

Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ Type I1 ◇ II / 2 02/03

Probl. 1

(28 Punkte) • (28 points)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.

• *Les problèmes partiels suivants sont indépendants. Pour chaque problème partiel on donne le même nombre de points. Toutes les étapes partielles de la solution sont à retenir par écrit sur la feuille de solution.*

(a) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int -x^2 + t x^3 - 4x^4 + 5x^5 + (t-1)x^{t-2} dx = ?$
($t > 2$)

(b) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int_{-1}^{6t} -x^2 + t x^3 - 4x^4 + 5x^5 + (t-1)x^{t-2} dx = ?$

(c) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int_{-1}^{6x} -\sin(2-t) + \sin(2+t) dt = ?$

(d) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int_1^2 \ln(x)^2 dx = ?$

Hinweis: • *Indication:* $\ln(x)^2 = 1 \cdot \ln(x)^2$ (partiell) • (*partiellement*)

(e) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int_1^2 \frac{d(\ln(x)^2)}{dx} - \frac{1}{x} dx = ?$

(f) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int_t^{t^2} -\sqrt{x} + 2e^{x^2} x dx = ?$

(g) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int_t^{\frac{1}{2}t} \frac{2}{e^y y} - \cos(1 - \pi y) dy = ?$

Probl. 2

(15 Punkte)

Als Modell für den Querschnitt eines Tunnels sollen die folgenden beiden Funktionen untersucht werden:

• *Comme modèle pour la coupe transversale d'un tunnel, il faut comparer les deux fonctions suivantes:*

$$p(x) = ax^4 + bx^2 + c, \quad f(x) = d \cos(kx) + h \sin(kx)^2$$

(Untersuche den Fall $k = \frac{\pi}{24}$.) • (*Evaluer le cas $k = \frac{\pi}{24}$.*)

Der Graph der Funktion soll durch die folgenden Punkte gehen:

• *Le graphe de la fonction doit passer par les points suivants:*

$$P_1 = (-12; 0), \quad P_2 = (-10; 5), \quad P_3 = (0; 6), \quad P_4 = (10; 5), \quad P_5 = (12; 0)$$

- (a) Berechne nach Möglichkeit a, b, c, d, h .
 • *Calculer a, b, c, d, h , si possible .*
- (b) Skizziere die Funktionen.
 • *Faire une esquisse de ces fonctions.*
- (c) Vergleichen Sie das Integral dieser Funktionen.
 • *Comparer l'intégral de ces fonctions.*
- (d) Berechne die Extrema dieser Funktionen und zeichne diese in der Skizze ein.
 • *Calculer les extrêmes de ces fonctions et les porter sur l'esquisse.*
- (e) Beurteile, welche Funktion sich besser eignet.
 • *Estimer quelle fonction se prête mieux.*

Probl. 3**(12 Punkte)**

Die Funktionskurve von $f(x) = y = x^3$ wird um die y -Achse rotiert. Mache eine Skizze.

- *La courbe de la fonction $f(x) = y = x^3$ soit pivotée sur l'axe y . Faire une esquisse.*

- (a) Das Volumen des entstehenden Rotationskörpers zwischen $y = 0$ und $y = t$ hat dasselbe Volumen wie ein Zylinder mit dem Radius r und der Höhe t . Berechne r .
 • *Le volume du corps de révolution obtenu entre $y = 0$ et $y = t$ a le même volume qu'un cylindre du rayon r et de la hauteur h . Calculer r .*
- (b) Die Mantelfläche des entstehenden Rotationskörpers zwischen $y = 0$ und $y = 2$ hat denselben Inhalt wie die Mantelfläche eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe 2. Berechne r .
 • *L'aire latérale du corps de révolution entre $y = 0$ et $y = t$ a la même mesure qu'un cylindre du rayon r et de la hauteur h . Calculer r .*

Probl. 4**(12 Punkte)**

$$f_q(x) = x^3 + q x^2 + x + 1$$

- (a) Sei • *Soit $q = 3 \rightsquigarrow$* Betrachte: • *Considérer:* $\int_0^x f_3(t) dt = \frac{d f_3(x)}{d x}$.

Skizziere f_3 und berechne den kleinsten positiven Wert x , für den die Gleichung richtig ist. (x numerisch angeben.)

- *Esquisse de f_3 ! Ensuite calculer la plus petite valeur positive de x pour laquelle cette équation est vraie. (Donner x de façon numérique.)*
- (b) Berechne aus $f_q'(x) = 0$ den Wert $q = q(x)$ als Funktion von x . Bestimme daraus die Lösung von $q(x) = 0$. Beschreibe die Bedeutung dieser Lösung für den Graphen.
 • *Calculer la valeur $q = q(x)$ comme fonction de x de l'équation $f_q'(x) = 0$. Ensuite déterminer la solution de $q(x) = 0$. Décrire la signification de cette solution pour le graphique.*

Probl. 5

 Fakultativ: • *Facultatif*:

(8 Punkte)

 Seien • *Soient* $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = -a(x - 10)^2 + 10$

(a) Löse das folgende Gleichungssystem:

 • *Résoudre le système d'équations suivant*:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ \int_0^x f_1(t) dt &= \int_x^{10} f_2(t) dt \end{aligned}$$

(b) Skizziere damit die Graphen der Funktionen und die integrierten Flächen.

 • *Faire des esquisses des graphiques des fonctions et des surfaces intégrés avec les valeurs obtenues.*

 Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR