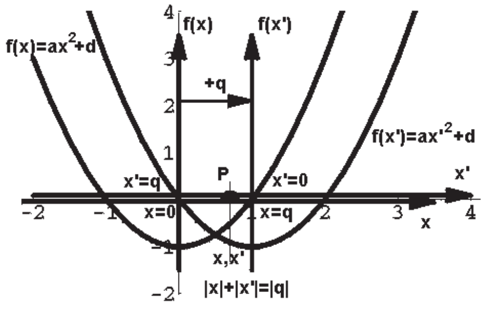
Wir betrachten $f(x) = ax^2 + d$ ($a, d \in \mathbf{R}$, Abb. 1.14). Wie schon bei der Geraden $f(x) = ax + b$ erhält man den Graphen von $f(x) = ax^2 + d$ aus demjenigen von $f(x) = ax^2$, indem man wieder bei jedem Punkt die y–Koordinate um den Wert d erhöht, d.h. indem man zu allen y–Werten d addiert. Das bedeutet aber geometrisch wieder eine *Parallelverschiebung* um d in y–Richtung. Wir stellen daher fest:
Resultat:

1. Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + d$ ist wieder eine Parabel.
2. Der Scheitel liegt auf der y–Achse in $(0, d)$. c ist daher auch der *y–Achsenabschnitt.*

Aus Abb. 1.14 ersieht man, dass eine Funktion $f(x) = ax^2 + d$ je nach der Grösse von d zwei Nullstellen, eine oder keine haben kann. Die Nullstelle berechnet sich aus $0 = ax_0^2 + d$ zu $x_0 = \pm\sqrt{-\frac{d}{a}}$. Daher bestimmt $\frac{d}{a}$, wieviele Nullstellen die Funktion in $\mathbf{R}$ hat.

Die quadratische Gleichung

Abbildung 1.15: In x-Richtung verschobene Parabel



Idee: Abb. 1.15 zeigt den Graphen von $f(x) = ax^2 + d$ und ebenso einem um den Wert q in x–Richtung verschobenen Graphen, der im gleichzeitig mitverschobenen Koordinatensystem zur Funktion $f(x') =$

$ax'^2 + d$ gehört. Wir haben somit ein neues (x', y)–Koordinatensystem eingeführt. Dabei ist immer $q = x - x'$ (vgl. auch Abb. 1.15, x' ist im gezeichneten Beispiel negativ, vgl. Punkt P). Daher ist $x' = x - q$. Damit kann man f wie folgt umrechnen:

$$\begin{aligned} f(x') &= ax'^2 + d \\ &= a(x-q)^2 + d \\ &= ax^2 - 2aqx + aq^2 + d \\ &= ax^2 + bx + c \\ &= f_1(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei ist $b = -2aq$ resp. $q = -\frac{b}{2a}$ und $c = aq^2 + d$ resp. $d = c - aq^2 = c - \frac{b^2}{4a}$.

Resultat:
Für eine beliebige gegebene Funktion $f_1(x) = ax^2 + bx + c$ lässt sich daher zu a, b und c immer q und d berechnen:

$$q = -\frac{b}{2a}, \qquad d = c - \frac{b^2}{4a}$$

Der Scheitelpunkt der verschobenen Parabel hat daher im alten (x, y)–Koordiantensystem die Koordinaten (q, d).

Die Nullstellen der verschobenen Parabel sind im verschobenen System bekannt: Aus $ax'^2 + d = 0$ folgt $x'_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{d}{a}}$. Daher ist $(x - q)_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{d}{a}}$ und somit $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{d}{a}} + q = \pm\sqrt{-\frac{c-\frac{b^2}{4a}}{a}} + (-\frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{-\frac{-4ac+b^2}{4a^2}} - \frac{b}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Wir definieren:

Definition 1.12 (Diskriminante) *:*
Der Ausdruck $D = b^2 - 4ac$ heisst **Diskriminante** *der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.*

Satz 1.4 (Nullstellen einer quadratischen Funktion) *: Die Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$ sind gegeben durch $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Für $D > 0$ gibt es zwei reelle Nullstellen, für $D = 0$ eine und für $D < 0$ gibt es keine reelle Nullstelle in* $\mathbf{R}$.

Beispiel: Löse die Ungleichung $4x^2 - 2x + 1 < x + 2$.

Lösung: Zu lösen ist somit die Ungleichung $4x^2 - 3x - 1 < 0$. Da die Parabel hier nach oben geöffnet ist, muss man daher die Lösung zwischen den Nullstellen suchen. Die Nullstellen berechnet man zu $x_1 = -\frac{1}{4}$ und $x_2 = 1$. Somit ist die Lösungsmenge $\mathbf{L} = \{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{1}{4} < x < 1\} = (-\frac{1}{4}, 1)$. Man kann die Aufgabe aber auch graphisch lösen, indem man die Parabel $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$ und die Gerade $g(x) = x + 2$ zeichnet und schaut, in welchem Bereich die Gerade bezüglich der y–Richtung unterhalb der Parabel verläuft.

1.2.7 Verschiebung und Streckung des Koordinatensystems

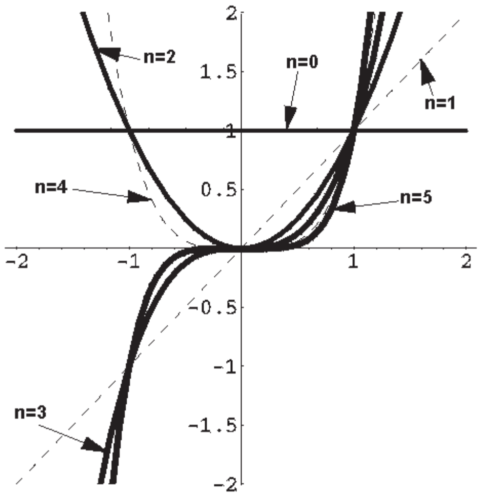
Bei der linearen Funktion $f(x) = ax + b$ haben wir gesehen, dass b eine Verschiebung des Graphen in y–Richtung um $+b$ bedeutet. Man kann sich dabei ebenso denken, dass man das Koordinatensystem um $-b$ in y–Richtung verschiebt, den Graphen aber festhält. Bei der quadratischen Funktion $f(x) = a(x - q)^2 + d$ dagegen hatte q eine Verschiebung des Graphen in x–Richtung um $+q$ zur Folge — oder eine Verschiebung des Koordinatensystemy in x–Richtung um $-q$ bei festgehaltenem Graphen. Andererseits entsteht der Graph von $f(x) = ax^2$ aus dem von $f(x) = x^2$ durch durch Streckung um den Faktor d in y–Richtung usw..
Diese Sachverhalte lassen sich, wie man sofort sieht, auf einfache Weise erweitern und verallgemeinern.

So erhält man das folgende Resultat:

Satz 1.5 (Verschiebungen und Streckungen des Graphen) *: Gegeben sei der Graph der Funktion $f(x)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Dann gilt:*

1. *Der Graph von $f(x+a)$ entsteht aus dem gegebenen Graphen duch Verschiebung um $-a$ in x–Richtung.*
2. *Der Graph von $f(x)+b$ entsteht aus dem gegebenen Graphen duch Verschiebung um $+b$ in y–Richtung.*
3. *Der Graph von $f(c\,x)$ entsteht aus dem gegebenen Graphen durch Streckung um den Faktor c in x–Richtung. ($c=-1$ bedeutet Spiegelung an der y–Achse).*
4. *Der Graph von $d \cdot f(x)$ entsteht aus dem gegebenen Graphen durch Streckung um den Faktor d in y–Richtung. ($d=-1$ bedeutet Spiegelung an der x–Achse).*

Abbildung 1.16: Potenzfunktionen



1.2.8 Potenzfunktionen, Hyperbeln

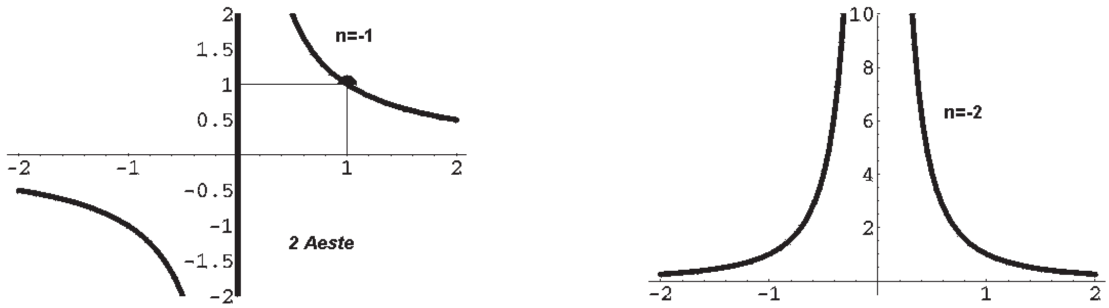
Definition 1.13 (Potenzfunktion) *:*
Sei $n \in \mathbf{Z}$. Eine Funktion $f:\ x \longmapsto f(x)=x^n$ heisst **Potenzfunktion**. *(Vgl. Abb. 1.16.)*

Abb. 1.16 zeigt auch *Parabeln höherer Ordnung* ($n>2$).
In Abb. 1.17 sehen wir die Graphen von $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$ sowie von $f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$. Geometrisch ist die Kurve (Punktmenge) $\{(x,f(x)) \mid f(x)=\frac{1}{x})\}$ eine *Hyperbel*. Eine Hyperbel besteht aus zwei *Ästen*. Bei $f(x)=\frac{1}{x^n}$) wäre auch die Bezeichnung „Hyperbel höherer Ordnung“ passend.

1.2.9 Asymptoten, Pole

Abb. 1.18 stellt eine geometrische Abbildung des gezeigten Kreises auf die x–Achse dar. Dabei wird ein Punkt des Kreises (z.B. P) bijektiv einem Punkt auf der x–Achse (z.B. der Wert x) zugeordnet. Durch diese Abbildung wird so jedem Punkt des Kreises (ausser dem Nordpol N) genau ein Punkt der x–Achse zugeordnet. Was aber passiert mit dem Nordpol? Wenn x in Richtung $+\infty$ oder $-\infty$ auf der x–Achse

Abbildung 1.17: Potenzfunktionen, Hyperbeln



wandert, so wandert P in Richtung N auf dem Kreis — und das von beiden Seiten her. Daher entspricht dem vorerst nur symbolisch darstellbaren $+\infty$ oder $-\infty$ auf dem Kreis der Punkt N. Wir sagen: *Für x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ gelangt man mit P zum Pol N.* Aus diesem Grunde legen wir fest:

Begriffserklärung 1 (Pol, Polstelle) *:*
Falls in der Nähe eines isolierten Punktes x_0 die Beträge der Funktionswerte $f(x)$ über alle Grenzen wachsen, $f(x_0)$ in $\mathbf{R}$ *also nicht definiert ist, so sagen wir, f habe in x_0 einen* **Pol**. *x_0 heisst dann* **Polstelle** .

Bei einer Polstelle nähert sich somit der Graph der Funktion beliebig genau einer senkrechten Geraden durch die Polstelle. Polstellen sind also „Unendlichkeitsstellen".
Wenn nun x betragsmässig immer grösser wird, kann sich der Graph auch einer nicht–vertikalen Asymptote beliebig genau annähern. (Vgl. Abb. 1.19)Wir sagen:

Begriffserklärung 2 (Asymtote) *:*
Eine **Asymtote** *(asymtotische Gerade) ist eine Gerade, der sich der Graph der gegebenen Funktion beliebig genau annähert, falls $|x|$ genügend gross wird Schmiegegerade.*

Bei einer Polstelle haben wir demnach eine senkrechte Asymptote. Alle andern Asymptoten sind lineare Funktionen der Form $g(x) = ax + b$. Die Differenz $(f(x) - g(x))$ wird daher beliebig klein, wenn $|x|$ genügend gross wird.
Abb. 1.19 zeigt die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ und $f(x) = \frac{1}{x} + x$. Die erste Funktion hat einen Pol bei $x = 3$ und eine horizontale Asymptote bei $y = 2$. Die zweite Funktion hat einen Pol bei $x = 0$ und die Asymptote $g(x) = x$.
Wie man sieht, treten daher Pole dort auf, wo ein Nenner 0 werden würde. Wird x betragsmässig grösser,

Abbildung 1.18: Pol

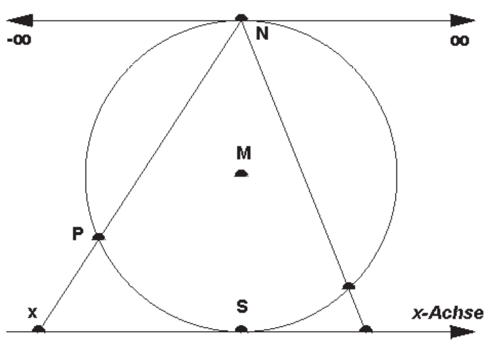
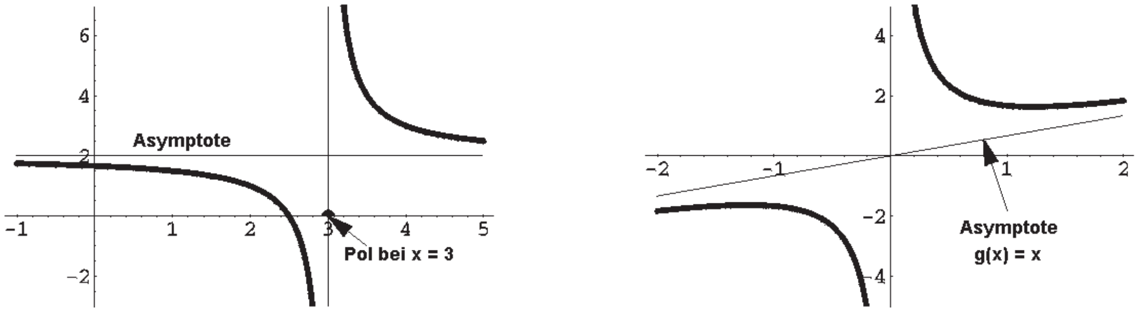
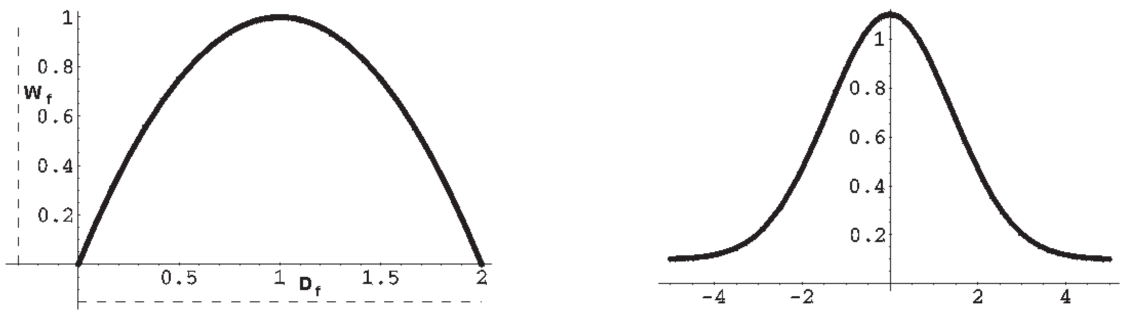


Abbildung 1.19: Beispiele mit Polen und Asymtoten



so wird etwa ein Ausdruck der Form $\frac{a}{bx+c}$ klein, spielt also für den Graphen keine grosse Rolle mehr. (Allgemeiner: wenn im Zähler ein kleinerer Grad ist als im Nenner.) Asymptoten findet man daher, wenn man die über alle Massen kleiner werdenden Bruch–Anteile streicht.
Hinweis: Es lohnt sich, einige Funktionen bezüglich Pole und Asymptoten zu analysieren (Übungsblätter). Ein Rechner mit einem geeigneten Graphik-Programm leistet dabei wertvolle Dienste!

Abbildung 1.20: Beispiele von beschränkten Funktionen



1.2.10 Beschränkte Funktionen

Abb. 1.20 zeigt die Funktionen $f(x) = -x^2 + 2x$ mit $D_f = [0, 2]$ und $W_f = [0, 1]$ sowie $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ mit $D_f = \mathbf{R}$ und $W_f = (0, 1]$. Der Wertebereich dieser Funktionen ist ein endliches Intervall, also eingeschränkt. Man nennt solche Funktionen daher *beschränkt*. Andere bekannte Beispiele sind $\sin(x)$, $\cos(x)$ etc. .

Definition 1.14 (Beschränktheit einer Funktion) *:*
Eine Funktion $f : \; x \longmapsto f(x) = x^n$ *heisst* **beschränkt** *auf* D_f*, falls gilt:*

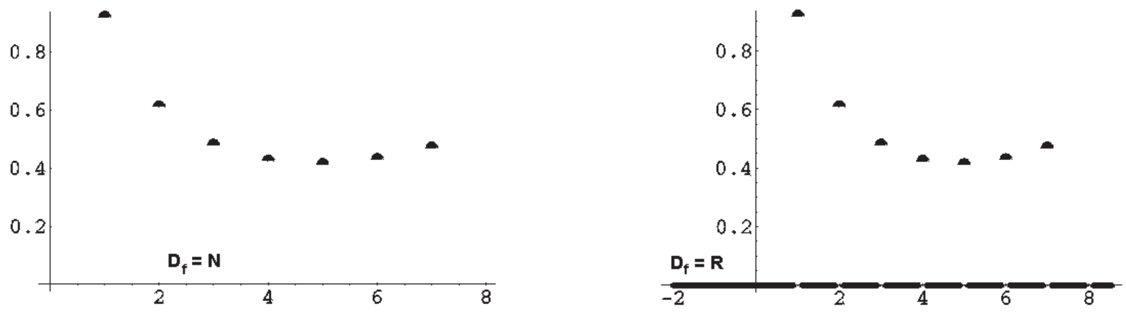
$$\exists_{M \in \mathbf{R}^+} \; \forall_{x \in D_f} : \; |f(x)| \leq M.$$

Das bedeutet also: $\forall_{x \in D_f} : \; -M \leq f(x) \leq M$ oder — $W_f \subseteq [-M, M]$.

1.2.11 Stückweise und punktweise definierte Funktionen

Wir betrachten die folgenden Beispiele:
Das erste Bild in Abb. 1.21 zeigt die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D_f = \mathbf{N}$ (eine Zahlenfolge also). Im zweiten Bild hingegen wird versucht, die Funktion zu zeigen:

Abbildung 1.21: Beispiele von punktweise definierten Funktionen



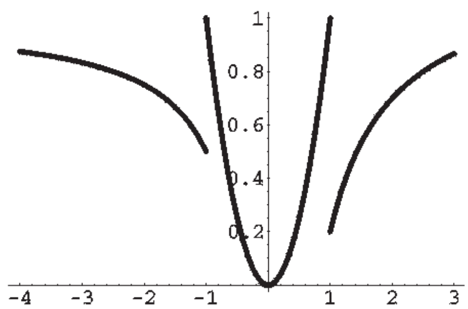
$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbf{N} \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{R} \ \wedge \ x \notin \mathbf{N} \end{cases}$

In beiden Fällen werden Funktionswerte *punktweise definiert.* Im ersten Bild (Abb. 1.21) sind die Punkte des Graphen *isoliert*[6] resp. nicht mit andern Punkten des Graphen verbunden. Funktionen mit solchen Graphen nennt man *diskret*:

Definition 1.15 (Diskrete Funktion) *:*
Eine Funktion heisst **diskret**, *wenn alle Punkte des Graphen isolierte Punkte sind.*

Die Punkte der Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbf{Q} \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{R} \ \wedge \ x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ sind nicht isoliert, denn sowohl $\mathbf{Q}$ als auch $\mathbf{R}$ sind dichte Mengen, d.h. nicht diskret. Die Funktion ist punktweise definiert. Man kann diese Funktion nicht sinnvoll in einer Skizze darstellen, da es unmöglich ist, einen „unendlich dichten Kamm" zu zeichnen.

Abbildung 1.22: Beispiele einer stückweise definierten Funktion



Dagege ist die in Abb. 1.22 gezeigte Funktion *stückweise zusammengesetzt* in dem Sinne, dass der Definitionsbereich aus Intervallen besteht, auf denen die Funktion durch rationale Anteile definiert ist. Es handelt sich um

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} + 1 & : \quad x \in [-4, -1] \\ x^2 & : \quad x \in (-1, 1) \\ \text{nicht definiert} & : \quad x = 1 \\ \dfrac{-1}{x} + 1.2 & : \quad x \in (1, 3) \end{cases}$$

Eine andere schon bekannte Art des Zusammensetzens ergibt sich durch das hintereinander Ausführen von Funktionen. *Verkettung*

[6] *Isoliert* bedeutet hier, dass man um jeden Punkt des Graphen einen Kreis legen kann, in dem sich kein weiterer Punkt des Graphen mehr befindet

Beispiel:

$$x \overset{f}{\longmapsto} y = f(x) \overset{g}{\longmapsto} z = g(y) = g(f(x)) \overset{h}{\longmapsto} w = h(z) = h(g(y)) = h(g(f(z)))$$

Seien z.B. $f(x) = -5 + 2\,x$ und $g(x) = 4 - 2\,x + x^2$, dann sind $f(g(x)) = 3 - 4\,x + 2\,x^2$ und $g(f(x)) = 39 - 24\,x + 4\,x^2$.

1.2.12 Monotonie, strenge Monotonie

Abbildung 1.23: Beispiele des Wachstums von Funktionen

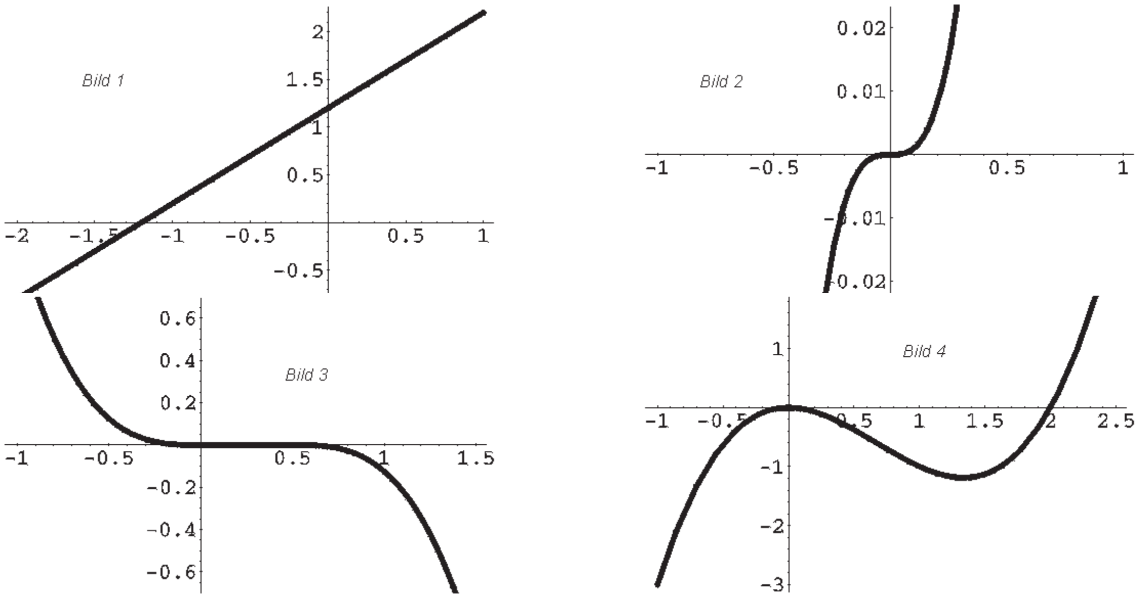
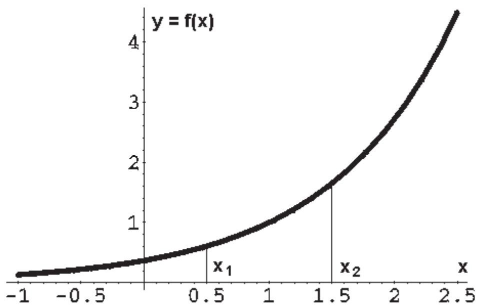


Abb. 1.23 zeigt in Bild 1 eine lineare Funktion, in Bild 2 eine kubische Parabel, in Bild 3 eine aus kubischen Parabeln und einer konstanten Funktion intervallweise zusammengesetzte Funktion und in Bild Û4Û die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2$.
Bei den ersten beiden Bildern fällt auf, dass die Kurve mit grösser werdendem x {it nie fällt. Beim dritten Bild stellen wir fest, dass die Kurbe *nie wächst.* Beim vierten Bild hingegen *wächst und fällt und wächst* die Kurve *intervallweise.*
Im Gegensatz dazu kann bei der Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbf{Q} \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{R} \ \wedge \ x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ weder von Wachstum noch von einem Fallen gesprochen werden (unendlich dichter Kamm). Eine andere interessante Funktion ist die früher besprochene Gausklammerfunktion (1.2.1). Diese Funktion bleibt auf den „Treppenstufen“ konstant und springt dann jeweils am Intervallende hoch auf die nächste Stufe. Das hat zur Folge, dass die Funktion *nie fällt.* Offenbar zeigen viele Funktionen ein charakteristisches Verhalten bezüglich Wachstum. Dieses Verhalten spielt oft eine wesentliche Rolle, z.B. wenn es darum geht, Funktionen umzukehren (Umkehrabbildung). Daher definiert man:

Definition 1.16 (Monotonie) *:*

1. *Eine Funktion f heisst* **monoton wachsend**, *wenn gilt:* $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
2. *Eine Funktion f heisst* **streng monoton wachsend**, *wenn gilt:* $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
3. *Eine Funktion f heisst* **monoton fallend**, *wenn gilt:* $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.

Abbildung 1.24: Beispiel zur Monotonie von Funktionen (streng monoton wachsend)

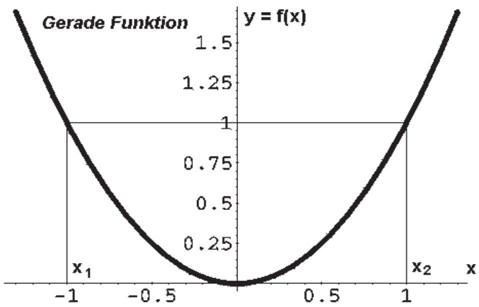


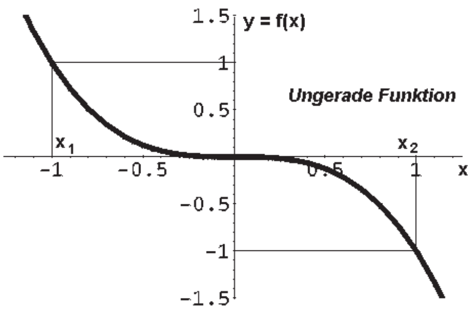
4. *Eine Funktion f heisst* **streng monoton fallend**, *wenn gilt:* $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Da bei einer streng monoton wachsenden Funktion wegen des Wachstums zu verschiedenen Urbilder verschiedene Bilder existieren müssen, ist eine solche Funktion immer *injektiv*. Dasselbe gilt für eine streng monoton fallende Funktion. Wir halten fest:

Satz 1.6 (Injektivität streng monotoner Funktionen) *:*
Eine streng monoton wachsende oder fallende Funktion ist injektiv.

Abbildung 1.25: Gerade und ungerade Funktion





1.2.13 Gerade und ungerade Funktionen

Vielfach sind bei Funktionen die Symmetrieeigenschaften bezüglich der Achsen wichtig. Daher definieren wir (vgl. Abb. 1.25):

Definition 1.17 (Gerade, ungerade Funktionen) *:*

1. *Eine Funktion f heisst genau dann* **gerade**, *wenn gilt:* $\forall_{x \in D_f}: \; f(-x) = f(x)$.
2. *Eine Funktion f heisst genau dann* **ungerade**, *wenn gilt:* $\forall_{x \in D_f}: \; f(-x) = -f(x)$.

Beispiele gerader Funktionen sind: $f(x) = c$, x^2, x^4, $x^6 \ldots x^{2n}$, $\cos(x)$, $\cosh(x)$ etc. und arithmetische Zusammensetzungen von solchen Funktionen. Beispiele ungerader Funktionen sind: $f(x) = x$, x^3, x^5, $x^7 \ldots x^{2n+1}$, $\sin(x)$, $\sinh(x)$ etc. und arithmetische Zusammensetzungen von solchen Funktionen.

1.2.14 Polynome, Polynomfunktionen, ganzrationale Funktionen

Definition 1.18 (Polynom) *:*
Ein **Polynom** *ist eine endliche Summe von endlichen Produkten von Termen, die nur aus Variablen oder Konstanten bestehen.*

Ist z.B. nur die Variable x vorhanden, so ist durch das Polynom eine Funktion von x gegeben:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei müssen wir $a_n \neq 0$ verlangen, damit diese Schreibweise Sinn macht.

Definition 1.19 (Koeffizienten, Grad, ganzrationale Funktion) *:*
Die Konstanten (obige Darstellung) a_k *nennen wir* **Koeffizienten** *und die Zahl* n *heisst* **Grad** *des Polynoms. Die damit gegebenen Funktionen* $p(x)$ *heissen* **ganzrationale Funktionen** *oder* **Polynomfunktionen** *mit einer Variablen.*

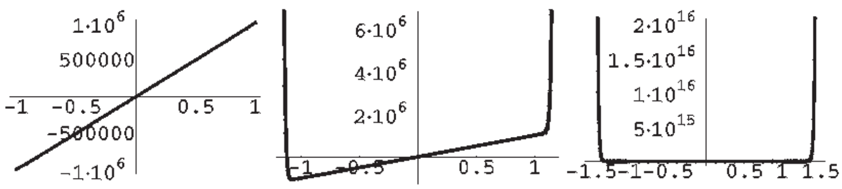
Ist z.B. $p(x) = 4x^5 + 2x^3 - 16x$, so haben wir damit insbesondere eine ungerade Funktion. Bei $p(x) = 8x^5$ hingegen ist $a_4 = a_3 = \ldots = a_0 = 0$.
Speziell ist zu bemerken, dass ein Polynom überall definiert ist. Es gibt keine einschränkende Bedingung für den Definitionsbereich. Bei einem Polynom mit nur einer Variablen gilt also $D_p = \mathbf{R}$.

Ein Polynom lässt sich nach dem *Hornerschema* schreiben:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= (((\ldots(((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \ldots)x + a_2)x + a_1)x + a_0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Bei der Schreibweise mit den Klammern ergeben sich n Multiplikationen und n Additionen. Bei der gewöhnlichen Schreibweise hingegen $n + (n-1) + \ldots\ 2 + 1 = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ Multiplikationen und n Additionen, also ein wesentlich höherer Rechenaufwand.

Abbildung 1.26: Diverse Plotbereiche derselben Funktion

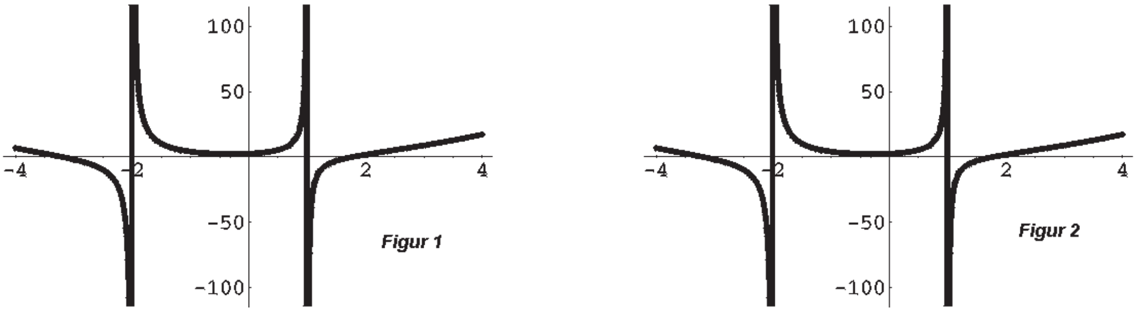


Als Beispiel ist in Abb. 1.26 der Graph von $p(x) = 10^2 x^{100} + 10^4 x^{10} + 10^6 x + 10^3$ über verschiedenen Intervallen gezeichnet. Bei solchen Beispielen ist es wichtig, einen Ausschnitt zu finden, in dem charakteristischen Kurververlauf darstellbar ist. (Hier zeigt das 2. Bild am meisten.)

1.2.15 Gebrochen rationale Funktionen

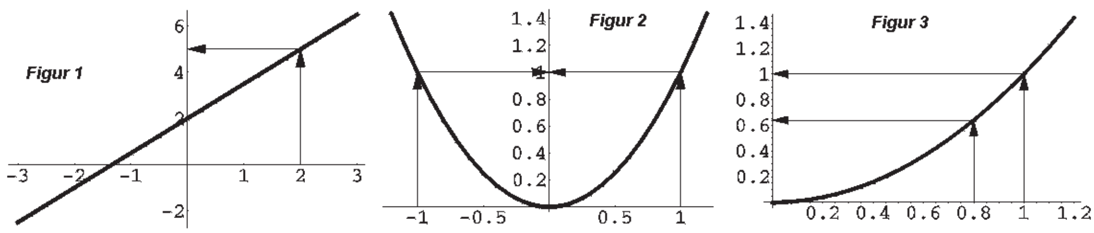
Definition 1.20 (Gebrochen rationale Funktion) *:*
Seien $p(x)$ *und* $q(x)$ *zwei Polynome. Dann heisst die Funktion* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ **gebrochen rationale Funktion** *mit einer Variablen.*

Abbildung 1.27: Beispiel einer gebrochen rationalen Funktion



Beispiel (vgl. Abb. 1.27, Figur 1: $f(x) = \frac{x^4+2x^3-4x^2-2x-5}{x^2+x-2}$. Damit wir den Verlauf des Graphen besser beurteilen können, dividieren wir soweit als möglich aus und erhalten: $f(x) = x^2 + x - 3 + \frac{3x-11}{x^2+x-2}$. Die Funktion verhält sich demnach asymptotisch wie die Parabel $p(x) = x^2 + x - 3$. Der Nenner ist $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Die Funktion hat daher Pole bei $x = 1$ und bei $x = -2$. (Vgl. Abb. 1.27.)
Allgemein ist es ratsam, gebrochen rationale Funktionen für die Untersuchung durch „ausdividieren" in der Form $f(x) = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)}$ mit $Grad(p_2) < Grad(q)$ zu bringen.
Manchmal ist eine gebrochen rationale Funktion nur vermeintlich eine solche. Z.B. im Ausdruck $f(x) = \frac{x^5-3x^3+x^2+2x-1}{x^2-1}$ lässt sich der Quotione $x^2 - 1$ für $x \neq -1$ und $x \neq 1$ wegkürzen. Man erhält daher in $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ schliesslich $f(x) = x^3 - 2x + 1$, also eine ganzrationale Funktion.
Ein anderes Beispiel ist $f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$ (vgl. Abb. 1.27, 2. Figur). Man erkennt die Pole bei $x = 1$ und $x = -2$ sowie die Asymptote $y = 0$.

Abbildung 1.28: Funktion und Umkehrfunktion



1.2.16 Umkehrfunktionen

Definition der Umkehrfunktionen

In Abb. 1.28, Figur 1, wird eine lineare Funktion $f(x) = ax+b$ gezeigt. Jedem $x \in D_f = \mathbf{R}$ wird durch die Funktion genau ein verschiedenes $y \in W_f = \mathbf{R}$ zugeordnet. Keine zwei Urbilder x_i haben dasselbe Bild. Die Funktion ist ersichtlich *bijektiv.* Zu jedem $y \in W_f$ lässt sich umgekehr das zugehörige x eindeutig berechnen: $y = \frac{x-b}{a}$. Die *Umkehrabbildung* (vgl. Teil 3) ist wieder bijektiv und somit wieder eine Funktion.
Ganz anders bei Figur 2: Hier wird die Funktion $f(x) = x^2$ gezeigt. Jedem $x \in D_f = \mathbf{R}$ wird durch die Funktion genau ein $y \in W_f = \mathbf{R}_0^+$ zugeordnet. Jedoch haben ausser für $x = 0$ immer zwei verschiedenen x–Werte dasselbe Bild, nämlich jeweils x_i und $-x_i$. Es ist $y = x_i^2 = (-x)_i^2$. Die hier vorliegende Funktion ist nicht injektiv oder bijektiv, die Umkehrabbildung f^{-1} daher nicht rechtseindeutig. f^{-1} ist daher keine Funktion. Im injektiven Fall jedoch ist die Umkehrabbildung f^{-1} auf $D_{f^{-1}} = W_f$ rechtseindeutig und f^{-1} daher wieder eine Funktion.

Definition 1.21 (Umkehrunktion) *:*
Ist die Umkehrabbildung f^{-1} einer Funktion f wieder eine Funktion, so nennt man f^{-1} **Umkehrfunktion** *von f.*

Wir halten fest:

Satz 1.7 (Existenz der Umkehrfunktion) *:*
Bei einer injektiven Funktion f ist die Umkehrabbildung f^{-1} wieder eine Funktion.

Wegen dem Satz in 1.2.12 gilt daher:

Korollar 1.1 (Umkehrfunktion bei streng monotonen Funktionen) *:*
Bei einer streng monoton wachsenden oder falllenden Funktion f ist die Umkehrabbildung f^{-1} wieder eine Funktion.

Falls f nicht bijektiv ist, jedoch stückweise streng monoton (d.h. auf Teilintervallen immer streng monoton) so lässt sich die Sache retten, indem man den Definitionsbereich auf so ein Teilintervall einschränkt, auf dem die Funktion monoton ist. Z.B. $f(x) = \sin(x)$ auf $D_f = \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ oder $f(x) = x^2$ auf $D_f = \mathbf{R}_0^+$. Im letzten Fall ist dann natürlich $f^{-1}(y) = +\sqrt{y}$ auf $W_f = D_{f^{-1}} = \mathbf{R}_0^+$.
Da wir daran sind Funktionen zu behandeln, wollen wir im Folgenden unter f^{-1} immer die *Umkehrfunktion* verstehen. Die durch f und f^{-1} gegebenen Zuordnungen können wir nun schematisch so darstellen:

$$\begin{array}{rcl} D_f \ni x & \xmapsto{f} & y = f(x) \in W_f \qquad (*) \\ W_{f^{-1}} \ni x = f^{-1} & \xleftarrow{f^{-1}} & y \in D_{f^{-1}} \end{array}$$

Daraus kann man ablesen: $y = f(x) = f(f^{-1}(f(x))) = \ldots$ etc. Das führt auf folgende Folgerungen:

Korollar 1.2 (Verknüpfungen von Umkehrfunktion und Funktionen) *:*

$$f = f \circ f^{-1} \circ f, \qquad f^{-1} = f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \qquad \textit{etc. .}$$

Variablenwechsel

In der eben dargestellten Situation ist x die unabhängige Variable von f, y hingegen die unabhängige Variable von f^{-1}, vgl. z.B. Abb. 1.28, Figur 3. Der Graph von f stimmt bei dieser Darstellung mit demjenigen von f^{-1} überein: Es gibt nur einen Graphen. Jedoch sind die unabhängige und die abhängige Variable auf verschiedenen Achsen aufgetragen. Das ist manchmal sehr unbequem, vor allem, wenn man das Verhalten von f und f^{-1} vergleichen will, wenn die jeweils unabhängige Variable den Definitionsbereich durchläuft. Ebenso ist es, wenn man eine andere Funktion h mit f^{-1} vergleichen möchte. Was tun?

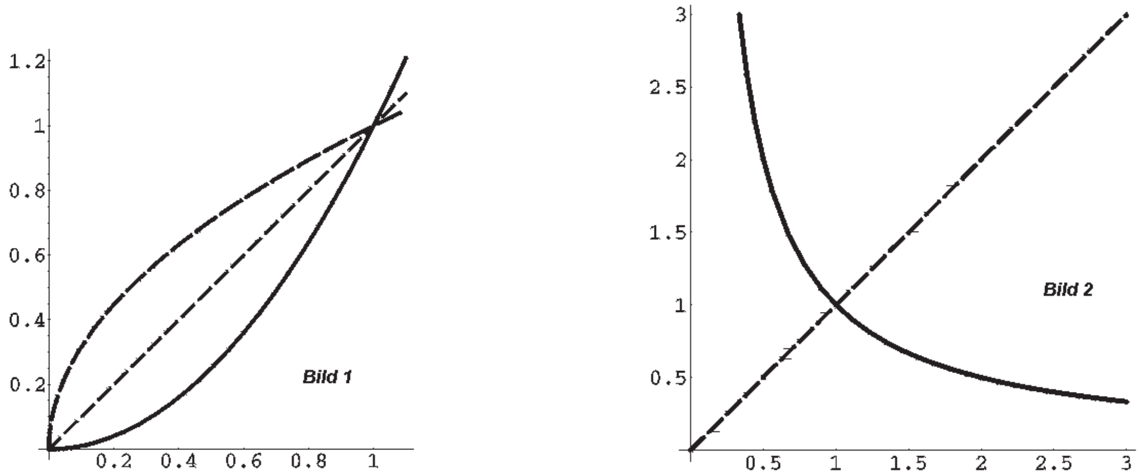
Folgende Idee löst dieses Problem: *Benenne die unabhängige Variable von f^{-1} so um, dass sie gleich lautet wie die unabhängige Variable von f.*

Im obigen Schema (*) ist x die unabhängige Variable von f und y diejenige von f^{-1}. Die Variable y bei f^{-1} wird daher *umbenannt* in x. Das bedeutet, dass die y–Achse (Urbildmenge bei f^{-1}) neu zur x–Achse wird, die beiden Achsen also vertauscht werden. Da der Graph diese Vertauschung auch mitmachen muss, wird er geometrisch an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten gespielgelt. Wir erhalten also (vgl. dazu Abb. 1.29, Bild 1):

Methode 1.1 (Variablenwechsel) *:*
Um bei Funktionen mit einer Variablen überall die gleiche Variable zu haben, wird die ursprünglich unabhängige Variable y von f^{-1} mit x vertauscht. x–Achse und y–Achse werden so mitvertauscht. Den Graphen von f^{-1} gewinnt man aus demjenigen von f geometrisch durch eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

Abb. 1.29, Bild 2 zeigt die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Wie man leicht sieht, gilt für diese Funktion $f = f^{-1}$. Dieselbe Eigenschaft haben z.B, $g(x) = x$ und $h(x) = -x$.

Abbildung 1.29: Umkehrfunktion, Variablenwechsel



1.2.17 Wurzelfunktionen

Bekanntlich ist das *Wurzelziehen* oder *Radizieren* die Umkehroperation des Potenzierens. Daher legen wir fest:

Definition 1.22 (Wurzelfunktionen) *:*
Die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ nennen wir **Wurzelfunktionen***:* $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Da Potenzfunktionen nur für ungerade n sowie für gearde n nur in $\mathbf{R}_0^+$ streng monoton wachsend sind, lassen sie sich nicht überall umkehren. Generell sind daher Wurzelfunktionen immer definiert für $x \in \mathbf{R}_0^+$. Später werden wir sehen, dass in den komplexen Zahlen $\mathbf{C}$ diese Einschränkung nicht mehr besteht, dafür aber das Problem der Eindeutigkeit eine neue Dimension gewinnt. Abb. 1.29, Bild 1, zeigt über $\mathbf{R}_0^+$ die Funktion $f(x) = x^2$ und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

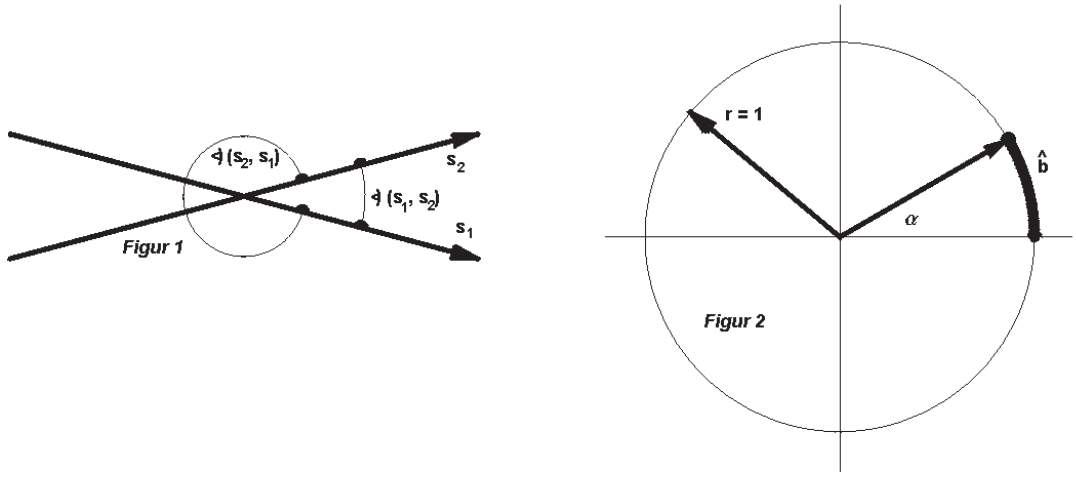
1.2.18 Winkelfunktionen

Elementare Grundlagen: Winkel und Winkelmessung

In der elementaren Geometrie lernt man, dass zwei sich schneidende Geraden eine Ebene in vier Teile oder *Winkel* zerschneiden, die als Punktmengen wiederum mit den Geraden zusammen die Ebene bilden. *Ein* **Winkel** *ist also ein so ausgeschnittenet Teil der Ebene* (vgl. Abb. 1.30, Figur 1). So ein Teil oder Winkel kann man sich bekanntlich auch durch Drehung eines von einem Punkt O (Ursprung, Origo[7] ausgehenden Strahls um diesen Ursprungspunkt entstanden denken. Um Missverständnissen vorzubeugen, wollen wir die Drehung immer im Gegenuhrzeigersinn als *positiv* definieren[8] und hier vorerst nur solche *positiv orientierten Winkel* betrachten.
Durch zwei solche von O ausgehende, nicht parallele Strahlen entstehen so zwei verschiedene, nicht–kongruente Winkel: $\measuredangle(s_1, s_2)$ und $\measuredangle(s_2, s_1)$. Zusammen mit den Geraden bilden sie wiederum die ganze Ebene.
Ein Quadrat, ein Dreieck und ein Kreis mit dem gleichem Flächeninhalt $1m^2$ sind trotz der Gleichheit ihres Flächenmasses verschiedene Flächen mit verschiedenen Formen. Der Begriff „Fläche“ ist somit zu unterscheiden vom Begriff „Flächenmass“ oder „Flächeninhalt“. Ebenso verhält es sich hier bei

[7]Ursprung: lat. *Origo*, franz. *origine*
[8]Bei Rechtshändern der „Ohrfeige nach“.

Abbildung 1.30: Winkel und Winkelmessung



den Winkeln. Der *Winkel* als Teil der Ebene ist zu unterscheiden vom *Winkelmass*. Jedoch stellt die Winkelmessung physikalisch einen Ausnahmefall dar. Denn um z.B. eine Länge zu messen, braucht man einen Maßstab aus Materie — oder ein Messprinzip, das sich an der physikalischen Materie orientiert. Ohne Verweis auf die Physik lässt sich eine Längeneinheit nicht verbindlich festlegen. Ganz anders ist es mit der Winkelmessung. Hier genügt es, den *Vollwinkel* zu erklären und dann anzugeben, in wieviele kongruente resp. deckungsgleiche Teile dieser einzuteilen ist. Dann ist die Winkelmessung rein theoretisch und ohne das notwendige Vorhandensein eines in physikalischer Materie definierten „Urwinkels“. Daher ist die Natur der Winkelmessung eine ganz andere als z.B. die der Längenmessung.

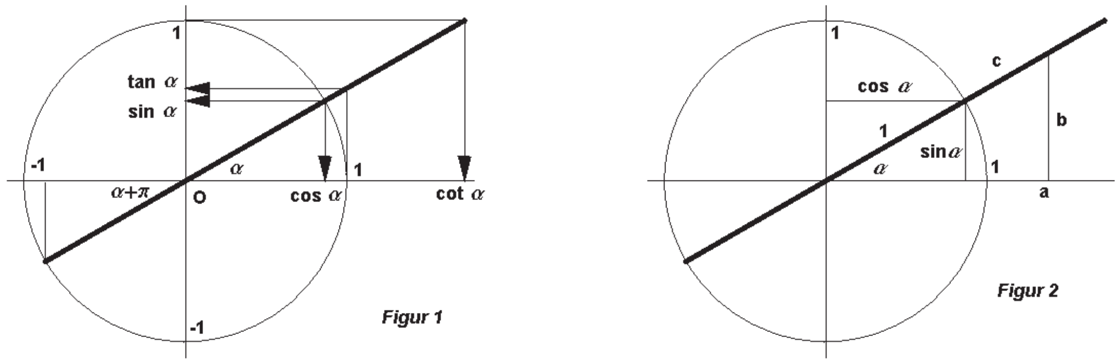
Von der Schule bekannt sind sicher jedem das *Gradmass (Altgrad)*, wo man den vollen Winkel in 360^o einteilt und diese wiederum in je $60'$ und jede solche Minute in $60''$. Das Gradmass ist uralt. Man kann vermuten, dass es in der Vorzeit im Zusammenhang mit einer ungenauen Festlegung der Anzahl Tage eines Jahres, im Rahmen frühzeitlicher astronomischer Beobachtungen etwa, entstanden ist. Denn um den Jahreslauf festzulegen bedurfte es der Beobachtung der Gestirne. 360 ist nicht weit entfernt von 365 und zudem eine Zahl, mit der sich einfach rechnen lässt, denn sie hat sehr viele Teiler. ($360 = 2^3 3^2 5$.) Das Altgrad ist infolge der Tradition tief in den Gewohnheiten der Menschen verhaftet und daher in der handwerklichen Praxis das Winkelmass schlechthin. In der Zeit der französischen Revolution dagegen entsprach es dem Zeitgeist, all den alten Wirrwarr und all die alten Sonderlingsregelungen abzuschaffen oder zu vereinheitlichen — Gleichheit, Freiheit, Brüderlichkeit – auch für das Winkelmass. Der rechte Winkel hatte fortan 100 Grad, der volle 400 Grad — oder eben *Neugrad*. Offensichtlich hat sich das Neugrad fast so schlecht durchgesetzt wie die Einteilung der Woche in 10 Tage. Jedenfalls wagte niemand mehr etwas mehr als hundert Jahre später, während der zweiten grossen Revolution, der russischen, Ähnliches nochmals einzuführen. Wohl waren die Gewerkschaften zu stark beteiligt. . . Für die Mathematik jedenfalls taugen beide Masse nicht viel. Standart ist hier das *Bogenmass*. Der spätere Gebrauch und die später noch zu machende Erfahrung werden es erweisen.
Beim **Bogenmass** *misst man bekanntlich die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis*[9], dessen Umfang 2π beträgt (vgl. Abb. 1.30, Figur 2). Bei einem gegebenen kartesischen Koordinatensystem ist die Einheitslänge willkührlich festgelegt. Alle in diesem System durchgeführten Längenmessungen beziehen sich dann auf diese Einheitslänge. Also auch die Bogenlänge[10]. So ist eine physikalische Einheit im Sinne der mit einem physikalischen Maßstab vergleichenden Messung nicht vorhanden. Die Winkelmessung ist ja auch nicht physikalisch eichbar, wie wir oben gesehen haben. Trotzdem, wohl aus Gewohnheit, können einige

[9] Kreis mit dem Radius 1.
[10] Wie die Länge eines allgemeinen Bogens exakt zu bestimmen ist, erfährt man in der Integralrechnung.

Menschen nicht ohne physikalische Einheiten arbeiten und rechnen. So hat man dann für die Winkelmessung im Bogenmass trotzdem wieder eine *künstliche Einheit*, den **Radianten (rad)** eingeführt. Da der Radiant künstlich, überflüssig und theoretisch bedeutungslos ist, wollen wir uns nicht damit belasten und ihn hier weiter nicht beachten.
Im Bogenmass misst demnach der volle Winkel 2π, also die Länge des Umfangs des Einheitskreises. Der rechte Winkel hat somit das Mass $\frac{\pi}{2}$ und der gestreckte das Mass π. Findet die Drehung zur Gewinnung des Winkels nicht im positiven Sinne statt, d.h. dreht man einen Strahl im Uhrzeigersinn, so messen wir den Winkel betragsmässig gleich, jedoch mit negativem Vorzeichen.

Die Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis

Abbildung 1.31: Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis



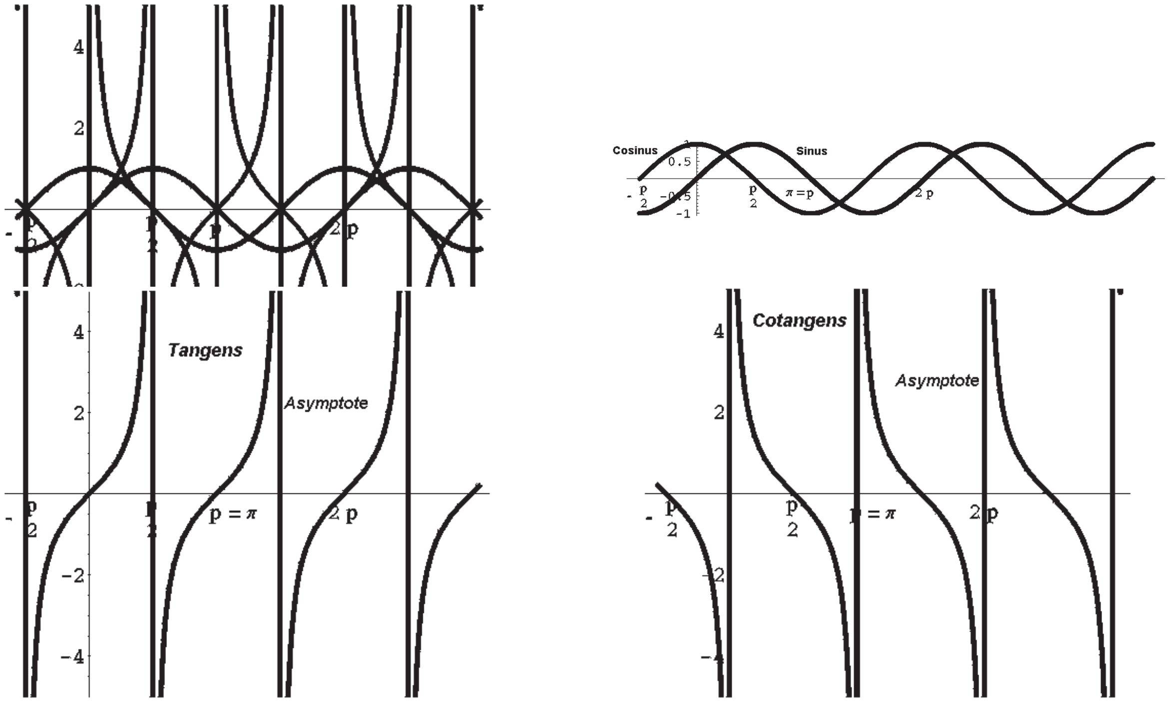
Geometrische Definition: Die Längen der in Abb. 1.31 (Figur 1) gezeigten Strecken benutzen wir zur Definition der Winkelfunktionen *Sinus* **(sin)**, *Cosinus* **(cos)**, *Tangens* **(tan)**, *Cotangens* **(ctg, cot)**. Diese Definitionen sind natürlich vorerst nur rein geometrisch, denn sei lassen keine exakten oder näherungsweise beliebig genauen Berechnungen bei irgendwelchen Winkeln zu[11]. Ebenso können wir bekanntlich im 1. Quadranten definieren: $\sin(\alpha) = \frac{b}{c}$, $\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$, $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$, $\cot(\alpha) = \frac{a}{b}$. Neu sind wahrscheinlich der **Secans** und der **Cosecans** (in der Astronimie sehr gebräuchlich):

Definition 1.23 (Secans, Cosecans) *:*

$$sec(\alpha) := \frac{1}{\cos(\alpha)}, \quad cosec(\alpha) := \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

[11] Eine mathematisch exakte Definition, die auch Berechnungen ermöglicht, wird später im Zusammenhang mit der Eulerschen Exponentialfunktion in **C** oder den Potenzreihen gegeben.

Abbildung 1.32: Graphen der bekannten Winkelfunktionen



Periodizität

Aus der geometrischen Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis sieht man sofort:

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 4\pi) = \ldots = \sin(\alpha + 2n\pi), \quad n \in \mathbf{Z}$$

und auch

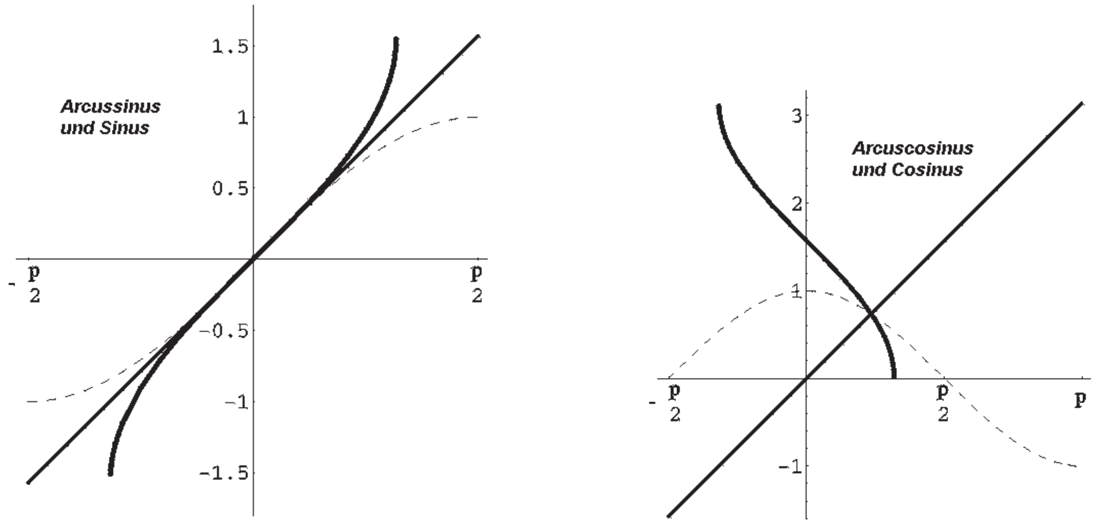
$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha) = -\sin(\pi - \alpha) \quad etc..$$

Zusammengefasst können wir festhalten:

Satz 1.8 (Periodizität, Pythagoras etc.) *: Sei $n \in \mathbf{Z}$.*

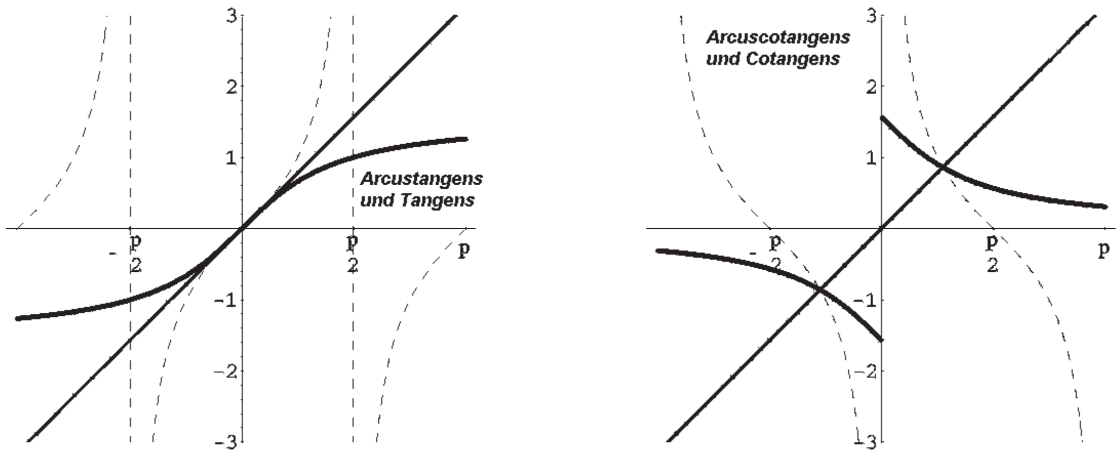
$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \sin(\alpha + 2n\pi) \\
\cos(\alpha) &= \cos(\alpha + 2n\pi) \\
\tan(\alpha) &= \tan(\alpha + n\pi) \\
\cot(\alpha) &= \cot(\alpha + n\pi) \\
\sin(\alpha + \pi) &= -\sin(\alpha) \\
\cos(\alpha + \pi) &= -\cos(\alpha) \\
\sin(\pi - \alpha) &= \sin(\alpha) \\
\sin(\pi - \alpha) &= \sin(\alpha) \\
cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\
\cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\
\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Abbildung 1.33: Umkehrfunktionen der bekannten Winkelfunktionen über den Standardbereichen



1.2.19 Arcusfunktionen

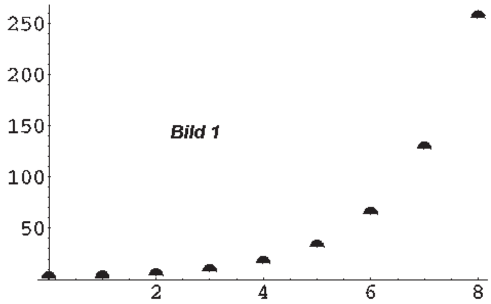
In gewissen Bereichen sind die Winkelfunktionen bekanntlich streng monoton wachsend oder fallend. Z.B. wächst $\sin(x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Daher kann man auf solchen Bereichen Umkehrfuntionen definieren, die allerdings nur über dem jeweiligen Bereich ihren Zweck erfüllen. Welches die Standardbereiche sind, die man in der Praxis tabelliert oder programmiert hat, ersehen wir aus Abb. 1.33. Für die jeweilige Umkehrfunktion ist der Definitionsbereich immer eindeutig, hingegen hängt der Wertebereich davon ab, wo die Winkelfunktion definiert war, von der wir ausgegangen sind.



1.2.20 Exponentialfunktionen

Zur Definition

Abbildung 1.34: Exponentialfunktionen



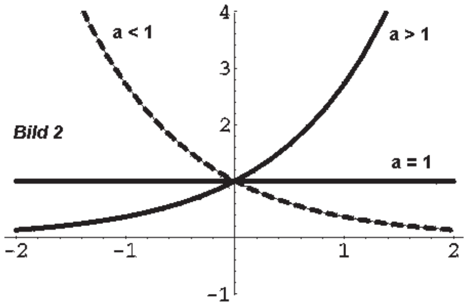


Bild 1 in Abb. 1.34 zeigt die Folge oder Funktion $f(n) = 2^n$ mit $n \in \mathbf{N}$. Eine Verallgemeinerung führt zu Funktionen $f(x) = a^x$ mit $x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ resp. $p \in \mathbf{Z} \wedge q \in \mathbf{N}$, $a > 0$. a ist bekanntlich die *Basis* und x der *Exponent*. Solche Funktionen lassen sich als $f(x) = a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ schreiben, sind also im bekannten Sinne definiert. Für $a < 0$ bietet hingegen schon z.B. $\sqrt{-1} = (-1)^{0.5}$ Probleme. $a < 0$ sei hier also ausgeschlossen. Für $a = 0$ hat man $f(x) = \sqrt[q]{0^p}$. 0^p ist 0 für $p \in \mathbf{N}$, 1 für $p = 0$ und nicht definiert für $p < 0$. (Dann wäre ja $0^p = \frac{1}{0^k}$ mit $k = -p > 0$).
Wie aber lässt sich $f(x) = a^x$ definieren für $a > 0$ und $x \notin \mathbf{Q}$? — Dazu muss man sogenannte *Grenzprozesse* verwenden (vgl. späterer Teil). Die Idee ist folgende: $\mathbf{Q}$ liegt dicht in $\mathbf{R}$. D.h. wie auch $x \in \mathbf{R}$ gewählt wird, so findet man beliebig nahe von x (resp. in jeder Umgebung von x) immer unendlich viele Zahlen x_i resp. $x_j \in \mathbf{Q}$. Andererseits unterscheidet sich a^{x_i} sehr wenig von a^{x_j}, falls x_i und x_j sich auch wenig unterscheiden. Man braucht nur x_j genügend nahe bei x_i zu wählen. Überträgt man dieses Prinzip auf alle $x \in \mathbf{R}$, so kann man für a^x mit $x \notin \mathbf{Q}$ auch verlangen, dass sich dieser Wert beliebig wenig von a^{x_i} unterscheidet, sobald x_i genügend nahe bei x liegt. a^x wird so durch a^{x_i} quasi „angenähert“. So lässt sich a^x beliebig genau festlegen oder eingrenzen, in einer etwas vorerst groben Sprechweise gesagt „unendlich“ genau. a^x lässt sich dann zwar nicht exakt etwa in der Form $\sqrt[q]{a^p}$ angeben, jedoch so genau man immer nur will.
$f(x) = a^x$ ist somit für alle $a > 0$ und $x \in \mathbf{R}$ mit beliebiger Genauigkeit festgelegt. Jetzt hat man ein Mittel um den Graphen zu zeichnen. Bild 2 in Abb. 1.34 zeigt Beispiele solcher Graphen für $a > 1$, $a = 1$ und $a < 1$ ($a > 0$). Damit ist die **Exponentialfunktion heuristisch in R definiert**[12].
Wichtig ist die *Eulersche Exponentialfunktion* $f(x) = e^x$. e ist die *Eulersche Zahl.* e ist *transzendent.* Es gilt:

$$e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 96\ldots$$

Rechenregeln

Für das Rechnen mit Potenzen mit positiven Basen und rationalen Exponenten gelten bekanntlich die folgenden Rechenregeln, die man durch Grenzprozesse resp. durch Annäherung mit rationalen Exponenten auch für nichtrationale, aber reelle Exponenten beweisen kann:

Satz 1.9 (Arithmetik–Eigenschaften von Potenzen) : *Es sei $n \in \mathbf{Z}$. Dann gilt:*

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \tag{1.4}$$

[12] Die Exponentialfunktiion ist so mit Hilfe der gewonnenen Erfahrung definiert, jedoch nicht mathematisch exakt, da der exakte Grenzwertbegriff hier noch fehlt. Eine einfache exakte Definition kann später mit Hilfe von Potenzreihen oder mit Hilde der Theorie der Differentialgleichungen gegeben werden.

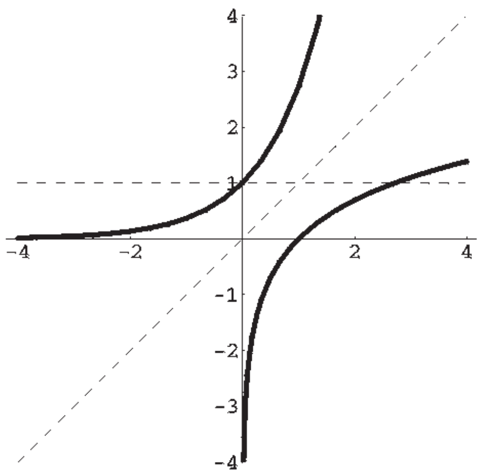
$$
\begin{aligned}
(a^{x_1})^{x_2} &= a^{(x_1 x_2)} && (1.5)\\
a^0 &= 1 && (1.6)\\
a^1 &= a && (1.7)\\
a^{-x} &= \frac{1}{a^x} && (1.8)\\
a^x \cdot b^x &= (a \cdot b)^x && (1.9)\\
& && (1.10)
\end{aligned}
$$

1.2.21 Logarithmusfunktionen

Zur Definition

Sei $a > 1$ und $f(x) = a^x$. Für $x_1 < x_2$, also für $x_2 = x_1 + d$ mit $d > 0$ gilt $f(x_2) = a^{x_2} = a^{x_1+d} = a^{x_1} \cdot a^d$. a^d kann immer durch Ausdrücke der Form $(a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ angenähert werden mit $p > 0$ und $q > 0$. Für $a > 1$ ist $a^p > 1$ und daher auch die Wurzel daraus grösser 1, d.h. $\sqrt[q]{a^p} > 1$. Somit ist $f(x_2) = a^{x_2} = a^{x_1+d} = a^{x_1} \cdot a^d > a^{x_1} = f(x_1)$, also $f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$. Der Graph wächst also ständig, wenn x immer grösser gemacht wird. Somit hat eine Gleichung der Form $a^x = y$ immer höchstens nur eine Lösung x. Zu einem y existieren also nie zwei oder mehrere x mit $f(x) = a^x = y$. Daher ist die Exponentialfunktion *injektiv*, wenn die Basis $a > 1$ ist.
Falls $a < 1$ ist, hat man $b = \frac{1}{a} > 1$ und damit für $x_2 > x_1$ wie eben erwiesen $b^{x_2} > b^{x_1} > 0$, also $\frac{1}{b^{x\pm 2}} < \frac{1}{b^{x\pm 1}}$. Das bedeutet $a^{x_2} < a^{x_1}$. Die Funktion fällt daher immer mit wachsendem x, ist also auch *injektiv* wie bei $a > 1$.
Injektive Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich und Wertebereich bijektiv, denn sie sind trivialerweise dort surjektiv. Somit existiert die Umkehrfunktion! Für $f(x) = a^x$ mit $a \neq 1$ und $a > 0$ sieht man sofort, dass der Definitionsbereich ganz $\mathbf{R}$ umfasst und als Werte alle positiven reellen Zahlen in Frage kommen, denn zu einem gegebenen $x > 0$ lässt sich immer ein x finden, das die Gleichung $a^x = y$ erfüllt. Das wird sofort plausibel, wenn man den Graphen betrachtet. Daher ist $D_f = \mathbf{R}$ und $W_f = \mathbf{R}^+$. Auf $\mathbf{R}^+$ existiert daher die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion. Diese heisst bekanntlich *Logarithmusfunktion zur Basis a*. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist in Abb. 1.35 dargestellt.

Abbildung 1.35: Beispiel einer Logarithmusfunktion



Definition 1.24 (Logarithmus zur Basis $a > 0$) *:*
Die Umkehrfunktion von $f(x) = a^x$ heisst **Logarithmusfunktion zu Basis a***:*

$$f^{-1}(x) = \log_a(x).$$

In der Literatur werden die Symbole für den Logarithmus je nach Autor verschieden verwendet. Wir wollen uns an die folgenden Abmachungen halten:

Symbole 2 (Logarithmus) *:*

- $\ln(x)$*: Logarithmus naturalis von x, Logarithmus zur Basis e (Eulersche Zahl).*
- *Log*(x)*: Logarithmus von zur Basis* 10 *(10–er Logarithmus).*
- $\log(x)$*: In der Literatur manchmal zur Basis e, manchmal zur Basis* 10*. Soll hier der Klarheit wegen nicht verwendet werden.*

Rechenregeln

Wichtig für den Umgang mit Logarithmen sind die Kenntnisse gewisser Eigenschaften. Einige davon sollen nachher bewiesen werden:

Satz 1.10 (Eigenschaften des Logarithmus) *:*

1. *Existenz:* $log_a(x)$ *existiert im Reellen für* $a > 0$ *und* $x > 0$ *immer.*
2. *Identität:* $x = \log_a(a^x) = a^{log_a(x)}$ *(*log *hat die Bedeutung des Exponenten.)*
3. *Null, eins:* $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.
4. *Addition:* $\log_a(x_1) + \log_a(x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2)$.
5. *Multiplikation:* $n \cdot \log_a(x) = \log_a(x^n)$.
6. *Basiswechsel:* $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

Zu den **Herleitungen dieser Eigenschaften**:

1. *Existenz*: Folgt daraus, dass $\log_a(x)$ die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion a^x ist.
2. *Identität*: Man hat $x \overset{f(x)=a^x}{\longmapsto} a^x = y$, $y \overset{f^{-1}(y)=\log_a(x)}{\longmapsto} \log_a(y) = x$ oder zusammengeschrieben

$$\begin{array}{rcl} x & \overset{f(x)=a^x}{\longmapsto} & a^x = y \\ x = \log_a(y) & \longleftarrow\!\!\!\dashv & y \end{array}$$

   Daraus kann man die behaupteten Beziehungen ablesen.

3. *Null, eins*: Es ist $1 \overset{f(x)=a^x}{\longmapsto} a^1 = a$ und $0 \overset{f(x)=a^x}{\longmapsto} a^0 = 1$. Durch Umkehrung der Abbildungen folgen die Behauptungen.
4. *Addition*:

$$\begin{array}{rcl} \log_a(y_1) = x_1 & \longmapsto & a^{x_1} = y_1 \\ \log_a(y_2) = x_2 & \longmapsto & a^{x_2} = y_2 \\ x_1 + x_2 & \longmapsto & a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot y_1 \cdot a^{x_2} = y_2 \\ x_1 + x_2 = \log_a y_1 \cdot y_2 & \longleftarrow\!\!\!\dashv & y_1 \cdot y_2 \end{array}$$

   Daher ist $\log_a(y_1) + \log_a(y_2) = x_1 + x_2 = \log_a y_1 \cdot y_2$. Die Behauptung erfolgt durch Variablenwechsel.

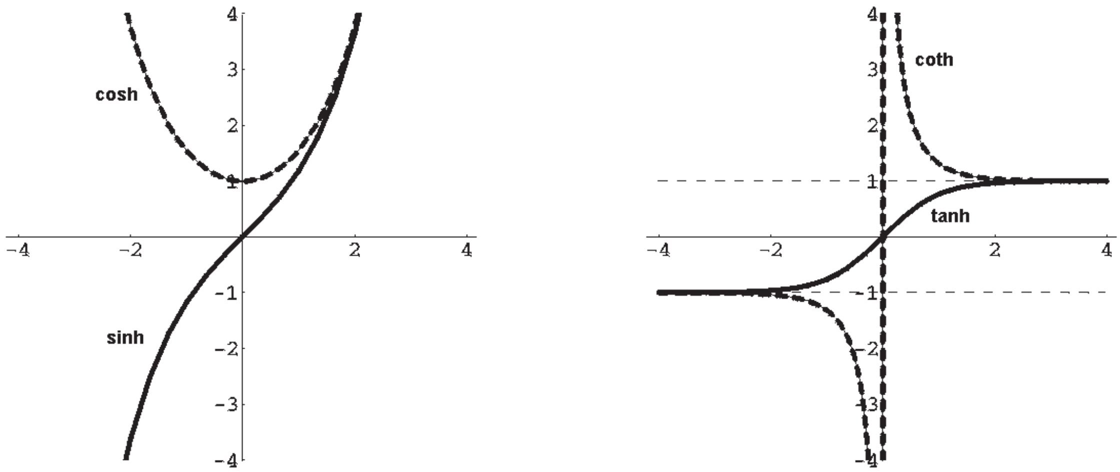
5. *Multiplikation*: Die Behauptung ist sofort klar, wenn man beachtet, dass eine Multiplikation mit einer natürlichen Zahl nur eine mehrfache Addition von gleichen Summanden ist.

6. *Basiswechsel*: Aus $x = a^{\log_a(x)} = b^{\log_b(x)}$ und speziell $b = a^{\log_a(b)}$ folgt $x = a^{\log_a(x)} = (a^{\log_a(b)})^{(\log_b(x))} = a^{\log_a(b)\cdot\log_b(x)}$. Da die Funktion $f(x) = a^x$ $(a > 0, \neq 1)$ injektiv ist, stimmen in der letzten Gleichung die Exponenten links und rechts überein. Daher ist $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$. Daraus folgt die Behauptung.

Wegen der Möglichkeit des Basiswechsels genügt es, numerisch eine einzige Logarithmusfunktion (z.B. ln) zu kennen.

1.2.22 Hyperbolische Funktionen

Abbildung 1.36: Hyperbolische Funktionen



Die hyperbolische Funktionen (vgl. Abb. 1.36) definiert man folgendermassen:

Definition 1.25 (Hyperbolische Funktionen) *:*

$$\begin{array}{rclcll} \sinh(x) & = & sh(x) & := & \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \textit{(Sinus hyperbolicus)} \\ \cosh(x) & = & ch(x) & := & \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \textit{(Cosinus hyperbolicus)} \\ \tanh(x) & = & th(x) & := & \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} & \textit{(Tangens hyperbolicus)} \\ \coth(x) & = & cth(x) & := & \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} & \textit{(Cotangens hyperbolicus)} \end{array}$$

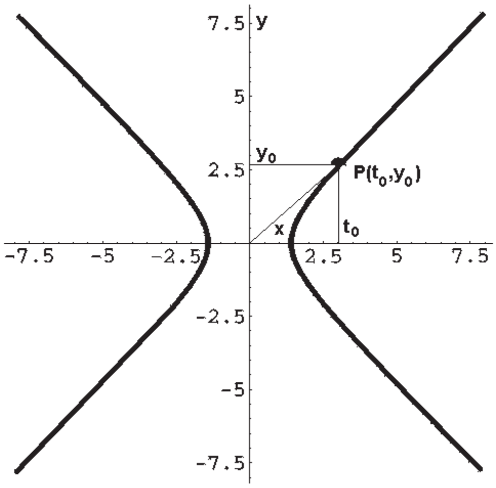
Bemerkung: Diese Funktionen sind demnach sauber mit Hilfe der Exponentialfunktion definiert. Ersetzt man in der Definition des $\cosh(x)$ die Variable x durch den komplexen Ausdruck ix, so erhält man eine saubere Definition des *trigonometrischen Cosinus*. Den Sinus kann man auf ähnliche Weise gewinnen, wobei man dazu im Nenner statt 2 neu $2i$ setzen muss. (tan und cot sind als Quotienten von sin und cos dann auch auf die Exponentialfunktion zurückgeführt.) Alles hängt dann an der komplexen Exponentialfunktion.

Satz 1.11 (Hyperbelgleichung) *:* sinh *und* cosh *erfüllen die Gleichung:*

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Die Gleichung der *Normalhyperbel* (vgl.Abb. 1.37) lautet bekanntlich $x^2 - y^2 = 1$. Schreibt man statt x dann $\cosh(x)$ und statt y neu $\sinh(x)$ und darin $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ resp $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, dann fallen nach dem Ausquadrieren bei der Subtraktion alle Glieder bis auf die gemischten weg. Es bleibt dann nur nach $\frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} = e^0 = 1$

Abbildung 1.37: Normalhyperbel



1.2.23 Areafunktionen

Aus Abb. 1.36 ersieht man, dass sich der cosh auf der nicht–negativen reellen Achse umkehren läst. sinh, tanh und coth lassen sich dagegen überall umkehren. Auf diesen Bereichen definiert man die Umkehrfunktionen wie folgt:

Definition 1.26 (Areafunktionen) *:*

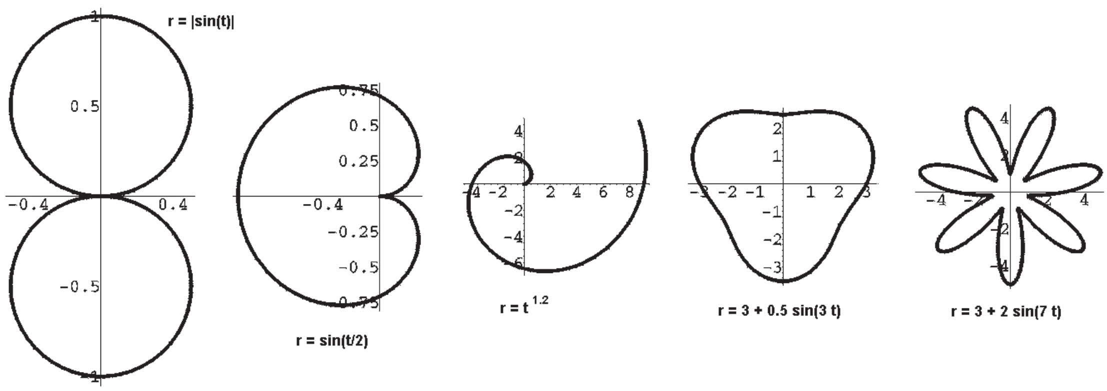
- *Die Umkehrfunktion von* $\sinh(x)$ *heisst* **arsinh (Areasinus hyperbolicus)**.
- *Die Umkehrfunktion von* $\cosh(x)$ *heisst entsprechend* **arcosh**.
- *Die des* $\tanh(x)$ *entsprechend* **artanh**.
- *Die des* $\coth(x)$ *entsprechend* **arcoth**.

Bedeutung des Parameters x: In Abb. 1.37 ist die Normalhyperbel dargestellt. Dann ist $t_0 = \cosh(x)$, $y_0 = \sinh(x)$, wobei x den dunkel gezeichneten Flächeninhalt bedeutet. Um das zu zeigen, bedarf es einer Methode um den Flächeninhalt rechnerisch zu erfassen. Diese Methode wird erst die *Integralrechnung* bieten. Jetzt kann der Zusammenhang noch nicht gezeigt werden.

1.2.24 Funktionen in Polarkoordinaten

Wie wir früher schon gesehen haben, lassen sich Funktionen oft bequemer in andern als in kartesischen Koordinatensystemen darstellen. Oft gebräuchlich sind bekanntlich die Polarkoorsinaten (Radius $r = r(\varphi)$, φ ist der Winkel). In Abb. 1.38 sind einige Beispiele von Darstellungen von Funktionen in Polarkoordinaten wiedergegeben.

Abbildung 1.38: Beispiele von Darstellungen von Funktionen in Polarkoordinaten



1.2.25 Einteilung der reellen Funktionen

$$\begin{array}{ccc}
\textit{Reelle Funktionen} & \rightarrow & \textit{Transzendente Funktionen} \\
\downarrow & & \\
\textit{Algebraische Funktionen} & \rightarrow & \textit{Algebraisch–irrationale Funktionen} \\
\downarrow & & \\
\textit{Rationale Funktionen} & \rightarrow & \textit{Gebrochen rationale Funktionen} \\
\downarrow & & \\
\textit{Ganz rationale Funktionen} & &
\end{array}$$

Transzendent sind z.B. die trigonometrischen Funktionen, algebraisch–irrational die Wurzelfunktionen, ganz rational die Polynomfunktionen und gebrochen rational Quotienten von zwei Polynomfunktionen.

1.2.26 Verkettete Funktionen

In Teil 3 ist gezeigt worden, dass man aus zwei Funktionen f und g die *zusammengesetzte Funktion* $\varphi = g \circ f$ konstruieren kann, wenn $W_f \subset D_g$ gilt. Die zusammengesetzte Funktion φ bildet die Menge $A = D_f$ direkt in die Menge $C = W_g$ ab:

$$\varphi : A \longmapsto C \quad \text{oder} \quad c = \varphi(a) = g(f(a)) \ \textit{oder}$$

$$\underbrace{a \overset{f}{\longmapsto} b \overset{g}{\longmapsto} c}_{\overset{\varphi}{\longmapsto}}$$

Allgemein ist bekanntlich $g(f(x)) \neq f(g(x))$.

Beispiel: Seien $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 4x - 3$. Dann ist $f(g(x)) = (4x-3)^2 + 2(4x-3) + 1 = 16x^2 - 16x + 4$ und $g(f(x)) = 4(x^2+2x+1) - 3 = 4x^2 + 8x + 1$. Die Ausdrücke sind demnach verschieden.

1.2.27 Implizit definierte Funktionen

Sei z.B. $f(x) = +\sqrt{x} = y$. Dann ist $y^2 = x$ und daher $y^2 - x \equiv 0$ für alle x und y, die die Gleichung $+\sqrt{x} = y$ erfüllen. Umgekehrt folgt aus $y^2 = x$ jedoch $\pm\sqrt{x} = y$, man hat also noch die negative Lösunge dabei, die anfangs nicht da war. Durch die Gleichung $F(x, y) = y^2 - x \equiv 0$ sind nun zwei verschiedene Funktionen definiert, nämlich $f(x) = +\sqrt{x} = f_1(x)$ und auch $f_2(x) = -\sqrt{x}$. Wir benutzen hier die folgende Sprechweise:

Vereinbarung 1 *: Eine Funktion, die durch eine Vorschrift wie z.B.* $f(x) = +\sqrt{x} = y$ *definiert ist, nennen wir* **explizit definiert***, eine solche, die durch eine Vorschrift wie z.B.* $F(x, y) = y^2 - x \equiv 0$ *definiert ist* **implizit definiert***.*

Implizit definierte Funktionen sind schwieriger zu handhaben als explizit definierte. Schon die Aufzeichnung des Graphen kann rasch etliche Mühen bereiten. Betrachten wir z.B. die implizit definierte Funktion $F(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + x^2y - 2x^2 + 3y^2 - 4xy + x - y + 3 \equiv 0$, so können wir versuchen eine Wertetabelle zu erstellen, indem wir zu einigen festgehaltenen x–Werten die jeweils zugehörigen y–Werte berechen. Doch das führt auf Gleichungen 3–ten Grades. Ist z.B. $x = 1$, so hat man die Gleichung $y^2 - y^3 + y - 2 + 3y^2 - 4y + 1 - y + 3 = 0$ zu lösen. Um serienweise solche Gleichungen numerisch zu behandeln, ist eine Maschine notwendig, sonst richtet man nicht viel aus. Allgemein hat eine solche Gleichung mehrere Lösungen, sodass man mehrere Kurven erhält resp. mehrere Funktionen $y = f(x)$ im Sinne der *Rechtseindeutigkeit*. (Funktionen sind bekanntlich linkstotale und rechtseindeutige Relationen.) Das Resultat des Graphen ist aus Abb. 1.39, Bild 1 ersichtlich.

Abbildung 1.39: Implizit definierte Funktionen

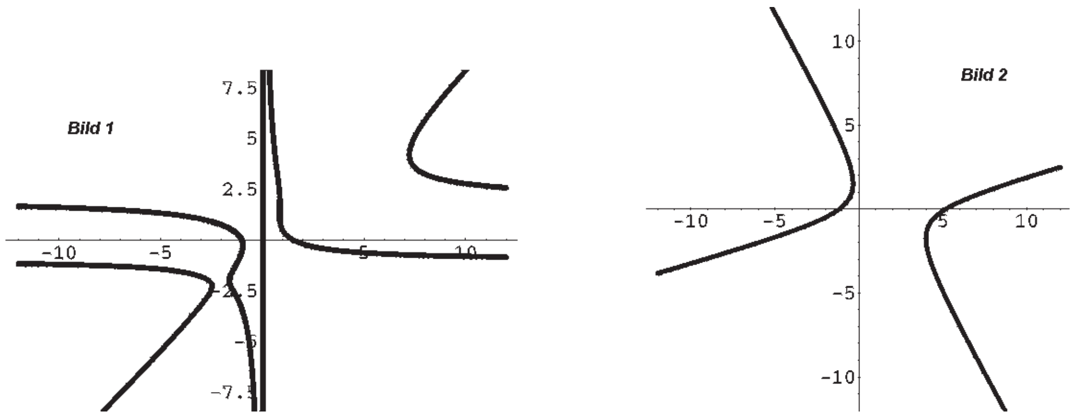


Abb. 1.39, Bild 2, zeigt die implizit definierte Funktion $F(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^2 - 4x + 5y - 6 = 0$, also eine verschobene und gedrehte Hyperbel. (Bei *Kurven 2. Ordnung*, bei deren Gleichung höchstens Potenzen 2. Grades vorkommen, handelt es sich immer um *Kegelschnitte*, d.h. um *Parabel*, *Ellipsen* (*Kreise* eingeschlossen) oder *Hyperbeln*.)

1.2.28 Konstruktion einer Funktionen durch n gegebene Messpunkte

In der Praxis kann das Problem auftauchen, dass man durch eine Anzahl gegebener Messpunkte eine Polynomkurve legen muss, auf der die gegebenen Punkte exakt liegen. Es werde z.B. am Punkte $x = 1$ der Wert $y = y_1$ gemessen, am Punkte $x = 2$ der Wert $y = y_2$ ... und am Punkte $x = n$ der Wert $y = y_n$. Durch n derart gegebene Punkte kann man ein Polynom $n - 1$–ten Grades $p(x) = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1x + a_0$ legen, denn durch die n Messpunkte sind n lineare Gleichungen gegeben, aus denen man die n unbekannten Koeffizienten a_{n-2}, a_{n-3}, $\ldots$, a_0 von $p(x)$ berechnen kann.

Beispiel:
Sei $n = 15$. Die Messpunkte seinen:

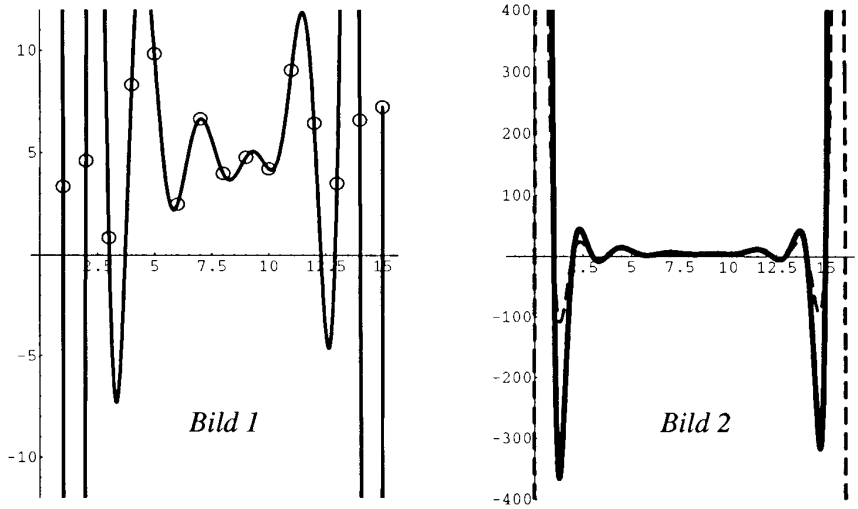
{	(1.0, 3.361)	(2.0, 4.611)	(3.0, 0.856)	(4.0, 8.316)	(5.0, 9.833	
	(6.0, 2.499)	(7.0, 6.662)	(8.0, 4.002)	(9.0, 4.782)	(10.0, 4.229)	
	(11.0, 9.033)	(12.0, 6.457)	(13.0, 3.518)	(14.0, 6.611)	(15.0, 7.239)	}

Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 1^{15}+a_{14}1^{14}+a_{13}1^{13}+a_{12}1^{12}+\ldots+a_1 1+a_0 & = & 3.361 \\ 2^{15}+a_{14}2^{14}+a_{13}2^{13}+a_{12}2^{12}+\ldots+a_1 2+a_0 & = & 4.611 \\ & \vdots & \\ 15^{15}+a_{14}15^{14}+a_{13}15^{13}+a_{12}15^{12}+\ldots+a_1 15+a_0 & = & 7.239 \end{array}$$

Man hat daher 15 Gleichungen für die 15 Koeffizienten a_{14} bis a_0. Die Kurve durch die gegebenen Punkte sind in Abb 1.40, Bild 1, gezeichnet. Das berechnete Polynom lautet: $p(x) = 43652.3 - 138734.\,x + 186357.\,x^2 - 142597.\,x^3 + 70259.\,x^4 - 23788.4\,x^5 + 5747.32\,x^6 - 1012.19\,x^7 + 131.181\,x^8 - 12.4978\,x^9 + 0.864413\,x^{10} - 0.0422055\,x^{11} + 0.00137843\,x^{12} - 0.0000270108\,x^{13} + 2.40021\,10^{-7}\,x^{14}$

Abbildung 1.40: Polynomkurve durch gegebene Punkte



Es fällt sofort auf, dass die Kurve man den Intervallenden sicht mehr so schön „angepasst“ ist wie in der Mitte. Dem kann man abhelfen, indem man links und rechts noch weitere „künstliche“ Messpunkte dazunimmt, so dass sich die Ausschläge der Kurve weiter nach aussen verschieben. Z.B. kann man im Beispiel die Punkte $(0, 5.467)$ und $(16, 5.467)$ dazunehmen. 5.467 ist der Mittelwert der y–Werte der Messpunkte. Das so „vervesserte“ Resultat ersieht man aus Abb 1.40, Bild 2 (gestrichelte Kurve).

1.2.29 Anzahlfunktionen

Oft hat man in der Praxis Probleme folgender Art: Auf wieviele verschiedene Arten kann man im Lotto einen 1–er, 2–er, 3–er etc. haben? Oder — auf wieviele Arten kann man 10 Studenten auf 10 Stühle setzen, 11 Studenten auf 11 Stühle, 12 Studenten auf 12 Stühle etc. Im letzten Fall sucht man also eine Anzahl $Anz(12) = f(12)$[13], im vorletzten Fall eine Anzahl $Anz(11) = f(11)$ etc.. Allgemein sucht man offenbar immer eine Anzahl $Anz(x) = f(x)$, die zu einer natürlichen Zahl x gehört. Daher hat man eine Funktion auf dem Definitionsbereich $D_f = \mathbf{N}$ mit dem Wertebereich $W_f \subseteq \mathbf{N}$. Solche Funktionen nennen wir *Anzahlfunktionen*. Eine eingehendere Behandlung gewisser Typen solcher Funktionen erfolgt im Teil 6, *Kombinatorik*.

1.2.30 Logische Funktionen

Solche Funktionen haben wir in Teil 2, d.h. in der Aussagenlogik, angetroffen. Z.B. sei die Aussageform resp. Aussagefunktion $f(X_1, X_2, X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2) \Longrightarrow (X_2 \vee X_3)$ gegeben. Offensichtlich ist der Defini-

[13] Anz ist der Funktionsname.

tionsbereich die Produktmente $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} = \{0,1\}^3 = \{\{0,0,0\},\{0,0,1\},\ldots,\{1,1,1\}\}$ der Wahrheitsmenge $\{0,1\}$. Der Wertebereich ist natürlich die Wahrheitsmenge $\{0,1\}$. Man verifiziert leicht, dass der Funktionswert bei beliebiger Wahl eines Elementes aus dem Definitionsbereich immer 1 ist. Es handelt sich somit um eine Tautologie. Weitere Beispiele finden sich in Teil 2.

1.3 Übungen

Übungen finden sich in *DIYMU , vom Autor (Bibl.: wirz1) sowie in der klassischen Schulbuchliteratur für Berufsschulen und die Gymnasialstufe.*

Kapitel 2

Gleichungen

2.1 Allgemeines, Grundlagen

2.1.1 Definitionen

Bei einem grossen Teil der praktischen Probleme, die mit Mathematik zu tun haben, handelt es sich um Gleichungen über dem Grundbereich (Menge) der reellen oder komplexen Zahlen. Wir wollen hier in einem Überblick zusammenfassen, was auf dieser Stufe allgemein bekannt sein muss:

Begriffserklärung 3 *Eine* **Variable** *ist ein Zeichen für einen Platzhalter oder eine Leerstelle, die verschiedene Werte aus dem Grundbereich aufnehmen kann.*
Eine **Konstante** *ist ein Zeichen für ein festes Element aus dem Grundbereich.*
Ein **algebraischer Term** *ist ein algebraischer Ausdruck mit Variablen und Konstanten. Er besteht aus einer sinnvollen Zeichenfolge mit Buchstaben, Zahlen und Rechenzeichen (hier* $+, \cdot, :, \sqrt{}$ *etc.).*

Ein algebraischer Term hat einen Definitionsbereich. Z.B. $T(x) = \sqrt{3-x}$, $D_T = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 3\}$.

Definition 2.1 (Gleichungen) *:*

- *Eine* **algebraische Gleichung** *ist eine Verbindung von zwei algebraischen Termen durch das Gleichheitszeichen, z.B.* $T_1 = T_2$.
- *Der* **Definitionsbereich** *der Gleichung* $T_1 = T_2$ *ist die Schnittmenge* $D_{T_1} \cap D_{T_2}$.
- *Eine* **transzendente Gleichung** *enthält im Gegensatz zur algebraischen Gleichung noch transzendente Ausdrücke wie z.B.* $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$, *die sich nicht einfach durch Substitution eliminieren lassen.*
- *Bei einer* **identischen Gleichung** *ist der Term links einfach eine Umformung des Terms rechts, z.B.* $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
- *Eine* **Funktionsgleichung** *ist eine Gleichung, die die Bildugsvorschrift des Funktionswerts erklärt, z.B.* $f(x) = \sin(x) + x^2 - 1$.
- *Eine* **Bestimmungsgleichung** *ist eine Gleichung, die nur für ganz bestimmte Werte der Variablen erfüllt ist, z.B.* $x^2 - 3 = -2x^2 + 9$. *Da die in die Variablen einzusetzenden Werte, für die die Gleichung richtig ist, vorerst unbekannt sind, nennt man die Variablen im Sinne der genannten Werte auch* **Unbekannte**. *Diejenigen Werte, die die Gleichung bei Einsetzung in die Variablen in eine wahre Aussage verwandeln, heissen* **Lösungen** *der Gleichung.*

- *Zwei Gleichungen heissen bezüglich eines gegebenen Grundbereichs* **äquivalent**, *wenn sie dieselbe* **Lösungsmenge** *haben. Umformungen, die die Lösungsmenge einer Gleichung unverändert lassen, heissen* **Äquivalenzumformungen**.

Achtung! *Nicht jede algebraische Umformung ist eine Äquivalenzumformung. Z.B. folgt aus $x = -x$ durch Quadrieren $x^2 = x^2$. Bei der ersten Gleichung ist $\{0\}$ die Lösungsmenge, bei der zweiten Gleichung ist jede Zahl Lösung...*

2.1.2 Ganz rationale Gleichungen

In einer algebraischen Gleichung werden auf die Unbekannten nur die sechs rationalen Rechenoperationen angewandt (Addieren bis Radizieren). Gelingt es noch, auf einfache Art durch Potenzieren die Wurzeln wegzuschaffen, so erhält man eine **ganz rationale Gleichung**. *Wir betrachten nun eine solche Gleichung mit nur einer Variablen x. Ordnet man die Terme einer solchen Gleichung der Grösse der Potenzen von x nach, so erhält man nach einer eventuellen Äquivalenzumformung einen Ausdruck der Form:*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + +a_1x^1 + a_0 = 0$$

Definition 2.2 (Grad einer Gleichung) *Die höchste Potenz von x gibt den* **Grad** *der Gleichung an. Die eben gezeigte Darstellung heisst* **Normalform der Gleichung n–ten Grades**.

Wenn man die komplexen Zahlen **C** *eingeführt hat so kann man zeigen, dass die obige Gleichung in* **C** *genau n Lösungen besitzt. Diese Lösungen können dabei mehrfach auftreten und die Koeffizienten a_i dürfen auch komplex sein. (Hauptsatz der Algebra)*[1].

Seien x_1 und x_2 Lösungen einer Gleichung 2–ten Grades $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$.
Die Gleichung $a_2(x - x_1)(x - x_2) = a_2x^2 + a_2(-x_1 - x_2)x + a_2x_1x_2 = 0$ hat ebenfalls die Lösungen x_1 und x_2. Diese Gleichung muss also aus der ersten durch eine Äquivalenzumformung hervorgegangen sein. Da zwei äquivalente, variablenweise gleich geordneten Gleichungen bis auf einen Erweiterungsfaktor elementweise übereinstimmen müssen und hier bei beiden Gleichungen der erste **Koeffizient** *a_2 ist, müssen die restlichen Koeffizienten auch gleich sein: $a_1 = a_2(-x_1 - x_2)$ und $a_0 = a_2x_1x_2$. Die hier angewandte Methode nennt man die Methode des* **Koeffizientenvergleichs**. *Das führt auf einen bekannten Satz:*

Satz 2.1 (von Vieta) [2]*:*
Vor: *Gegeben sei die Gleichung $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ mit den Lösungen x_1 und x_2.*
Beh.: *$a_2(x_1 + x_2) = -a_1$ und $a_2x_1x_2 = a_0$.*

Dieser Satz lässt sich mit Hilfe des Hauptsatzes der Algebra für einen beliebig grossen Grad ausdehnen (vgl. Teil über komplexe Zahlen).
Bezüglich der Lösungstricks einer Anzahl von Gleichungstypen (kubische Gleichung, Gleichung 4–ten Grades, gebrochen rationale Gleichung, irrationale und transzendente Gleichungen) sei auf die Literatur verwiesen. (Z.B. Leupold, (Bibl.: leupold).)

2.1.3 Bemerkungen zu Ungleichungen

Definition 2.3 (Ungleichungen) *Ersetzt man bei einer Gleichung das Gleichheitszeichen $=$ durch eines der Zeichen $\leq, <, \geq, >, \neq$, so heist das entstehende Gebilde* **Ungleichung**.

Die benutzten Zeichen können auf dieser Stufe als bekannt vorausgesetzt werden. Bei Ungleichungen mit einer Unbekannten sind die Lösungsmengen meistens Intervalle oder Vereinigungen von solchen. Im Unterschied zu Gleichungen muss man das Ungleichheitszeichen $(\leq, <, \geq, >)$ beim Vertauschen der beiden

[1] Vgl. komplexe Zahlen
[2] 1540 – 1603

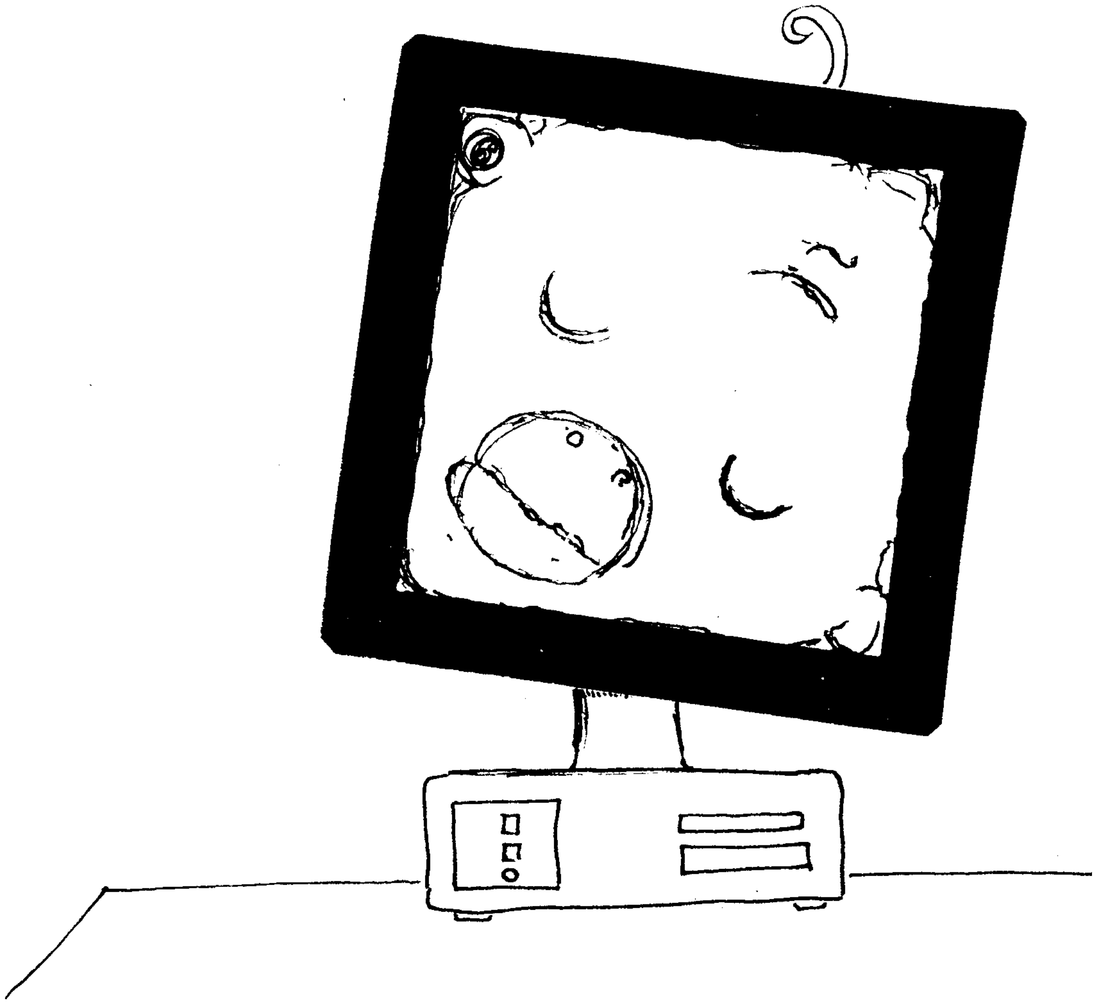
Seiten umkehren, z.B. $a > b \iff b < a$. *Auch bei den Ähnlichkeitsumformungen gelten Einschränkungen: Beim Multiplizieren einer Ungleichung mit negativen Werten muss man das Zeichen ebenfalls kehren.*

Beispiel:
$-|x+2| > -3$ *führt zuerst auf* $|x+2| < 3$. *Löst man den Betrag auf, so erhält man* $-3 < x+2 < 3$, *also zwei Ungleichungen mit den beiden Lösungen* $-5 < x$ *und* $x < 1$, *zusammen im Schnitt also das offene Intervall* $(-5, 1)$.

2.2 Übungen

Übungen finden sich in DIYMU, vom Autor (Bibl.: wirz1) sowie in der klassischen Schulbuchliteratur für Berufsschulen und die Gymnasialstufe.

Abbildung 2.1: Schräges Schwein im Quadrat ...



Abbildungsverzeichnis

1 Ohne Worte . . . 4

1.1 Zahlengerade 6
1.2 Gängige Koordinatensysteme, $f(x) = x^2$, $r(\varphi) = \varphi^2$ 6
1.3 Definitionsbereich und Wertebereich 7
1.4 Abgeschlossene Intervalle als Definitionsbereich und Wertebereich 8
1.5 Gauss–Klammer–Funktion 9
1.6 Signum-Funktion 9
1.7 Betrags-Funktion 10
1.8 Beispiel einer Folge 10
1.9 Konstante und lineare Funktion 11
1.10 Lineare Funktion, Gerade, Steigung 12
1.11 Lineare Funktionen, Beispiele 12
1.12 Lineare Funktion, Nullstelle 13
1.13 Quadratische Funktionen $f(x) = ax^2$ 13
1.14 Quadratische Funktionenschar $f(x) = ax^2 + d$ 14
1.15 In x-Richtung verschobene Parabel 14
1.16 Potenzfunktionen 16
1.17 Potenzfunktionen, Hyperbeln 17
1.18 Pol 17
1.19 Beispiele mit Polen und Asymtoten 18
1.20 Beispiele von beschränkten Funktionen 18
1.21 Beispiele von punktweise definierten Funktionen 19
1.22 Beispiele einer stückweise definierten Funktion 19
1.23 Beispiele des Wachstums von Funktionen 20
1.24 Beispiel zur Monotonie von Funktionen (streng monoton wachsend) 21
1.25 Gerade und ungerade Funktion 21
1.26 Diverse Plotbereiche derselben Funktion 22
1.27 Beispiel einer gebrochen rationalen Funktion 23
1.28 Funktion und Umkehrfunktion 23
1.29 Umkehrfunktion, Variablenwechsel 25
1.30 Winkel und Winkelmessung 26
1.31 Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis 27
1.32 Graphen der bekannten Winkelfunktionen 28
1.33 Umkehrfunktionen der bekannten Winkelfunktionen über den Standardbereichen 29
1.34 Exponentialfunktionen 30
1.35 Beispiel einer Logarithmusfunktion 31
1.36 Hyperbolische Funktionen 33
1.37 Normalhyperbel 34
1.38 Beispiele von Darstellungen von Funktionen in Polarkoordinaten 35
1.39 Implizit definierte Funktionen 36
1.40 Polynomkurve durch gegebene Punkte 37

2.1 Schräges Schwein im Quadrat . . . 41

Index

(Nicht überarbeitet nach dem NeXT-Crash 1999. Kleinere Abweichungen sind möglich.)

abgeschlossenes Intervall 10
algebraische Funktion 37
algebraisch–irrationale Funktion 37
algebraischer Term 43
algebraische Gleichung 43
allgemeines Glied einer Folge 13
alternierende Folge 13
Altgrad 29
Anzahlfunktion 40
Äquivalenzumformung 44
äquivalent 44
arcoth 37
arcosh 37
Arcusfunktion 32
Areasinus hyperbolicus 37
Areacosinus hyperbolicus 37
Areatangens hyperbolicus 37
Areacotangens hyperbolicus 37
Areafunktion 37
Argumentenbereich 9
arsinh 37
artanh 37
Ast 19
Asymptote 19

Basis 32
beschränkte Funktion 21
Bestimmungsgleichung 43
Betrags–Funktion 11
Bildbereich 9
Bogenlänge 30
Bogenmass 30

ch 36
cosh 36
Cosinus hyperbolicus 36
Cotangens hyperbolicus 36
coth 36
cth 36

Definitionsbereich 9, 43
dichte Menge 7
Diskriminante 17

e 33
Einheitskreis 30
Ellipse 39
Eulersche Zahl 33
Eulersche Exponentialfunktion 33
explizit definierte Funktion 38
Exponentialfunktion 32
Exponent 33

Fibonacci–Folge 13
Funktionsgleichung 43
Funktion in Polarkoordinatendarstellung 37

ganz rationale Gleichung 44
ganz rationale Funktion 25, 37
Gauss–Klammer–Funktion 10
gebrochen rationale Funktion 26, 37
geordnete Menge 7
geordnet 7
gerade Funktion 24
Gleichheit zweier Funktionen 10
Glieder einer Zahlenfolge 13
Gradmass 29
Grad 25
Grad einer Gleichung 44
Grenzprozess 33
Grundbereich 43

halboffenes Intervall 10
Hauptsatz der Algebra 44
Hornerschema 25
hyperbolische Funktion 36
Hyperbeln 19, 39
Hyperbelgleichung 36

identische Gleichung 43
implizit definierte Funktion 38
Intervalle 9
isolierte Punkte 22

Kegelschnitt 39
Koeffizient 25, 44

Koeffizientenvergleichs 44
konstante Funktion 13
Konstr. einer Fkt. durch n geg. Messpunkte 39
Konstante 43
Kurve 2. Ordnung 39

Lösunge 43
Lösungsmenge 44
lückenlose Menge 7
lineare Funktion 13
linkstotal 7
ln 35
Log 35
log zur Basis a 35
Logarithmusfunktion 34
Logarithmusfunktion zur Basis a 34
logische Funktion 41

mathematische Funktion 7
monoton fallend 24
Monotonie 23
monoton wachsend 24

Neugrad 30
Normalform der Gleichung n–ten Grades 44
Normalhyperbel 36
Nullstelle 15

offenes Intervall 10
orientierte Winkel 29
Origo 29

Parabel 39
Parabel 2. Ordnung 15
Parabel höherer Ordnung 19
Periodizität 31
Pol 19
Polarkoordinaten 9, 37
Polstelle 20
Polynome 25, 26
Polynomfunktion 25
positive Drehung 29
Potenzfunktion 19
punktweise definierte Funktion 21

quadratische Gleichung 16
quadratische Funktion 15

rechtseindeutig 7
reelle Funktion 7, 37
reelle Zahlen **R** *7*
rekursiv definierte Folgen 13

Schmiegegerade 20
sh 36
Signum–Funktion 11
sinh 36
Sinus hyperbolicus 36
stückweise definierte Funktion 21
Streckung des Koordinatensystems 18
strenge Monotonie 23
streng monoton wachsend 24
streng monoton fallend 24

Tangens hyperbolicus 36
tanh 36
th 36
transzendent 33
transzendente Funktion 37
transzendente Gleichung 43

Umkehrabbildung 26
Umkehrfunktion 26
Unbekannte 43
unendliches Intervall 10
Unendlichkeitsstellen 20
ungerade Funktion 24
Ungleichung 44
Urbildbereich 9

Variable 43
Variablenwechsel 27
Verkettung 23
verkettete Funktion 38
Verschiebung 15
Verschiebung des Koordinatensystems 18
Vollwinkel 29

Wertebereich 9
Wertevorrat 9
Wertetabelle 9
Winkelmass 29
Winkelfunktion 29
Winkel 29
Wurzelfunktion 9, 28

y–Achsenabschnitt 15

Zahlengerade 8
Zahlenfolge 12
Zahlenstrahl 8

Literaturverzeichnis

[1] Ansorge, Oberle. Mathematik für Ingenieure Bd. 1 u. 2. Akademie Verlag Berlin (Bibl.: ansorge)

[2] Bartsch. Taschenbuch mathematischer Formeln. Verlag Harri Deutsch (Bibl.: bartsch)

[3] Berendt, Weimar. Mathematik für Physiker, Bd. 1, 2. VCH-Verlag (Bibl.: berendt)

[4] Blachman. Mathematica: A Practical Approach. Prentice Hill Series in Innovative Technology (Bibl.: blachman1)

[5] Brauch, Dreyer, Haacke. Mathematik für Ingenieure. Teubner-Verlag (Bibl.: brauch)

[6] Bronstein. Semendjajew. Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch (neue Auflage mit Mathematica) (Bibl.: bronstein)

[7] DMK/ PPK. Formeln und Tafeln. Orell Füssli-Verlag (Bibl.: dmk)

[8] Dörfler, Peschek. Mathematik für Informatiker. Hanser-Verlag (Bibl.: dorfler)

[9] Fetzer, Fränkel. Mathematik, ein Lehrbuch für Fachhochschulen, Bd. 1 u. 2. DVI–Verlag Düsseldorf (Bibl.: fetzer)

[10] Gellrich. Mathematik für Fachhochschulen, Bd. 1, 2, 3. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: gellrich1)

[11] Gellrich. Einführung in die mathematischen Methoden für Wirtschaftsinformatiker. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: gellrich2)

[12] Leupold u.a.. Mathematik, ein Studienbuch für Ingenieure. Fachbuchverlag Leipzig – Köln (Bibl.: leupold)

[13] H. Malle. Mathematik für Techniker, Bd. 1, 2. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: malle)

[14] Papula. Mathematik für Ingenieure Bd. 1, 2, 3. Vieweg-Verlag (Bibl.: papula)

[15] Papula. Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschafter. Vieweg-Verlag (Bibl.: papula)

[16] Rottmann. Mathematische Formelsammlung. BI Mannheim (Bibl.: rottmann)

[17] Schärf. Mathematik Bd. 1, 2, 3, 4 mit separaten Lösungsheften. Oldenburg Verlag Wien (Bibl.: scharf1)

[18] Reihe SCHAUM, diverse Autoren. Diverse Bände zur Mathematik. Mac Graw Hill-Verlag (Bibl.: schaum)

[19] Stöcker. Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Verlag Harri Deutsch (Bibl.: stocker)

[20] Swobowski. Calculus (englisch und französisch). pws–Publ. (Bibl.: swobowski)

[21] J. Wendeler. Vorkurs der Ingenieurmathematik. Verlag Harri Deutsch Thun (Bibl.: wendeler)

[22] Vom Autor. DIYMU (Do it yourself Mathematik Übungsbuch). Ingenieurschule Biel 1991 (Bibl.: wirz)

[23] Vom Autor. Kleine Einführung in *Mathematica*. Ingenieurschule Biel 1994 (Bibl.: wirz1)

Anhang A

Aus dem DIYMU